

UNIVERSITA' DEGLI STUDI - MODENA

Facoltà di Scienze Fisiche

Un metodo non distruttivo per la misura della dispersione
e della distribuzione di energia in un fascio continuo di
protoni accelerati ad alta energia

Tesi di Laurea di Roberto Cappi

Relatore Prof. R. Santangelo

Anno Accademico 1976-77

INDICE

1	INTRODUZIONE.....	pag. 2
1-1	Metodi di misura del dE/E	" 3
2	TEORIA DELL'ACCELERAZIONE A RADIOFREQUENZA IN UN ACCELERATORE CIRCOLARE.....	" 7
2-1	Il campo acceleratore.....	" 7
2.2	Le equazioni del moto.....	" 9
2-3	Calcolo dell'area del "bucket".....	" 25
2-4	Le particelle instabili.....	" 27
2-5	Introduzione alla misura.....	" 34
3	REALIZZAZIONE PRATICA DELLA MISURA.....	" 43
3-1	Descrizione delle apparecchiature.....	" 43
3-2	Il generatore RF.....	" 47
3-3	Il generatore di rampa.....	" 48
3-4	Il sistema di rivelazione e di osservazione..	" 49
4	I RISULTATI SPERIMENTALI.....	" 50
4-1	La prima serie.....	" 50
4-2	La seconda serie.....	" 54
Appendice A	: La funzione δ di Dirac.....	" 60
"	B : Analisi di Fourier per una funzione δ di Dirac periodica.....	" 61
"	C : Parametri vari.....	" 63
"	D : Frequenza delle oscillazioni sincro- troniche.....	" 65
"	E : Espressione di Γ per $B=\text{costante}$	" 66
"	F : Sul come si effettua un "debunching" ..	" 67
Bibliografia		" 70

1-INTRODUZIONE

Nel corso dell'utilizzazione degli acceleratori di particelle per le alte energie è frequente la necessità, sia per l'utilizzazione dei fasci, sia per lo studio degli stessi, di conoscere ciò che si indica come la "distribuzione in energia" e la "dispersione di energia" delle particelle ad un dato istante.

Vediamo cosa rappresentano queste due grandezze.

Se un fascio di N_0 (*) particelle ha, ad un certo istante t , un'energia media esattamente definita dal valore dei parametri di accelerazione al tempo t , non è detto che ognuna di queste N_0 particelle abbia questo valore di energia. Vedremo successivamente che solo una fra queste, la cosiddetta "particella sincrona", assume questo valore. Tutte le altre per effetto di diverse condizioni iniziali, di forze dovute a fenomeni di carica spaziale, ecc. hanno energie diverse con valori distribuiti attorno al valore medio.

La curva $N = N(E)$, dove con N si indica il numero di particelle, ci darà quindi la "distribuzione in energia" e la differenza fra i valori minimo e massimo di energia presenti in uno stesso fascio ci permette di calcolare la "dispersione di energia" $\frac{dE}{E}$. Possiamo definire nello stesso modo la "distribuzione in quantità di moto" e la "dispersione della quantità di moto".

Nei paragrafi successivi useremo indifferentemente l'una o l'altra di queste grandezze a seconda della convenienza, tenendo presente che vale la (v. Bibl. 1)

$$\frac{dP}{P} = \beta^{-2} \frac{dE}{E}$$

(spesso poi, per le alte energie, $\beta = \frac{v}{c} \simeq 1$ e quindi $\frac{dP}{P} \simeq \frac{dE}{E}$)

(*) Nei moderni acceleratori di protoni $N_0 = 10^{12} \div 10^{13}$ p.p.p.
(p.p.p. = protoni per impulso)

1-1 Metodi di misura del dE/E

Vi sono diversi metodi per misurare la dispersione di energia di un fascio di particelle e si possono classificare in due classi principali : non distruttivi e distruttivi, a seconda che vi sia o non vi sia la possibilità di riutilizzare il fascio una volta effettuata la misura. È evidente che i primi, a parità di precisione, sono preferibili ai secondi.

Vediamo rapidamente alcuni fra i metodi principali.

I distruttivi si basano in genere sul principio dello spettrometro. Il fascio di particelle attraversa un campo magnetico perpendicolare alla direzione del moto e le singole particelle costituenti il fascio sono deviate più o meno a seconda della loro quantità di moto. La deviazione viene misurata interponendo all'uscita del magnete o uno schermo scintillatore (ed allora si ottiene una misura visuale integrata su tutta la durata del fascio) oppure delle griglie costituite da sottili fili conduttori isolati fra di loro, sui quali le particelle depositano la loro carica. Quest'ultima viene quindi misurata elettronicamente (spesso mediante computer) costituendo quindi una misura istantanea ed anche una misura della distribuzione di energia.

Il vantaggio di questo metodo risiede nella grande accuratezza dovuta soprattutto al fatto che si sa in genere misurare con ottima precisione un'intensità di campo magnetico ed una distanza. Indicando con e la carica della particella, B l'intensità di campo magnetico ed r il raggio di curvatura dell'orbita della particella, otterremo la sua quantità di moto dalla

$$p = e B r$$

L'inconveniente del metodo risiede nel fatto che, oltre ad essere distruttivo, occorre trasportare il fascio in un certo luogo dove

sono disponibili il magnete (in genere di grosse dimensioni) e le varie apparecchiature. Si richiede quindi tutta una linea di estrazione del fascio riservata a questo scopo. Inoltre, le dimensioni fisiche del magnete, la precisione dell'alimentazione dello stesso, ecc. ne limitano l'impiego nelle alte energie.

Fra i metodi non distruttivi, per fasci continui (*) (quindi non in fase di accelerazione e vedremo successivamente cosa tutto ciò significhi) abbiamo il cosiddetto "Schottky scan".

In sostanza questa misura consiste nell'osservazione del segnale di una "pick-up a larga banda" (**) tramite un analizzatore di spettro. Ogni particella circolante nella macchina induce sulla "pick-up" una serie di picchi di tensione la frequenza dei quali corrisponde alla frequenza di rotazione della particella; questa frequenza di rotazione a sua volta dipende direttamente dall'energia. Questi impulsi, osservati all'analizzatore di spettro, appariranno come tante righe, corrispondenti a frequenze armoniche di quella di rotazione. Se ora consideriamo l'insieme di tutte le particelle del fascio, non avendo tutte la stessa energia e quindi la stessa frequenza di rotazione, avremo che le righe risulteranno "allargate". Questo allargamento Δf di una riga alla frequenza f sarà proporzionale alla dispersione della quantità di moto secondo la (v. Bibl. 1) :

$$\frac{\Delta B}{B} = \gamma_t^2 \frac{\Delta f}{f} + \frac{\gamma^2 - \gamma_t^2}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p}$$

(*) Distinguiamo qui i fasci continui da quelli costituiti da serie di pacchetti (o "bunches") di particelle. Vedremo successivamente che un fascio continuo non può essere in fase di accelerazione ovvero deve per forza circolare ad energia costante quindi a campo magnetico costante nell'acceleratore.

(**) Una "pick-up" consiste in due elettrodi collocati in un

dove $\gamma = E/E_0$; $E_0 = m_0 c^2$; γ_c è una costante funzione dell'acceleratore utilizzato ($\gamma_c \approx 6$ nel CPS) ; $dB = 0$ (come abbiamo già detto il campo magnetico è costante perchè non vi è accelerazione) allora

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma^2 \gamma_c^2}{\gamma_c^2 - \gamma^2} \frac{df}{f}$$

indicando

$$Z = \frac{1}{\gamma_c^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

avremo

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{1}{Z} \frac{df}{f} \quad (1)$$

Il grande vantaggio di questo metodo risiede nella semplicità delle apparecchiature e dell'esecuzione della misura.

I suoi inconvenienti derivano dal fatto che spesso il segnale è molto debole e mescolato al rumore di fondo, quindi l'interpretazione dei risultati può apparire difficoltosa, soprattutto per misure dettagliate. L'errore di misura si aggira sul 10÷20%.

Un secondo metodo non distruttivo per la misura del dE/E e della distribuzione in energia di un fascio continuo e la cui analisi costituisce lo scopo della presente tesi, dicesi metodo dello "scanning bucket" .

certo punto dell'acceleratore. Fra i due elettrodi circola il fascio di particelle che quindi inducono una tensione proporzionale alle variazioni della loro densità istantanea. Dicesi "pick-up a larga banda", quella "pick-up" che per particolari accorgimenti costruttivi permette la visualizzazione di segnali su una larga banda di frequenze (in generale da qualche KHz a diverse centinaia di MHz).

Vedremo successivamente come si effettua in dettaglio la misura, mentre possiamo già anticipare i vantaggi e gli inconvenienti.

Questi ultimi sono soprattutto dovuti alla mole ed alla complessità delle apparecchiature necessarie, sia dal punto di vista operativo che dal punto di vista costruttivo.

I vantaggi invece sono evidenti alla luce dei risultati ottenuti : infatti la distribuzione in dp/p del fascio appare chiaramente anche nei più piccoli dettagli ed il rilevamento di questi dati può ritenersi estremamente preciso (dell'ordine dell'uno%). Prima di descrivere il metodo pratico ed i risultati sperimentali ottenuti, introduciamo, al fine di rendere chiari i concetti alla base di questa misura, ciò che in genere si indica come la "teoria dell'accelerazione a radiofrequenza " .

2-TEORIA DELL'ACCELERAZIONE A RADIOFREQUENZA IN UN ACCELERATORE CIRCOLARE . (*)

2-1 Il campo acceleratore

Nel corso di questo studio adotteremo le due semplificazioni seguenti:

1) le particelle si muovono sulla loro orbita di equilibrio (direzione dell'asse x) senza alcun moto trasverso. Ciò equivale a dire che si considerano i moti trasversali e longitudinali completamente disaccoppiati.

2) si trascura completamente il tempo di transito, o meglio si considera molto piccola, rispetto alla lunghezza dell'orbita, la distanza fra gli elettrodi della cavità.

Chiamando $V \sin \omega t$ la tensione radiofrequenza (RF) applicata alla cavità ($\frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza di questa tensione con $\omega = \omega(t)$), l'energia acquistata dalla particella ad ogni passaggio vale:

$$\delta E = q V \sin \omega t \quad (2)$$

Il campo acceleratore $\mathcal{E}$ lungo l'orbita può essere considerato come una successione di picchi corrispondenti ai passaggi della particella attraverso la cavità (v. Fig. 1)

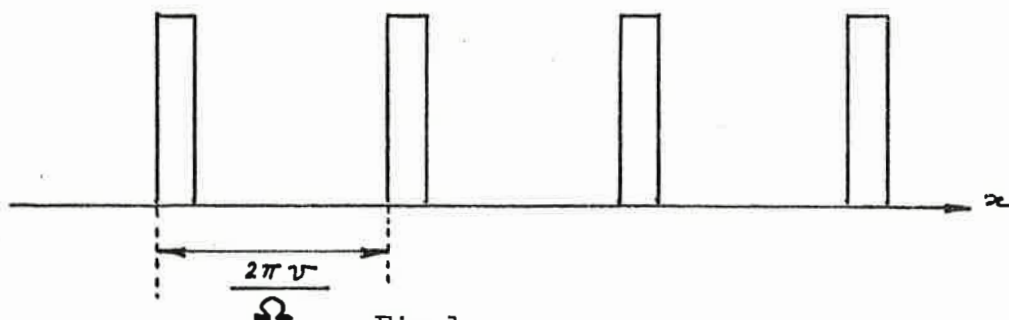


Fig. 1

.....

(*) Gran parte di questi risultati sono stati ricavati specialmente dalla Bibliografia 5 , 8 , 3 .

Chiamando v la velocità tangenziale della particella, Ω la sua velocità angolare, avremo che la distanza fra un picco e l'altro varrà $\frac{2\pi}{\Omega} v$.

Questo andamento può essere descritto, utilizzando la funzione di Dirac (v. Appendice A), mediante l'espressione:

$$E(x, t) = V \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - k \frac{2\pi v}{\Omega}\right) \sin \omega t \quad (3)$$

Che è infatti una funzione periodica in x con periodo $= \frac{2\pi}{\Omega} v$. Analizzando la (3) col metodo di Fourier (v. Appendice B) otteniamo:

$$E(x, t) = V \frac{\Omega}{2\pi v} \left(1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \cos \frac{h\Omega x}{v} \right) \sin \omega t \quad (4)$$

utilizzando l'identità

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

otteniamo

$$E(x, t) = V \frac{\Omega}{2\pi v} \left[\sin \omega t + \sum_{h=1}^{\infty} \sin\left(\omega t - \frac{h\Omega x}{v}\right) + \sum_{h=1}^{\infty} \sin\left(\omega t + \frac{h\Omega x}{v}\right) \right] \quad (5)$$

Il primo termine della parentesi quadra rappresenta un'onda stazionaria, il secondo un insieme di onde in una certa direzione, il terzo un insieme di onde nella direzione opposta.

Scrivendo la (5) in una forma più compatta

$$E(x, t) = V \frac{\Omega}{2\pi v} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sin\left(\omega t - \frac{h\Omega x}{v}\right) \quad (6)$$

L'ammontare di energia raccolto dalla particella

$$E = \int c E(x, t) dx \quad (7)$$

riceverà dei contributi apprezzabili solo da quei termini in (6) che non sono oscillanti (nel tempo) molto rapidamente (il loro effetto è in media uguale a zero).

Supponendo ora che valga la

$$\omega = h \Omega \quad (8)$$

il termine $\sin(\omega t - \frac{h \Omega x}{v})$ sarà costante e gli altri termini saranno oscillanti rapidamente, quindi:

$$\varepsilon(x, t) = V \frac{\Omega}{2\pi v} \sin(\omega t - \frac{h \Omega x}{v}) \quad (9)$$

$$E = \int e V \frac{\Omega}{2\pi v} \sin(\omega t - \frac{h \Omega x}{v}) dx \quad (10)$$

che nella variabile tempo, essendo $v = \frac{dx}{dt}$

$$E = \int e V \frac{\Omega}{2\pi} \sin(\omega t - \frac{h \Omega x}{v}) dt \quad (11)$$

indicando con

$$\varphi = \omega t - \frac{h \Omega x}{v}$$

e derivando rispetto al tempo:

$$\dot{\varphi} = \omega - h \Omega \quad (12)$$

$$\dot{E} = e V \frac{\Omega}{2\pi} \sin \varphi \quad (13)$$

2-2 Le equazioni del moto

Alla luce delle considerazioni precedenti cerchiamo ora di ricavare le equazioni del moto di una particella circolante nello acceleratore.

Dall'Elettrodinamica classica per una particella di velocità $\vec{v}$

sottoposta all'azione di un campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}_e$ e di un campo magnetico $\vec{B}$:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e \vec{\mathcal{E}}_e + e (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (14)$$

in coordinate cilindriche:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 = e \mathcal{E}_r + e r \dot{\theta} B_z - e \dot{z} B_\theta \quad (15a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = e \mathcal{E}_\theta + e \dot{z} B_z - e \dot{r} B_z \quad (15b)$$

$$\frac{d}{dt}(m \dot{z}) = e \mathcal{E}_z + e \dot{r} B_\theta - e r \dot{\theta} B_r \quad (15c)$$

Se $B_r = 0$ e sapendo che la quantità di moto p di una particella circolante su un'orbita di raggio r in un campo magnetico $B = -B_z$ è data da

$$p = e r B \quad (16)$$

$$\frac{\dot{r} p}{r} = e \dot{r} B \quad (17)$$

la (15b) diventa :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r p) = \dot{p} + \frac{\dot{r} p}{r} = e \mathcal{E}_\theta - e \dot{r} B_z \quad (18)$$

sostituendo la (17) nella (18) e semplificando, otteniamo:

$$\dot{p} = e \mathcal{E}_\theta = e \mathcal{E}(r, t) + e \mathcal{E}' \quad (19)$$

dove

$$\mathcal{E}_\theta = \mathcal{E}(r, t) + \mathcal{E}' \quad (20)$$

cioè il campo acceleratore $\mathcal{E}_\theta$ è la somma del campo generato dalla cavità acceleratrice RF (v. formula (9)) ed $\mathcal{E}'$. Questo termine $\mathcal{E}'$ comprende tutti gli altri campi acceleratori o deceleratori, come ad esempio i campi indotti dalle variazioni

del campo magnetico rispetto al tempo cioè i campi "betatronici" e le perdite di energia per effetto di emissione di radiazioni elettromagnetiche. Trascurando, nel caso di accelerazione di protoni, questi ultimi, ed essendo i campi betatronici dati dalla:

$$\oint \mathcal{E}' d\ell = - \frac{d\phi}{dt} = \int \frac{\partial B}{\partial t} 2\pi r dr$$

cioè

$$\mathcal{E}' 2\pi r = \int \frac{\partial B}{\partial t} 2\pi r dr \quad (21)$$

sostituendo nella (19) :

$$r\dot{p} = \frac{eV}{2\pi} \sin\varphi + e \int \frac{\partial B}{\partial t} r dr \quad (22)$$

A questo punto definiamo la nozione di "particella sincrona".

La particella sincrona è quella particella per cui vale esattamente la (8), cioè la velocità angolare Ω_s della particella sincrona verifica la :

$$\Omega_s = \frac{\omega}{h} \quad (23)$$

in questo caso $\dot{\varphi} = 0$ e $\varphi = \text{costante} = \varphi_s$, inoltre per la (13) il guadagno di energia è costante e per un'orbita a raggio costante è proporzionale a $\dot{B}$.

Chiamando r_s e p_s il raggio e la quantità di moto della particella sincrona ed r e p il raggio e la quantità di moto di una particella qualsiasi del fascio, sarà :

$$r = r_s + \Delta r \quad (24a)$$

$$p = p_s + \Delta p \quad (24b)$$

con $\Delta r \ll r_s$ e $\Delta p \ll p_s$ tanto da essere considerati come differenziali. D'ora in poi il simbolo Δ si riferirà a scarti rispetto alla particella sincrona.

Sostituendo le (24) in (22) :

$$(r_s + \Delta r)(\dot{p}_s + \Delta \dot{p}) = \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi + e \int \frac{\partial B}{\partial t} r dr \quad (25)$$

essendo

$$r_s \dot{p}_s = \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi_s + e \int_0^{r_s} \frac{\partial B}{\partial t} r dr \quad (26)$$

sviluppando il prodotto, sostituendo (26) in (25) e trascurando i differenziali di secondo ordine:

$$\begin{aligned} \Delta r \dot{p}_s + r_s \Delta \dot{p} &= \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) + e \frac{\partial B}{\partial t} \left[\int r dr - \int_0^{r_s} r dr \right] \\ &= \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) + e \frac{\partial B}{\partial t} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r_s^2}{2} \right] \end{aligned}$$

trascurando ancora il differenziale del secondo ordine $\Delta^2 r$:

$$\Delta r \dot{p}_s + r_s \Delta \dot{p} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) + e \frac{\partial B}{\partial t} r_s \Delta r \quad (27)$$

dalla relazione fondamentale :

$$p_s = e B r_s$$

ricaviamo

$$\dot{p}_s = e \dot{B} r_s + e B \dot{r}_s$$

che sostituita nella (27) e semplificando :

$$\Delta r e B \dot{r}_s + r_s \Delta \dot{p} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s)$$

sostituendo a Δr il suo valore $\Delta r = r - r_s$

$$e B \dot{r}_s r - e B \dot{r}_s r_s + r_s \Delta \dot{p} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s)$$

cioè

$$p \dot{r}_s - p_s \dot{r}_s + r_s \Delta \dot{p} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \quad (28)$$

Calcoliamo ora la derivata:

$$\frac{d}{dt} (r \Delta p) = \frac{d}{dt} (r_s + \Delta p + \Delta r \Delta p)$$

trascurando come al solito il differenziale del secondo ordine $\Delta r \Delta p$:

$$\frac{d}{dt} (r \Delta p) = \dot{r}_s \Delta p + r_s \Delta \dot{p}$$

ricordando che $\Delta p = p - p_s$

$$\frac{d}{dt} (r \Delta p) = \dot{r}_s p - \dot{r}_s p_s + r_s \Delta \dot{p}$$

quindi sostituendo in (28) :

$$\frac{d}{dt} (r \Delta p) = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \quad (29)$$

inoltre dalla Relatività classica sappiamo che:

$$\Delta p = \frac{1}{c\beta} \Delta E \quad \beta = \frac{v}{c}$$

e

$$\frac{1}{c\beta} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\Omega r}$$

sostituendo in (29) otteniamo finalmente:

$$\frac{d}{dt} (r \Delta p) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\Omega} \right) = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \quad (30)$$

A questo punto introduciamo una nuova variabile definita come:

$$\Delta W = \frac{\Delta E}{\Omega} \quad (31)$$

cioè

$$W = \int \frac{dE}{\Omega} \quad (\text{ricordiamo che } \Omega = \Omega(E))$$

chiameremo dunque:

$$\dot{W}_s = \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi_s \quad (32)$$

e

$$\dot{W} = \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi \quad (33)$$

quindi

$$\Delta \dot{W} = \dot{W} - \dot{W}_s \quad (34)$$

cioè

$$\Delta W = W - W_s \quad (35)$$

la (30) diventa quindi

$$\frac{d}{dt} (\Delta W) = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \quad (36a)$$

che insieme alla (12) :

$$\dot{\varphi} = \omega - \hbar \Omega \quad (36b)$$

costituisce la coppia delle equazioni del moto.

Queste equazioni sono canoniche e ne calcoleremo l'Hamiltoniana

$$H = H(\varphi, \Delta W, t)$$

avremo :

$$\frac{d}{dt}(\Delta W) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{eV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s)$$

quindi

$$H = \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi + \dot{W}_s \varphi + f_1(\Delta W, t) \quad (37)$$

inoltre

$$\dot{W}_s = \frac{dW(\Omega_s)}{dt} = \frac{dW}{d\Omega_s} \frac{d\Omega_s}{dt} = \frac{1}{\Omega'_s} \frac{\dot{\omega}}{h} \quad (38)$$

chiamando $\Omega'_s = \frac{d\Omega_s}{dW}$ e $\Omega_s = \frac{\omega}{h}$

sostituendo (38) in (37)

$$H = \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi + \frac{\dot{\omega}}{\Omega'_s h} \varphi + f_1(\Delta W, t) \quad (39)$$

abbiamo poi dalla (36b)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Delta W} = \omega - h \Omega \quad (40)$$

Al fine di integrare la precedente equazione, cerchiamo di esplicitarla meglio in funzione dei parametri dell'acceleratore.

Per prima cosa possiamo scrivere la (40) nella forma

$$\dot{\varphi} = -h \Delta \Omega \quad \text{con } \Delta \Omega = \Omega - \Omega_s$$

quindi essendo (v. Appendice C)

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\eta \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\dot{\varphi} = h \eta \frac{\Omega}{\rho} \Delta \rho$$

dalla Relatività (v. Bibl. 1)

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E}$$

perciò

$$\dot{\varphi} = \frac{\eta \hbar \Omega}{\beta} \frac{\Delta E}{E}$$

moltiplicando e dividendo per Ω :

$$\dot{\varphi} = \frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta^2 E} \frac{\Delta E}{\Omega} = \frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta^2 E} \Delta W \quad (41)$$

cerchiamo ancora di semplificare il termine $\frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta^2 E}$ moltiplicandolo e dividendolo per $\frac{dE}{E}$

$$\frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta^2 E} \frac{dE/E}{dE/E} = \frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta} \frac{dE}{E dE} \quad (42)$$

inoltre

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\eta \frac{dP}{P} = -\eta \frac{1}{\beta^2} \frac{dE}{E}$$

cioè

$$\frac{dE}{E} = -\frac{\beta^2}{\eta} \frac{d\Omega}{\Omega}$$

che sostituita in (42) ci da :

$$-\frac{\eta \hbar \Omega^2}{\beta^2} \frac{1}{dE} \cdot \frac{\beta^2}{\eta} \frac{d\Omega}{\Omega} = -\hbar \frac{d\Omega}{dE} \Omega = -\hbar \frac{d\Omega}{dW} = -\hbar \Omega' \quad (43)$$

la (41) diventa quindi

$$\dot{\varphi} = -\hbar \Omega' \Delta W = \frac{\partial H}{\partial \Delta W}$$

integrando

$$H = -\frac{\hbar}{2} \Omega' \Delta W^2 + f_2(\varphi, t) \quad (44)$$

confrontando la (39) e la (44) otteniamo finalmente l'espressione dell'Hamiltoniana :

$$H(\varphi, \Delta W, t) = -\frac{\hbar}{2} \Omega' \Delta W^2 + \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi + \frac{\dot{\omega}}{\Omega' \hbar} \varphi \quad (45)$$

Se ora consideriamo $\omega = \omega(t)$ come funzione lineare del tempo t quindi $\dot{\omega} = \text{costante}$, $V = \text{costante}$ e $\Omega' = \text{costante}^{(*)}$ ne segue che l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo ed è quindi una costante del moto.

Potremo perciò scrivere :

$$H(\varphi, \Delta W) = -\frac{\hbar}{2} \Omega' \Delta W^2 + \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi + \frac{\dot{\omega}}{\Omega' \hbar} \varphi = \text{costante} \quad (46)$$

Cerchiamo ora di semplificare la forma di questa Hamiltoniana.

Per cominciare moltiplicheremo la variabile ΔW per la costante $\sqrt{\frac{2\pi \hbar \Omega'}{eV}}$ (ciò equivale a variare la calibrazione della scala delle ordinate in un diagramma $\varphi, \Delta W$) e chiameremo questa nuova variabile : y , cioè :

$$y = \sqrt{\frac{2\pi \hbar \Omega'}{eV}} \Delta W \quad (47)$$

sostituendo in (46) e dividendo per $\frac{eV}{2\pi}$:

$$H = -\frac{1}{2} y^2 + \cos \varphi + \frac{2\pi \dot{\omega}}{eV \Omega' \hbar} \varphi$$

indicando ancora la costante $\frac{2\pi \dot{\omega}}{eV \Omega' \hbar}$ con Γ , cioè :

$$\Gamma = \frac{2\pi \dot{\omega}}{eV \Omega' \hbar} \quad (48)$$

(notiamo che Γ è direttamente proporzionale a $\dot{\omega}$ che è il tasso di accelerazione) otteniamo finalmente :

.....

(*) Queste approssimazioni sono perfettamente valide negli acceleratori per ampi intervalli di tempo e di energia, salvo il caso in cui ci si trovi vicino all'energia di transizione ($E_t \approx 5.7$ GeV nel CPS, v. Appendice C), per una trattazione di questo caso particolare v. Bibl. 3.

$$r \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{2} y^2 = H = \text{costante} \quad (49)$$

La (49) ci definisce una famiglia di traiettorie nel piano delle fasi (φ, y) con H come parametro.

Vedremo ora di studiare questa famiglia di curve.

Prima di tutto da ora considereremo solo il valore assoluto di r dato da

$$r = \frac{2\pi |\dot{\omega}|}{e V h |\Omega'|} \quad (50)$$

a seconda dei casi poi attribuiremo i segni corrispondenti a $\dot{\omega}$ e Ω' ($\Omega' > 0$ per $E < E_t$ e $\Omega' < 0$ per $E > E_t$ mentre $\dot{\omega} > 0$ per accelerazione e $\dot{\omega} < 0$ per decelerazione (v. Appendice C)). Differenziamo la (49)

$$\begin{aligned} r d\varphi - \sin \varphi d\varphi - y dy &= 0 \\ (r - \sin \varphi) d\varphi - y dy &= 0 \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{r - \sin \varphi}{y}$$

i valori di φ e y per cui $\frac{dy}{d\varphi}$ è indefinita ci forniscono i punti nodali (o singolari) delle curve, quindi per questi punti :

$$\begin{cases} \sin \varphi = r \\ y = 0 \end{cases}$$

distinguiamo tre casi :

1) $0 < \Gamma < 1$

due punti nodali $(\varphi_1, 0), (\varphi_2, 0)$

notiamo che quindi $\sin \varphi_1 = \Gamma$

2) $\Gamma = 0$

due punti nodali $(0, 0), (\pi, 0)$

3) $\Gamma > 1$

nessun punto nodale

Possiamo ora tracciare tre famiglie di curve per tre casi tipici corrispondenti a $\Gamma = 0.5$; $\Gamma = 0$; $\Gamma = 1$ (v.Fig. 2, 3 e 4) .

Osservando queste traiettorie nel piano delle fasi, per esempio nel caso di $\Gamma = 0.5$ (v.Fig. 2), notiamo che a seconda dei valori di H, cioè delle condizioni iniziali della particella, essendo :

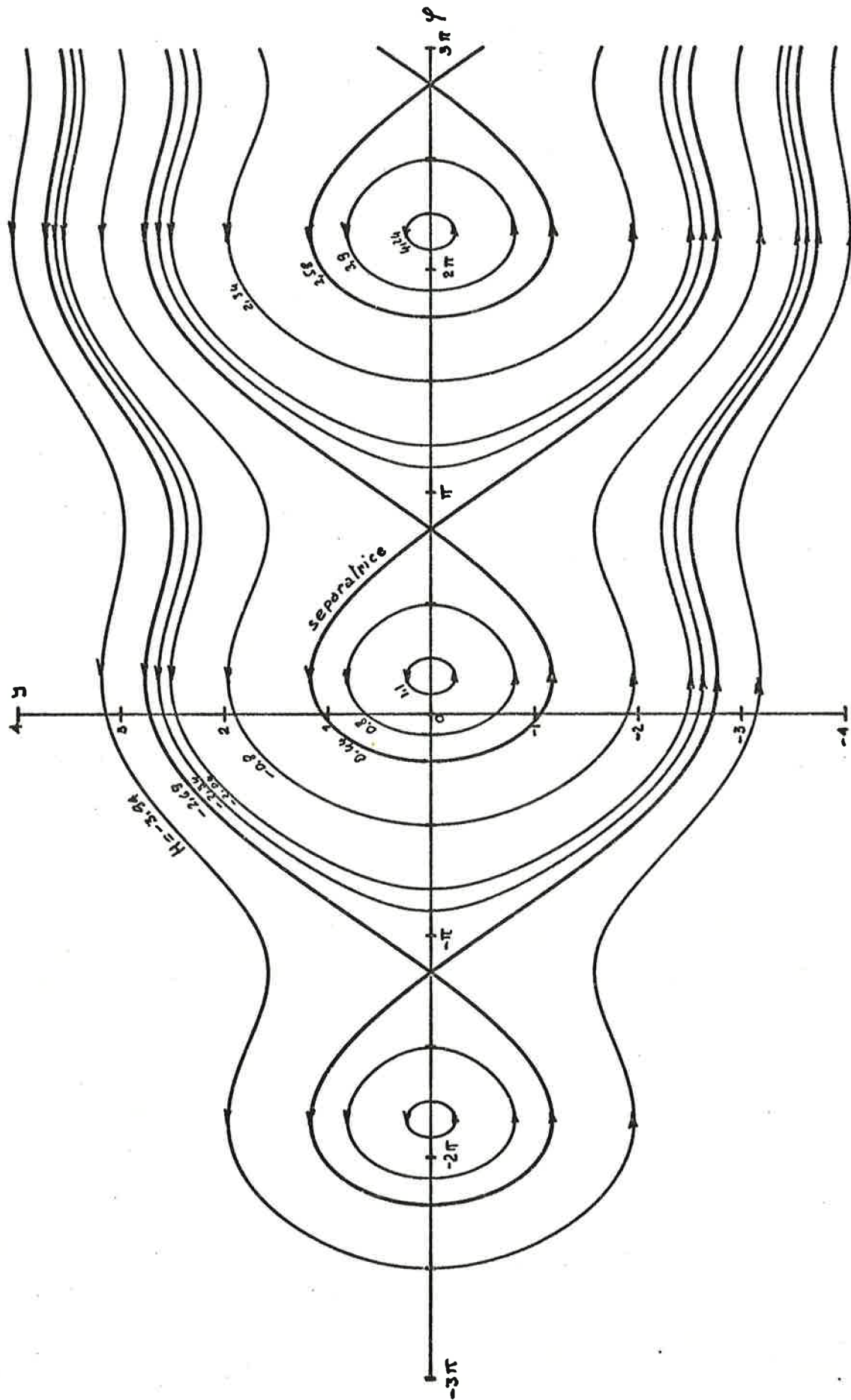
$$H(\varphi, \Delta W) = \text{costante} = H(\varphi_0, \Delta W_0)$$

vi sono due famiglie di traiettorie, la prima costituita da traiettorie tutte esterne, la seconda costituita da traiettorie tutte interne ad una superficie chiusa limitata da una traiettoria particolare chiamata appunto "separatrice".

L'espressione della separatrice è data ovviamente da :

$$\Gamma \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{2} y^2 = H = \Gamma \varphi_1 + \cos \varphi_1 \quad (51)$$

La particella le cui condizioni iniziali corrispondono ad una traiettoria interna alla separatrice sarà "catturata" dalla radiofrequenza. Questa particella verrà quindi accelerata (ricordiamo che il tasso di accelerazione è proporzionale a $\dot{\omega}$ e quindi per la (48) a Γ) ed eseguirà, nel corso dell'accelerazione, oscil-



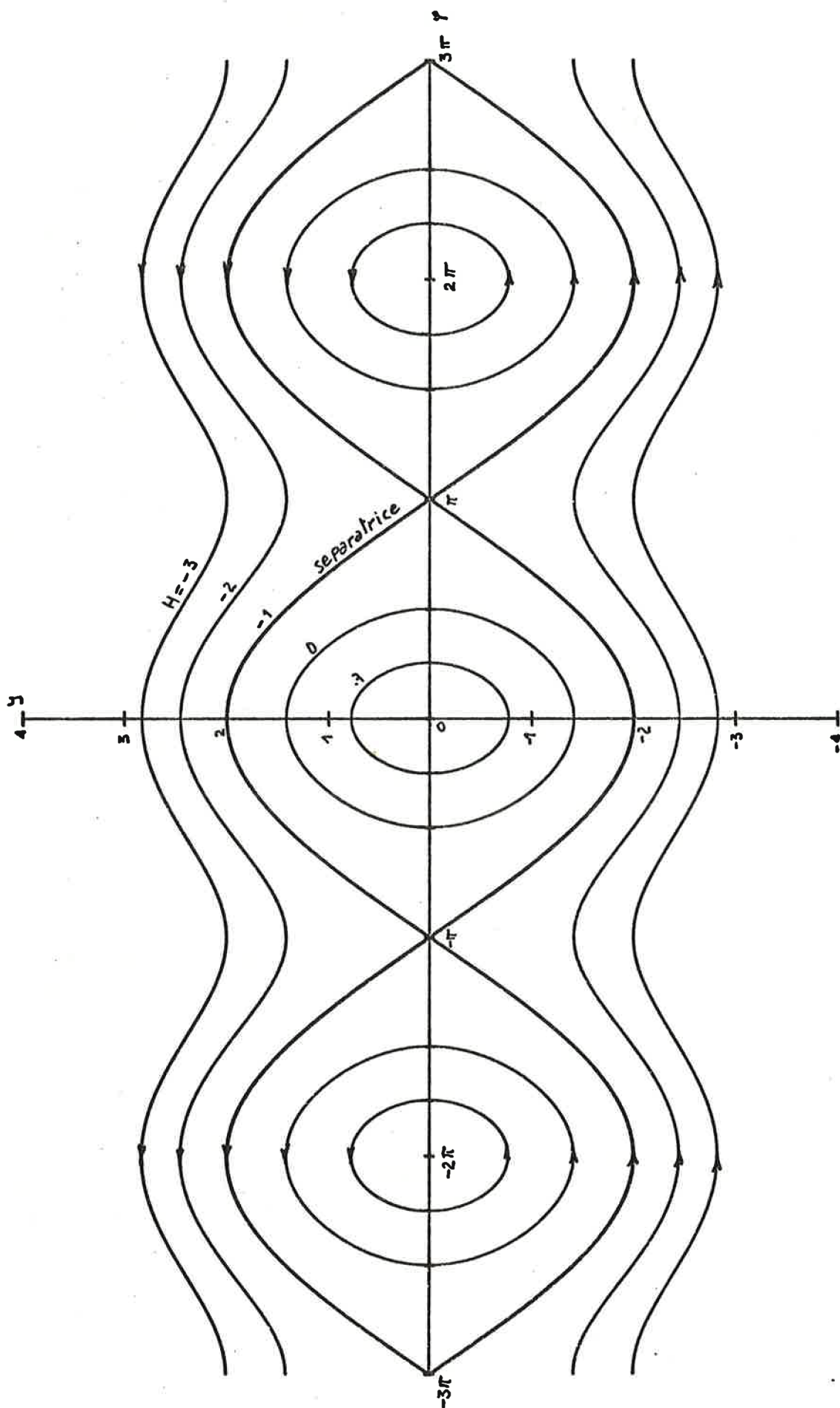


Fig.3 - Traiettorie di particelle nel piano delle fasi (ψ, y) con $\mathcal{P} = 0$ e diversi valori di H . La separatrice delimita un "bucket" stazionario.

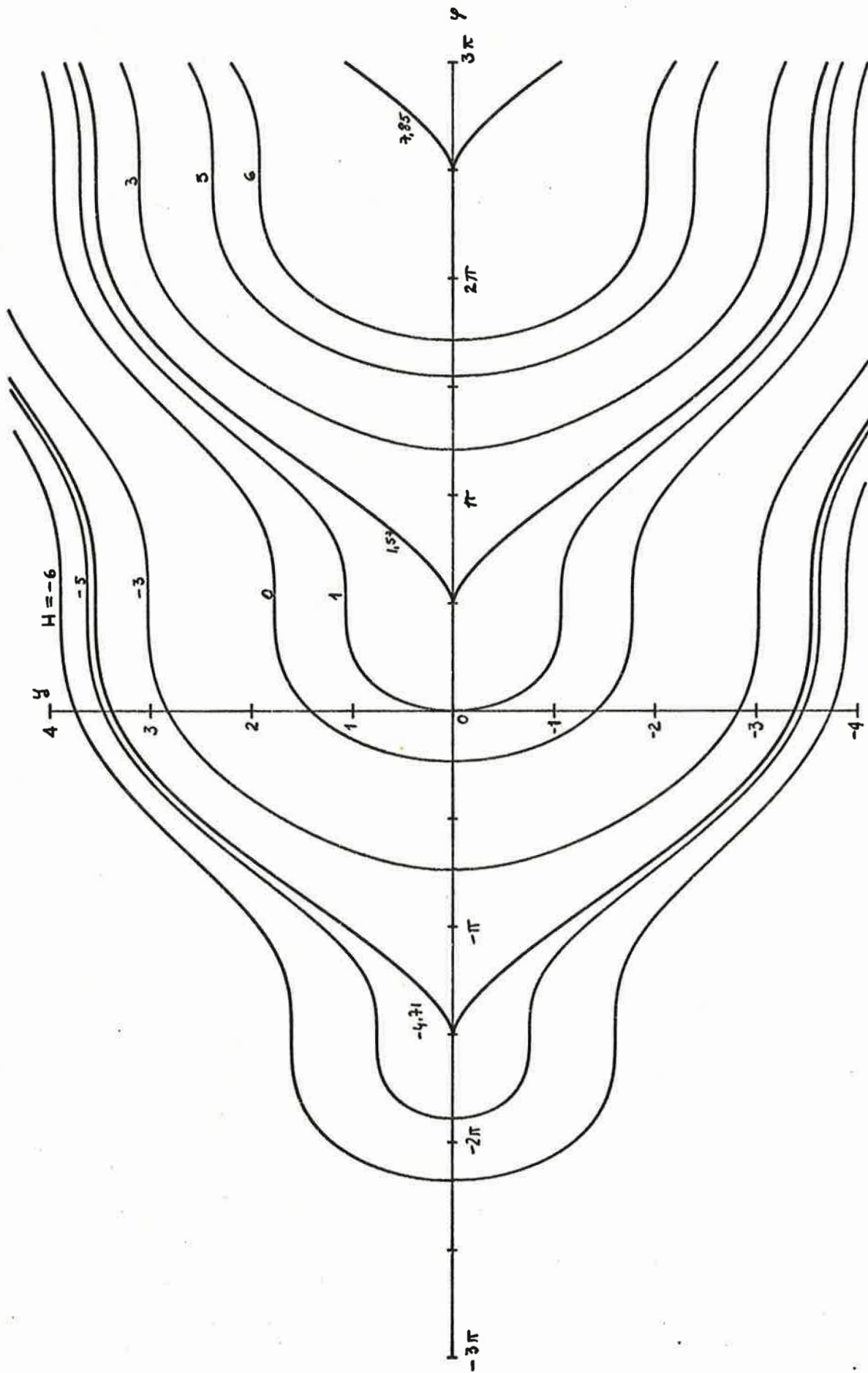


Fig.4 - Traiettorie di particelle nel piano delle fasi (φ, y) con $\sqrt{r} = 1$ e diversi valori di H . In questo caso il "bucket" si riduce ad un punto e quindi non ha senso parlare di separatrice.

lazioni di fase (dette anche "oscillazioni sincrotroniche") attorno alla particella sincrona di coordinate $(\varphi_s, 0)$, che ovviamente non oscilla.

La particella le cui condizioni iniziali, invece, giacciono su una traiettoria esterna si allontanerà sempre più dalla particella sincrona, non sarà quindi "catturata" nè, quindi, accelerata.

La superficie interna alla separatrice si indica in genere col nome di "bucket".

Il "bucket" è quindi, in poche parole, quella superficie nel piano delle fasi $(\varphi, \Delta W)$ che può contenere^(*) le particelle suscettibili di essere accelerate.

La sua forma e la sua superficie dipendono esclusivamente (lo calcoleremo poi) dal parametro Γ , detto appunto "parametro di bucket".

Riassumendo : lo spazio delle fasi può essere considerato come un fluido che scorre all'interno ed intorno al "bucket" impermeabile.

Per il teorema di Liouville (v. Bibl. 11) questo fluido di fase è incompressibile. Il fluido di fase interno al "bucket" è catturato ed è obbligato a stare nelle vicinanze della particella sincrona nel punto nodale stabile.

Se poi noi abbandoniamo la scala relativa dell'energia, il "bucket" contenente le particelle accelerate può essere considerato come se stesse muovendosi verso l'alto in una scala di valori
.....

(*) Può anche, ovviamente, non contenere alcuna particella o solo un certo numero. In ogni caso le particelle che si trovano all'interno costituiscono ciò che si chiama in genere un "pacchetto" (o "bunch").

assoluti di energia attraversando così un fluido di fase circostante.

Quando il "bucket" attraversa questo fluido, quest'ultimo dovrà spostarsi verso il basso della scala delle energie assolute.

Vedremo successivamente che questo è il principio essenziale su cui si basa la nostra misura di dispersione di energia.

Per ora ricaviamo alcune formule riguardanti il "bucket" con

$$r < 1.$$

Calcolo del valore y_{max} della separatrice^(*):

per $\varphi = \varphi_s$, essendo $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ vi è un massimo sulla curva, la (49) quindi diventa :

$$r \varphi_s + \cos \varphi_s - \frac{1}{2} y_{max}^2 = r \varphi_i + \cos \varphi_i \quad (52)$$

con

$$\sin \varphi_s = \sin \varphi_i = r$$

e quindi

$$\cos \varphi_s = \sqrt{1 - r^2}$$

$$\cos \varphi_i = -\sqrt{1 - r^2}$$

sostituendo in (52) :

$$y_{max} = \left\{ -2r \left[\arccos(-\sqrt{1-r^2}) - \arccos \sqrt{1-r^2} \right] + 4\sqrt{1-r^2} \right\}^{1/2} \quad (53)$$

.....

(*) Osserviamo che per un "bucket" completamente riempito di particelle il valore $2y_{max}$ fornisce direttamente una misura della dispersione di energia di un fascio nel corso dell'accelerazione.

2-3 Calcolo dell'area del "bucket".

Lo scopo fondamentale dell'accelerazione radiofrequenza è di portare quanto più spazio di fase possibile (cioè lo spazio interno al "bucket") per unità di tempo dall'energia di iniezione all'energia finale.

In poche parole i "buckets" devono essere grandi e numerosi.

La loro area corrisponde ovviamente al doppio dell'area fra l'asse φ e la separatrice la cui espressione vale :

$$r \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 = r \varphi_i + \cos \varphi_i$$

esplicitando

$$\varphi = \sqrt{2} \sqrt{r(\varphi - \varphi_i) + \cos \varphi - \cos \varphi_i}$$

l'area, perciò, varrà :

$$\alpha(r) = 2\sqrt{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_i} \sqrt{r(\varphi - \varphi_i) + \cos \varphi - \cos \varphi_i} d\varphi \quad (54)$$

dove φ_1 è dato dalla :

$$r \varphi_1 + \cos \varphi_1 = r \varphi_i + \cos \varphi_i = r \arccos(-\sqrt{1-r^2}) - \sqrt{1-r^2} \quad (55)$$

nel caso di un "bucket stazionario" (*):

$$r = 0 \quad , \quad \varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_i = -\pi \quad , \quad \varphi_i = \pi$$

.....

(*) Si definisce "bucket stazionario" quel "bucket" che corrisponde a $r = 0$ (v. Fig. 3) ovvero a $\dot{\omega} = 0$, cioè : assenza di accelerazione (e di decelerazione). Questa condizione è verificata quando il campo magnetico è costante e quindi il fascio, pur sempre raggruppato, circola ad energia costante.

quindi

$$\begin{aligned} a(0) &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi}^{+\pi} -\sqrt{1+\cos\varphi} \, d\varphi \\ &= -4 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = -16 \end{aligned}$$

in valore assoluto (è un'area) :

$$|a(0)| = 16 \quad (56)$$

Ritornando alle coordinate originali : $\varphi, \Delta W$ (v.formula (48))
ricaviamo l'area in funzione di queste coordinate indicandola
con $A(r)$:

$$A(r) = \sqrt{\frac{eV}{2\pi \hbar \Omega'}} \cdot |a(r)| \quad (57)$$

quindi

$$A(0) = 16 \sqrt{\frac{eV}{2\pi \hbar \Omega'}}$$

e possiamo perciò scrivere

$$A(r) = A(0) \cdot \alpha(r) \quad (58)$$

dove

$$\alpha(r) = \frac{\sqrt{2}}{8} \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \sqrt{r(\varphi - \varphi_i) + \cos\varphi - \cos\varphi_i} \, d\varphi \quad (59)$$

il grafico di $\alpha(r)$ è rappresentato in Fig.5 .

I quattro parametri $\dot{\omega}$, V , $\hbar$ e Ω' devono essere ottimizzati,
in un acceleratore, in modo da accelerare il maggior numero di
particelle. Il parametro $\dot{\omega}$, per esempio, deve essere relativa-
mente elevato affinché il processo di accelerazione sia relati-
vamente rapido, in compenso se il valore di $\dot{\omega}$ è elevato, r sa-
rà grande ed avremo piccoli "buckets".

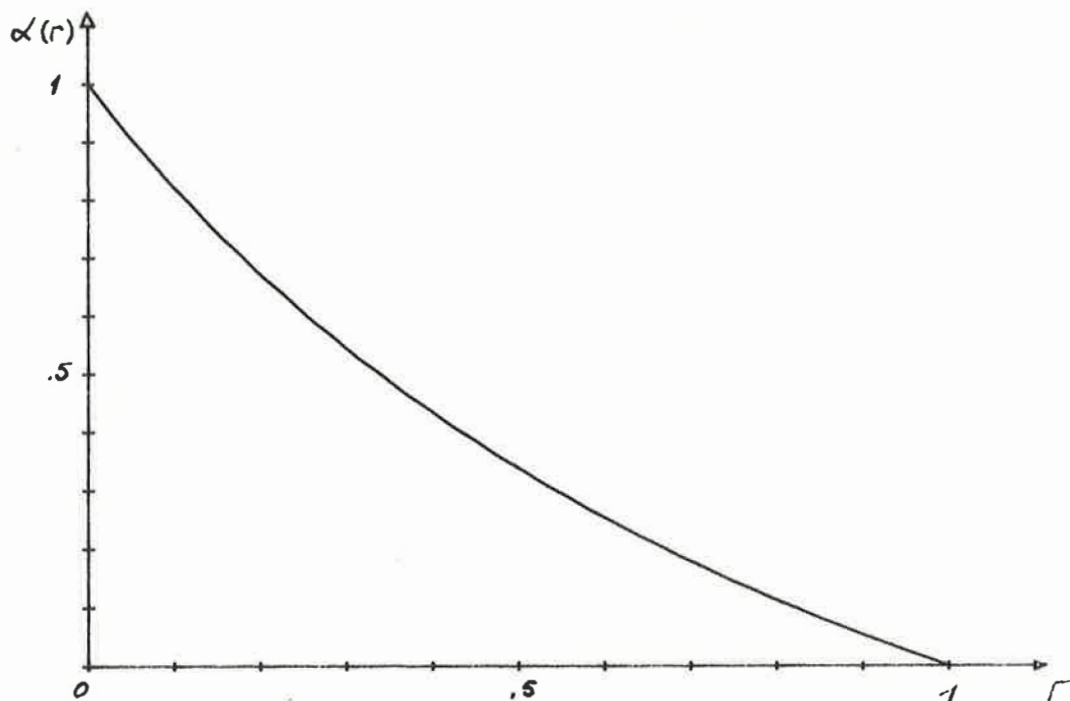


Fig.5

2-4 Le particelle instabili

Consideriamo ora il caso che più ci interessa per lo sviluppo di questo studio. Supponiamo, per cominciare, di avere accelerato un fascio di particelle fino ad una certa energia E_0 , raggiunta questa energia si arresta il processo di accelerazione rendendo costante il campo magnetico B ($\dot{B} = 0$, $\dot{\omega} = 0$, $\dot{r} = 0$). A questo punto, al fine di ottenere un fascio continuo (fino ad ora erano presenti h pacchetti) si abbassa fino a raggiungere il valore zero la tensione radiofrequenza^(*).

Siamo ora in presenza di un fascio continuo di particelle cir-

.....

(*) Questo procedimento di rendere continuo un fascio di particelle, è molto corrente nell'utilizzazione degli acceleratori di particelle (per esempio : l'estrazione lenta di particelle per esperienze con contatori) (v. Appendice F) .

colanti aventi una certa dispersione di energia attorno al valore costante E_0 .

I valori estremi e la distribuzione di questa dispersione di energia dipendono sostanzialmente dai valori y_{max} prima di ridurre a zero la radiofrequenza, dal come si riduce la radiofrequenza, dal numero delle particelle (entrano qui in gioco fenomeni dovuti alla carica spaziale e alle impedenze di accoppiamento), ecc. ecc.

Nello spazio delle fasi questo fascio continuo è rappresentato da un rettangolo di base 2π ed altezza uguale alla dispersione di energia dE/E .

Vediamo cosa accade se attraversiamo questo rettangolo nello spazio delle fasi con un "bucket" generato da una tensione radiofrequenza di frequenza variabile linearmente da un minimo ad un massimo con $\omega_{min} \ll \omega \ll \omega_{max}$ ($\omega = h\Omega$).

Le particelle essendo all'esterno dei "bucket" si trovano su traiettorie instabili.

Per lo sviluppo di questa teoria la variabile $\mathcal{W}$, invece di $\Delta \mathcal{W}$, è quella che più si addice dato che consideriamo particelle ad energia fissa.

Ricordando che

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_s + \Delta \mathcal{W} \quad (60)$$

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi \quad (61)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \Delta W} = -h \Omega' \Delta W \quad (62)$$

quindi

$$\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\dot{W}}{\dot{\varphi}} = \frac{eV}{2\pi h \Omega'} \frac{\sin \varphi}{\Delta W} \quad (63)$$

conglobando le diverse costanti in una sola ponendo :

$$W = \sqrt{\frac{eV}{2\pi h \Omega'}} \cdot z$$

avremo, ricordando la (47) :

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{eV}{2\pi h \Omega'}}} \frac{dW}{d\varphi} = \sqrt{\frac{eV}{2\pi h \Omega'}} \frac{\sin \varphi}{\Delta W} = \frac{\sin \varphi}{y} \quad (64)$$

Consideriamo ora una particella instabile che attraversa l'asse

φ in φ_0 . La sua traiettoria, naturalmente, è sempre determinata dall'equazione

$$\Gamma \varphi + \cos \varphi - \frac{1}{2} y^2 = \Gamma \varphi_0 + \cos \varphi_0 = \text{costante}$$

ricavando y :

$$y = \sqrt{2} \sqrt{\Gamma(\varphi - \varphi_0) + \cos \varphi - \cos \varphi_0}$$

sostituendo nella (64) ed integrando :

$$z - z_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2} \sqrt{\Gamma(\varphi - \varphi_0) + \cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi \quad (65)$$

questo integrale, calcolato mediante computer, fornisce una famiglia di curve, con φ_0 come parametro essendo Γ costante (v. Fig. 6).

Per queste curve le condizioni iniziali sono $\varphi = \varphi_0$ e $z = z_0$ e $t = 0$; cioè il riferimento, per quanto riguarda il tempo,

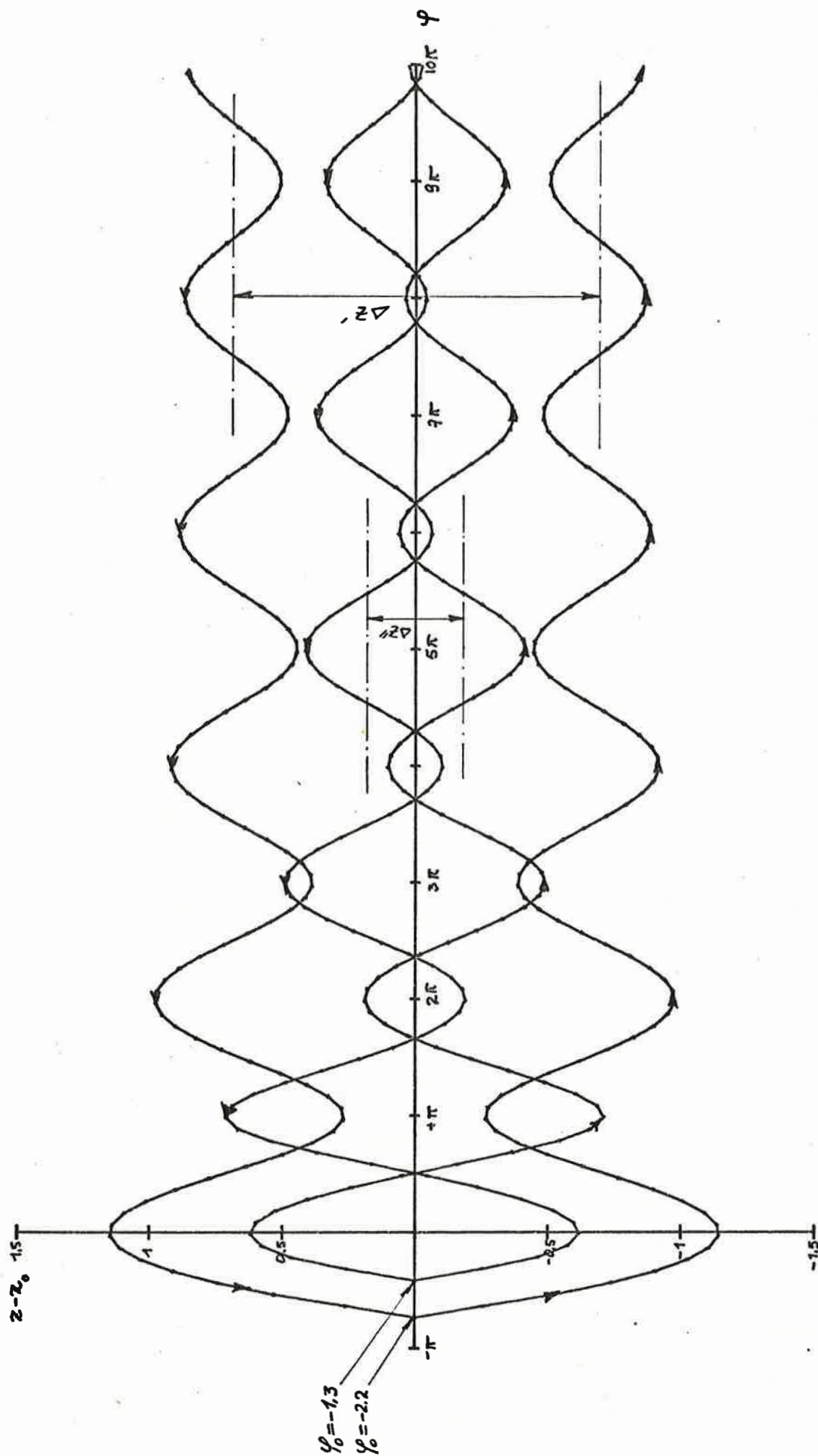


Fig. 6 - Due traiettorie (funzioni del parametro φ_0) nel piano delle fasi $(\lambda - \lambda_0, \varphi)$ durante il passaggio di un "bucket" con $\Gamma = 0.5$

è preso quando l'energia del "bucket" corrisponde a $z = z_0$.

Le particelle tendono a spostarsi verso le fasi decrescenti, infatti

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{\omega}{r}} \cdot y$$

e $y > 0$ (la particella ha un'energia più grande di quella corrispondente al "bucket").

Il "bucket" avvicinandosi alle particelle comincia ad agire su di esse facendogli compiere delle oscillazioni, fintanto che per $z = z_0$ la particella salta in energia al di sotto del "bucket" e dato che ora y è negativo la sua fase si muove verso valori positivi.

Continuando il "bucket" a muoversi verso valori sempre più grandi, il suo effetto sulle particelle svanisce piano piano e le oscillazioni delle particelle si smorzano totalmente.

Finito totalmente il fenomeno l'energia della particella si trova variata di :

$$\Delta z = -\sqrt{2} \int_{\varphi_0}^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{r(\varphi - \varphi_0) + \cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi \quad (66)$$

dato che la funzione è simmetrica rispetto all'asse φ .

Si può graficare Δz in funzione di φ_0 ottenendo la Fig.7 per

$r = 0.5$ e la Fig.8 per $r = 0.1$.

Si vede da questi grafici che la variazione di energia può essere negativa o positiva in funzione di φ_0 .

In particolare essa è positiva per valori di φ_0 molto vicini alla separatrice (cioè φ_0 molto vicino a φ_1 e φ_2).

Questo comportamento può essere spiegato fisicamente col fatto che essendo la frequenza sincrotronica molto bassa per le par-

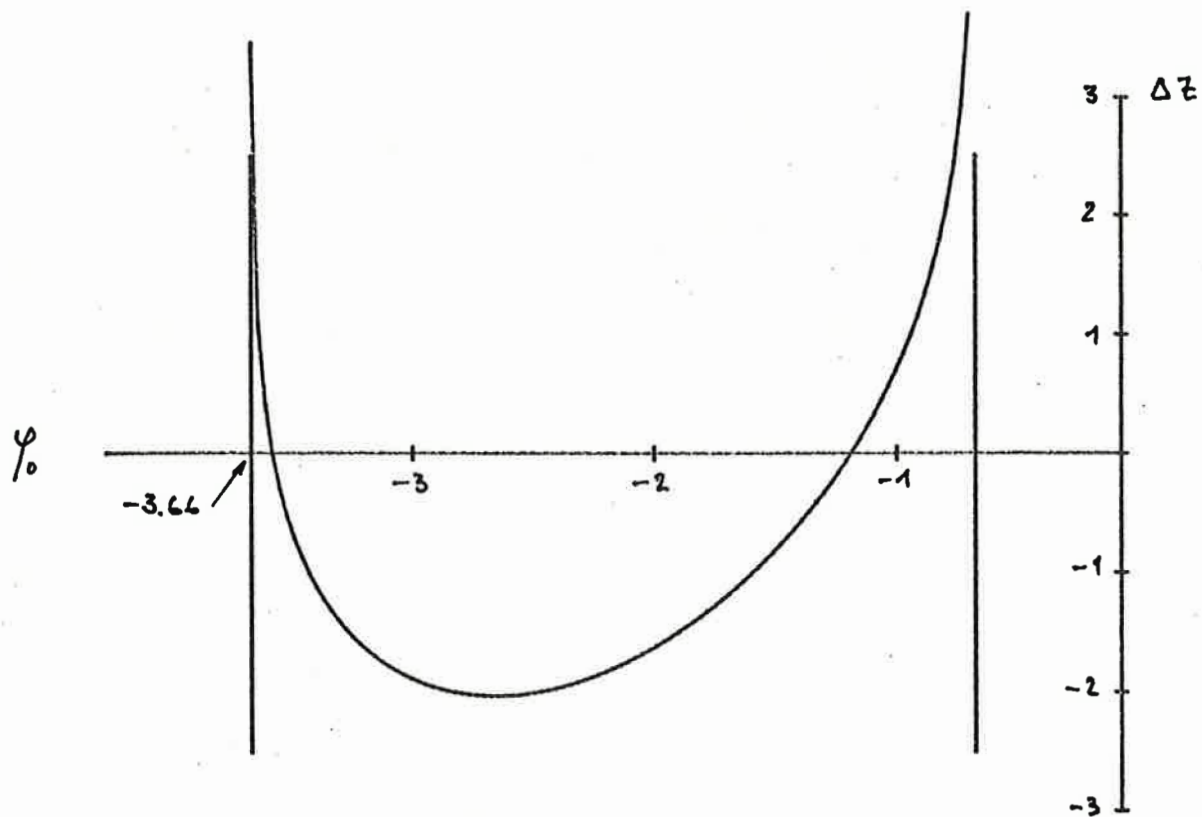


Fig. 7 $r = 0.5$

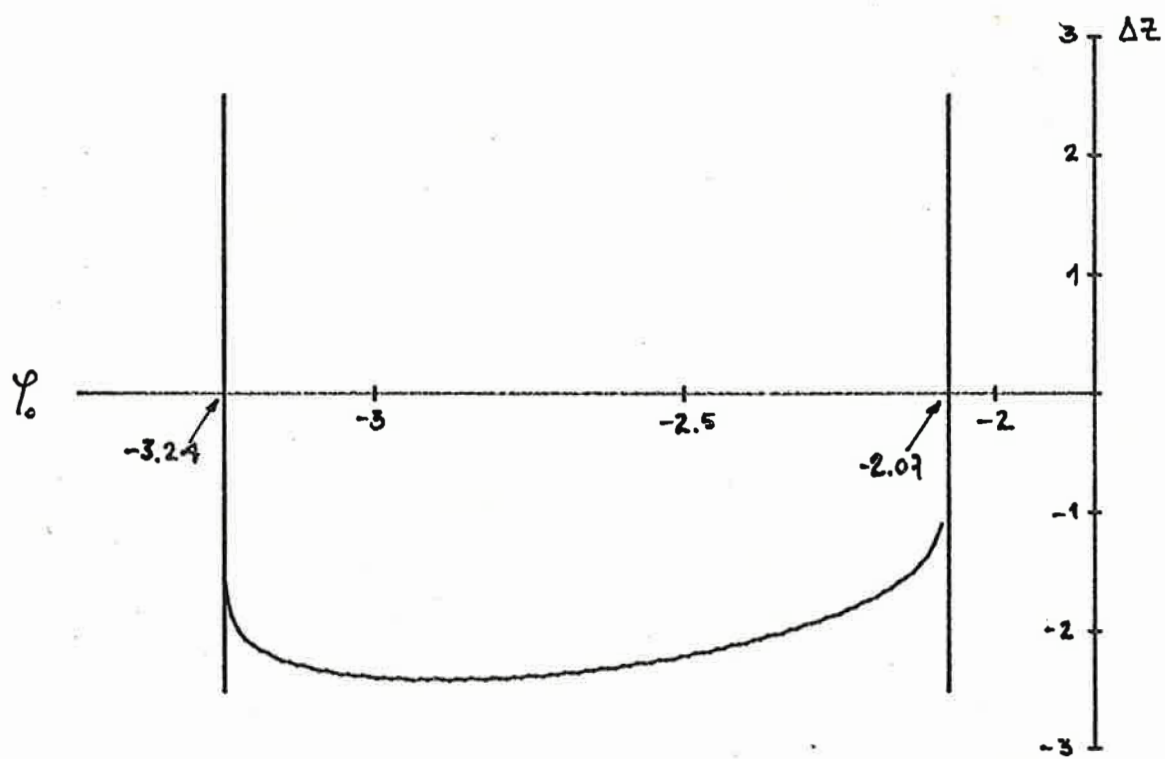


Fig. 8 $r = 0.1$

ticelle vicino alla separatrice, queste passano molto tempo nei pressi di quest'ultima e restano in un certo senso "incollate" al "bucket" il quale le trascina verso valori positivi della energia.

Comunque per il teorema di Liouville l'abbassamento medio della energia di tutto il fascio di particelle deve essere uguale all'area del "bucket" divisa per 2π , cioè :

$$\langle \Delta z \rangle = - \frac{g}{\pi} \alpha(r) \quad (67)$$

2-5 Introduzione alla misura

Supponiamo di avere un fascio continuo circolante al centro della camera a vuoto dell'acceleratore: siamo quindi a campo magnetico $B = \text{costante} = B_0$, a quantità di moto $p = \text{costante} = p_0$ e a posizione radiale $r = \text{costante} = R = \text{raggio della macchina}$ (nel CPS $R = 100\text{m.}$).

Il valore p_0 sarà ovviamente dato dalla relazione

$$p_0 = e B_0 R$$

Sappiamo poi che non tutte le particelle che costituiscono il fascio avranno questo valore p_0 : infatti a causa delle diverse condizioni iniziali le particelle avranno dei valori distribuiti entro una certa banda centrata su p_0 . (*)

In un piano delle fasi (θ, p) dove θ è la coordinata angolare lungo l'orbita ($S = \text{spazio percorso dalla particella} = \theta R$) lo stato del fascio sarà rappresentato da un rettangolo di base $= 2\pi$ ed altezza $= dp$, come in Fig.9.

Ogni punto all'interno del rettangolo corrisponderà allo stato delle N_t particelle costituenti il fascio. La densità dei punti non è costante, mentre la densità media sarà:

$$\frac{N_t}{\text{Area del rettangolo}} = \frac{N_t}{2\pi dp}$$

ma se suddividiamo il rettangolo in tante striscie rettangolari di base 2π ed altezza δdp con $\delta \ll 1$ e quindi $\delta dp \ll dp$,

.....

(*) Dalla $\frac{dr}{r} = \alpha \frac{dp}{p}$ (v. Appendice C), in questo caso $r \equiv R$ e $p \equiv p_0$, notiamo che le particelle non avendo tutte esattamente lo stesso p , viaggiano su orbite di raggio diverso. Dato quindi il valore di dp possiamo calcolare il valore dr che è poi il diametro del fascio; $\frac{dr}{r}$ dicesi appunto "dispersione radiale".

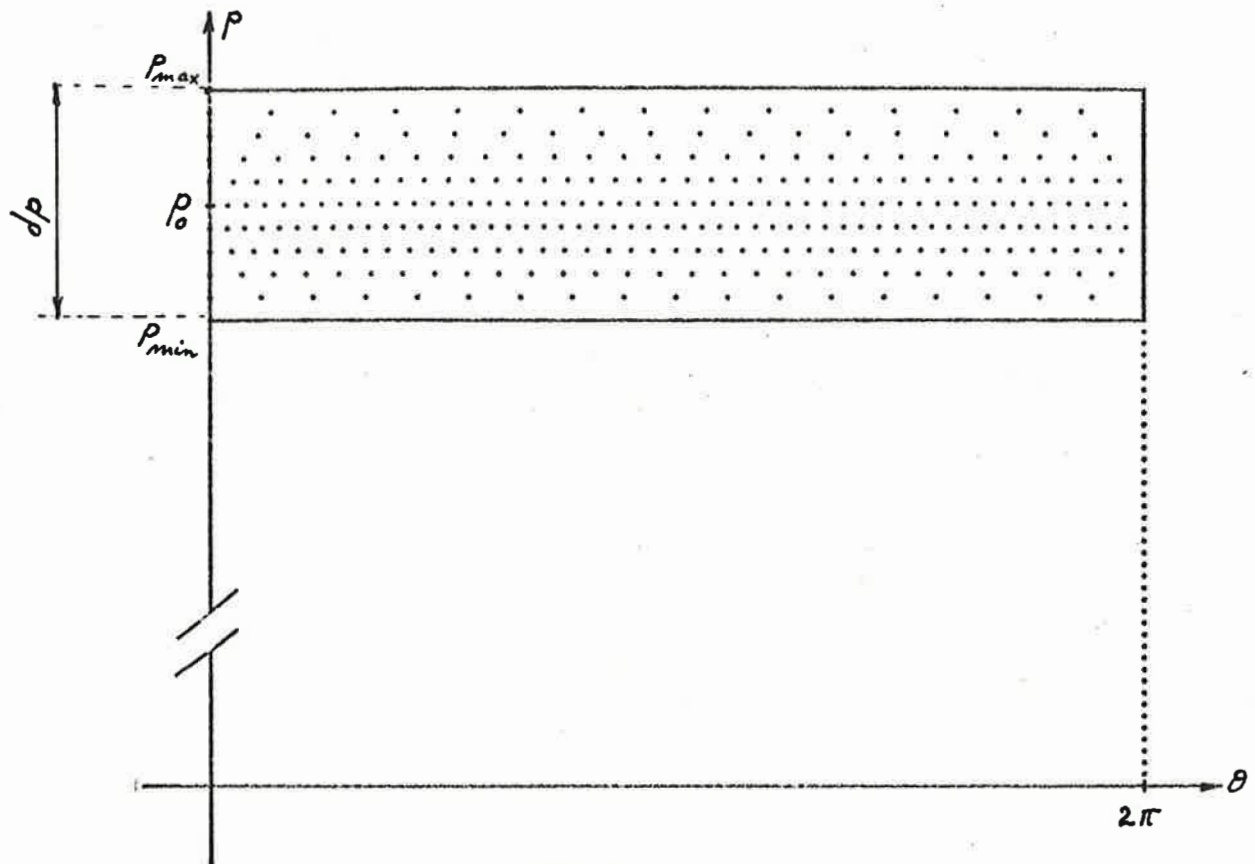


Fig.9

avremo che ognuna di queste striscie avrà una densità diversa (v. Fig. 10) . La curva

$$N = N(\delta dp) \quad (68)$$

(dove N indica il numero di particelle all'interno della striscia alta δdp) ci darà la possibilità di trovare la distribuzione in dp/p cercata.

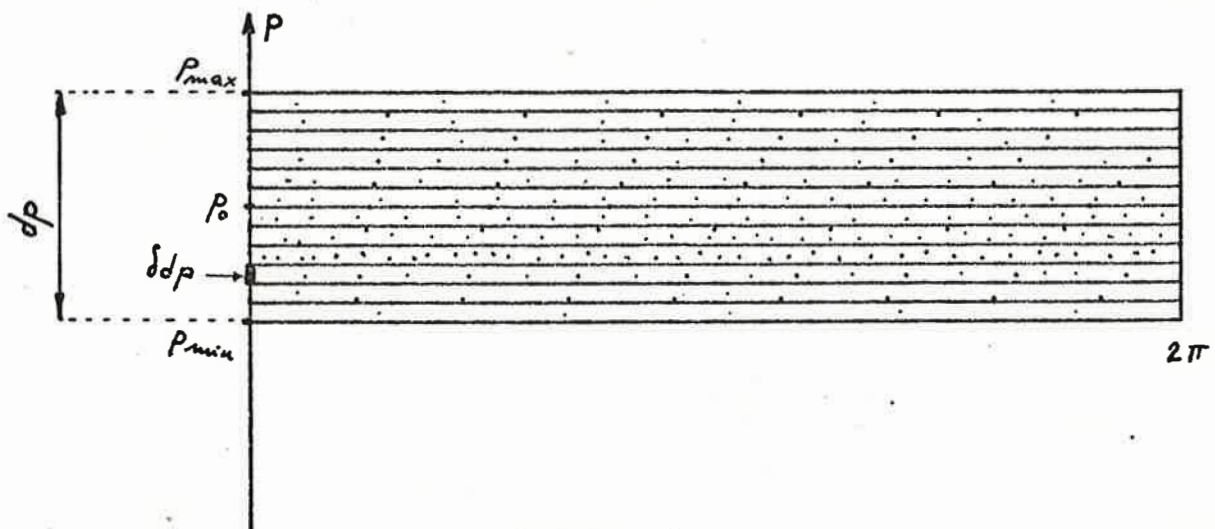


Fig.10

Infatti da questa curva, un esempio della quale è rappresentato in Fig.11, si possono ricavare i valori p_{max} e p_{min} dalla cui differenza: $p_{max} - p_{min} = dp$; calcolando poi il valore dp/p otterremo la dispersione della quantità di moto.

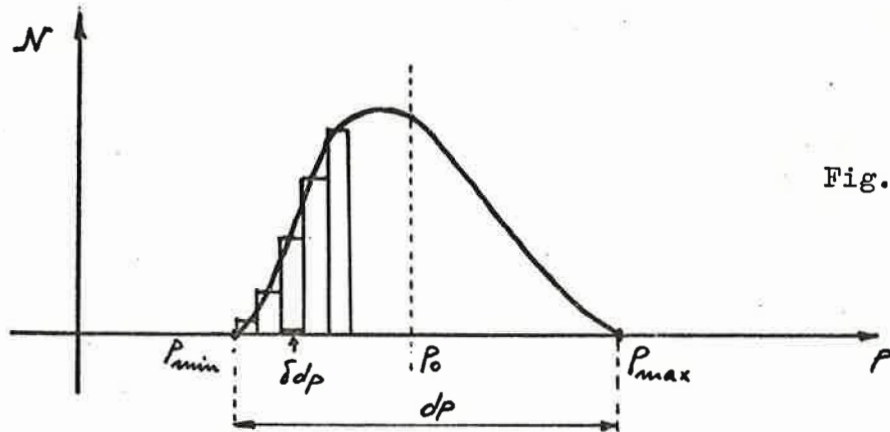


Fig.11

Osserviamo ora che, dalle relazioni

$$p_0 = e B_0 R \quad e \quad \frac{v_0}{R} = \Omega_0 = 2\pi f_r$$

dove f_r = frequenza di rivoluzione della particella, si ricava:

$$p_0 = \frac{e B_0 v_0}{2\pi f_r}$$

Supponendo di eseguire le misure ad energie tali che $v_0 \approx \text{costante} \approx c$ (c = velocità della luce) (per esempio, nel CPS, per energie ≥ 6 Gev), si può scrivere, per qualsiasi valore di p , vicino a p_0 :

$$p = \frac{k}{f_r} \quad \text{con } k = \text{costante}$$

Possiamo perciò ripetere i ragionamenti precedenti sostituendo semplicemente ai valori di p i corrispondenti valori della frequenza di rivoluzione e tenendo presente che ad un aumento di p corrisponde una diminuzione di f_r ; quindi alla rappre-

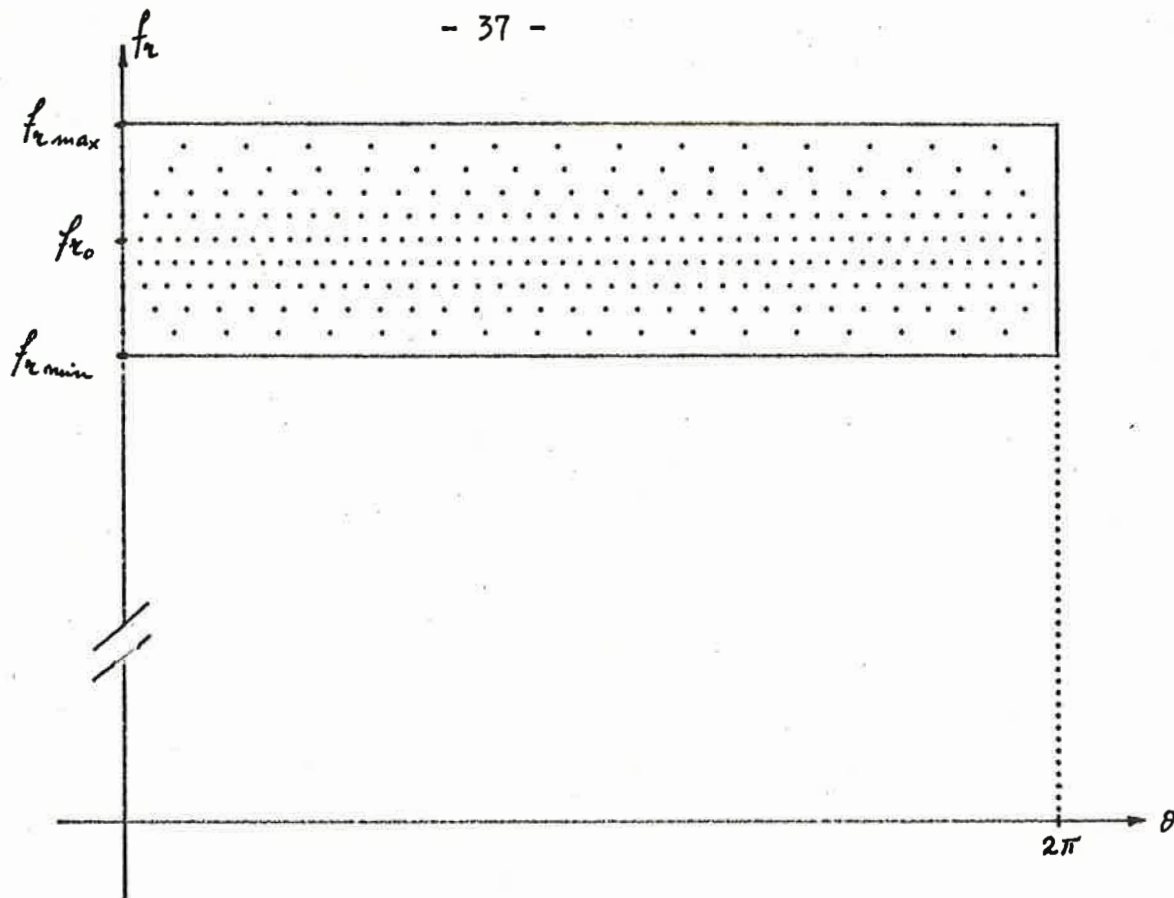


Fig.12

sentazione di Fig.9 corrisponde quella di Fig.12 nella quale lo stato del fascio viene rappresentato nel piano (θ, f_r) ,

dove f_{min} corrisponde a p_{max} : $f_{min} = \frac{K}{p_{max}}$

e f_{max} corrisponde a p_{min} : $f_{max} = \frac{K}{p_{min}}$

L'espressione che lega la df_r/f_r con dp/p la otteniamo dalla (C1) dell'Appendice C ,cioè :

$$\frac{df_r}{f_r} = -\eta \frac{dp}{p} \quad (69)$$

Ora nella Fig.12 moltiplichiamo tutti i valori dell'asse delle ordinate per un numero intero h e alimentiamo una cavità acceleratrice con una tensione di frequenza :

$$f_{START} = h f^* \quad \text{con} \quad f^* < f_{min}$$

(avremo le condizioni di Fig.13 per $h = 8$)

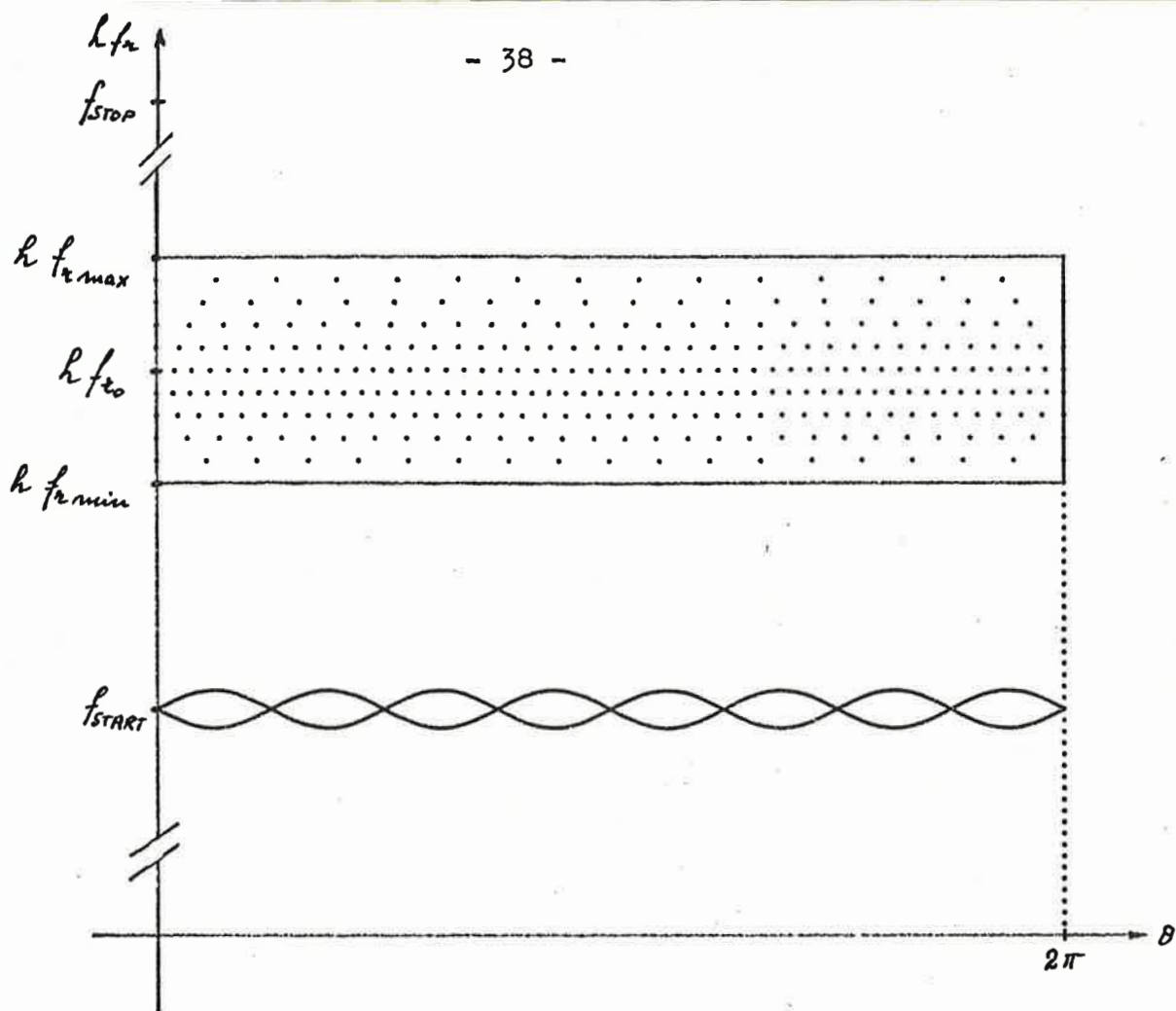


Fig.13

Abbiamo cioè creato "buckets"(*) al di fuori del fascio, se $f_{START} < h f_{r_{min}}$ e se la tensione V sulla cavità non è molto alta la loro influenza sulle particelle del fascio sarà trascurabile.

A questo punto si fa variare la frequenza della tensione sulla cavità dal valore f_{START} ad un valore $f_{STOP} > h f_{r_{max}}$ (per esempio f_{STOP} simmetrico di f_{START} rispetto a $h f_{r_0}$) in un certo tempo Δt .

Avremo perciò

$$\dot{f} = \frac{f_{STOP} - f_{START}}{\Delta t}$$

Durante questo spazzolamento i "buckets" ovviamente non saranno

(*) Saranno dei "buckets stazionari" essendo, per il momento, f_{START} fissa e quindi $\dot{f} = 0$ e per la (E6) (v. Appendice E) : $\Gamma = 0$

no più stazionari, ma avranno la forma tipica dei "buckets" acceleratori (v.Fig.2),essendo (v.Appendice E)

$$r = \frac{2\pi R}{eV} \frac{P_0}{\eta} \frac{\dot{f}}{h f_r}$$

Se il passaggio da f_{START} a f_{STOP} è sufficientemente lento, abbiamo visto che la separatrice può essere interpretata come una "linea impermeabile" ; i punti del piano delle fasi rappresentativi degli stati delle particelle si comporteranno come un fluido incompressibile, che dovrà passare negli spazi intercorrenti fra la "coda" di un "bucket" e la "testa" del successivo.

Osserviamo infatti (v.Fig.14 dove per motivi di chiarezza si illustra il movimento di un solo "bucket" e di una sola particella) che man mano che il "bucket" si avvicina alla particella, questa ne avverte la presenza cominciando ad oscillare in energia spostandosi in fase fintanto che (v.Fig.6) arrivato il "bucket" al livello di energia della particella, questa salta ad un valore di energia più basso passando fra lo stesso "bucket" e quello precedente. (Abbiamo studiato questo comportamento analiticamente al paragrafo 2-4) .

Tutto ciò porta ad una modulazione nel senso longitudinale della densità del fascio (in parole povere mentre i "buckets" passano attraverso il fascio creano dei "buchi" nello spazio delle fasi. V.Fig.15).

Questa modulazione della densità longitudinale è rivelabile per mezzo della "pick-up a larga banda".

Come già detto in precedenza tale "pick-up" è un trasduttore che in presenza di un fascio di particelle fornisce una tensio-

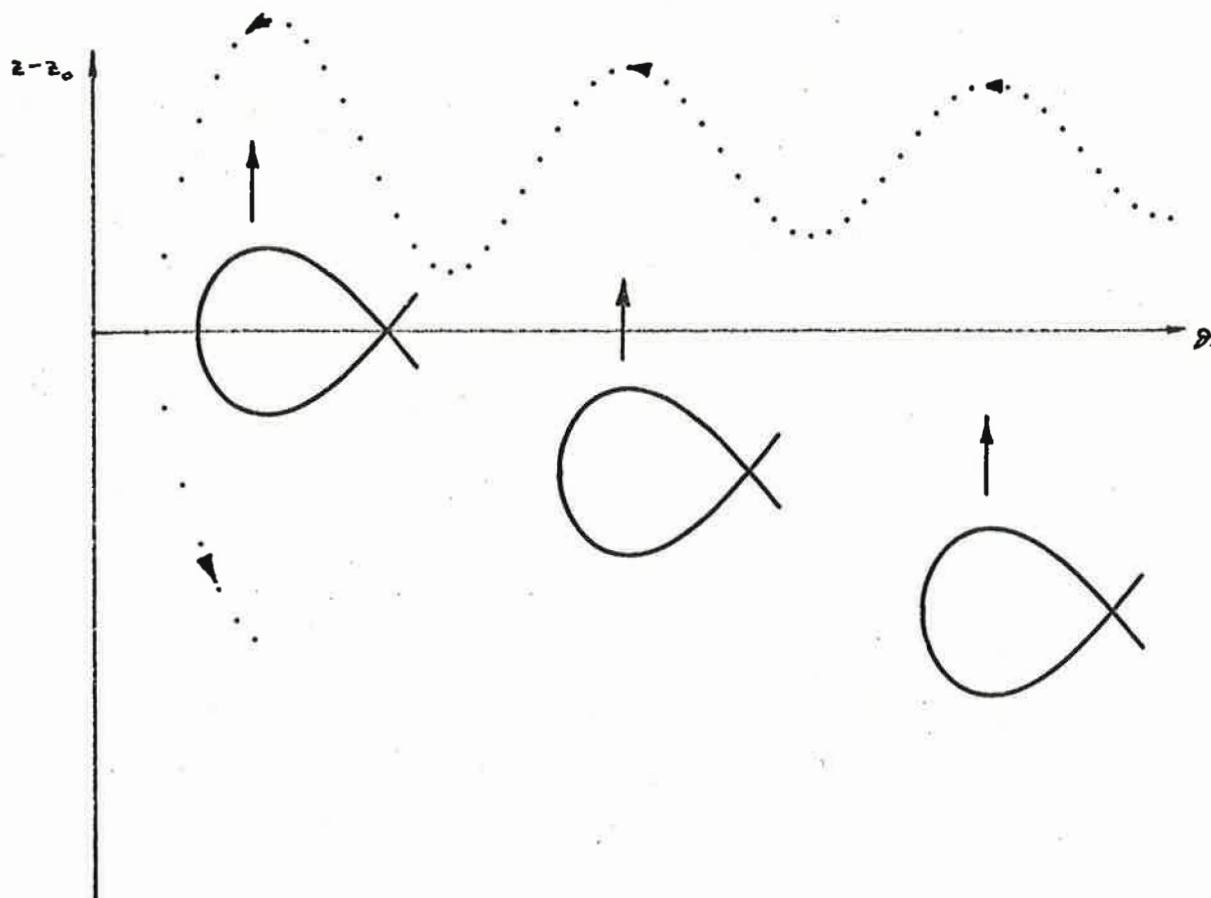


Fig.14

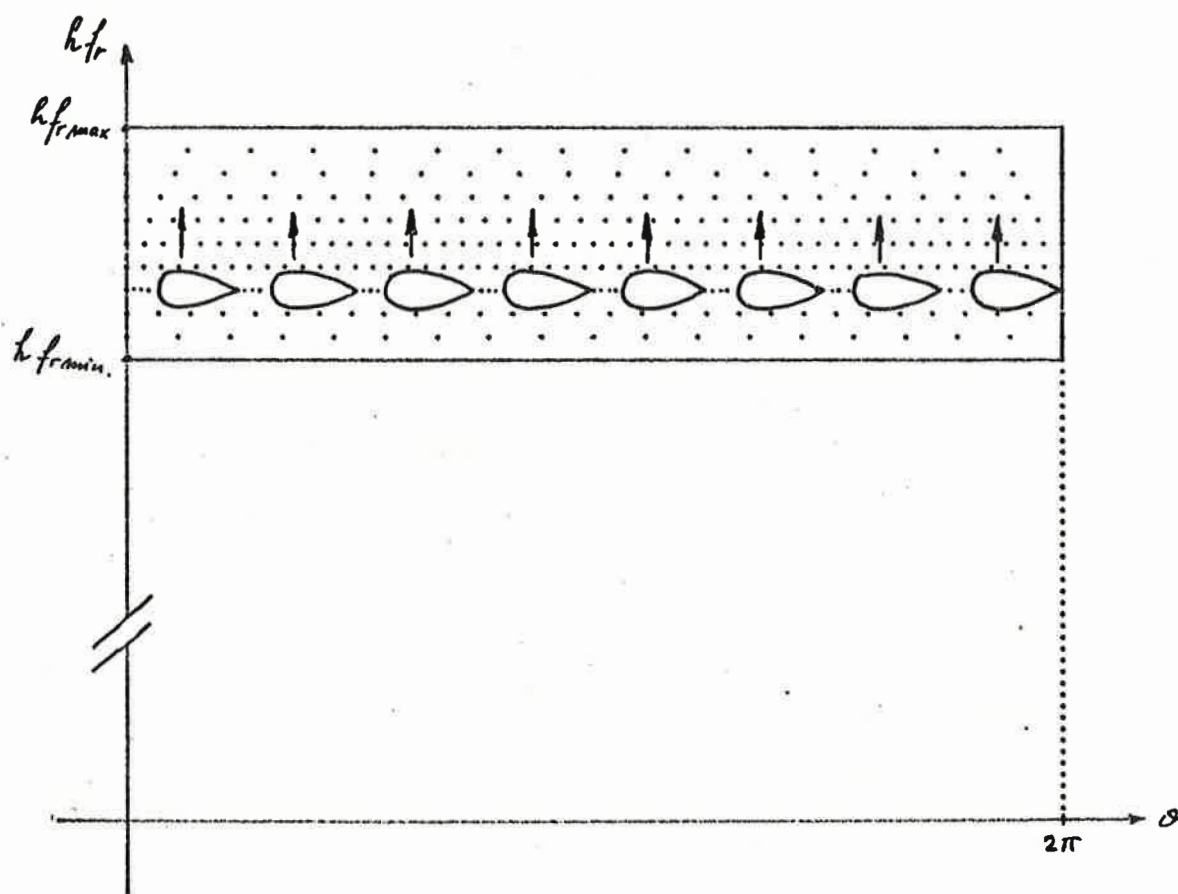


Fig.15

ne istantanea proporzionale alle variazioni di densità longitudinale del fascio.

Queste ultime sono poi a loro volta proporzionali al numero di particelle che si trovano istantaneamente spostate dai "buckets".

L'andamento della tensione fornita dalla "pick-up" durante il tempo Δt , impiegato dalla frequenza per passare da f_{START} a f_{STOP} , è illustrato in Fig.16, figura analoga alla Fig.11, cioè la distribuzione $N = N(p)$.

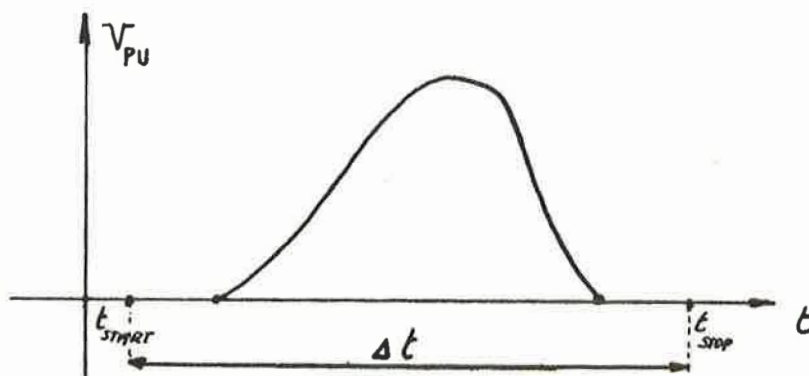


Fig.16

Dove t_{START} = tempo in cui la frequenza vale f_{START}
 t_{STOP} = " " " " " " f_{STOP}
 V_{PU} = tensione letta ai capi della "pick-up"

In riferimento al paragrafo 2-4 possiamo quindi trarre le seguenti considerazioni :

- 1) L'ampiezza della tensione V applicata alla cavità radio-frequenza determina l'ampiezza dei "buckets", cioè il $\delta\phi$ ovvero la "finestra" della misura ed in pratica l'errore di misura. V deve essere quindi relativamente piccola.
- 2) Anche il parametro di "bucket" Γ deve essere piccolo
 ($\approx 0.1 \div 0.2$) affinché la variazione di energia sia la stes-

sa per il maggior numero di particelle, introducendo così un errore minimo sulla misura di $\delta\rho$.

- 3) Fissato il valore di Γ , essendo $\Gamma \approx \frac{f}{h f_c}$ al fine di eseguire la misura in un tempo relativamente breve, avremo interesse a scegliere un ℓ il più grande possibile.

3-REALIZZAZIONE PRATICA DELLA MISURA.

Al fine di verificare sperimentalmente questi risultati teorici, si sono effettuate, il 23 Febbraio ed il 6 Aprile 1977 due serie di misure portanti su circa dieci ore di utilizzazione ("Machine Development") del sincrotrone a protoni (CPS) da 28 GeV del CERN di Ginevra, la prima a 10 GeV e la seconda a 24 GeV^(*).

3-1 Descrizione delle apparecchiature.

Il grosso di queste apparecchiature (v. schema blocchi di Fig. 17) è costituito dalla cavità acceleratrice per la generazione dei "buckets" e l'elettronica ad essa associata.

Nel CPS abbiamo usato la "cavità 200 MHz" utilizzata in opera-

.....

(*) La scelta di questi valori di energia dipende, per i 10 GeV, dal fatto che, essendo questa prima serie di misure, una prova generale delle apparecchiature ed essendo la "cavità 200 MHz" già accordata per questa energia, non si è voluto cambiarne l'accordo per semplificare le cose. La scelta di 24 GeV come valore di energia per la seconda serie di misure è dovuto al fatto che, a questa energia, generalmente il fascio viene utilizzato in "estrazione lenta" (SE 62) per le esperienze di fisica. Nel processo di "estrazione lenta" la distribuzione in dp/p del fascio è di primaria importanza ed una misura di questa distribuzione è molto interessante dal punto di vista dell'applicazione diretta dei risultati.

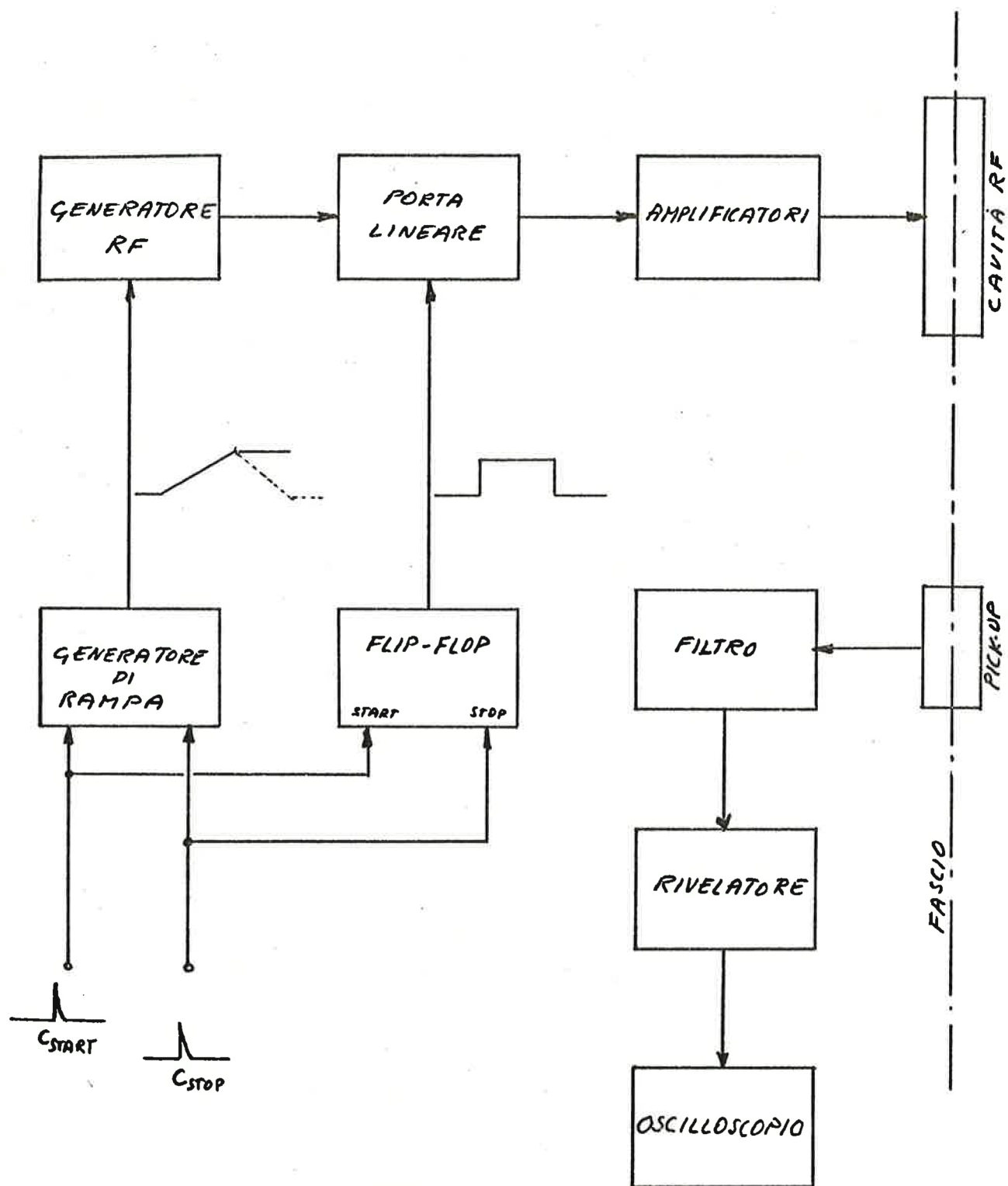


Fig.17 - Schema blocchi delle apparecchiature

ne normale per modulare il fascio estratto a 10 GeV dal CPS verso l'SPS (l'acceleratore da 400 GeV). (La struttura radio-frequenza del fascio CPS a 10 GeV è di ≈ 9 MHz perchè tale è la frequenza di accelerazione. Le "pick-up" di controllo del fascio nell'SPS sono accordate a 200 MHz, quindi al fine di migliorare la visualizzazione del fascio in quest'ultimo acceleratore si sovrappone una pre-modulazione nel CPS a 200 MHz, circa 50 msec prima dell'estrazione).

Questa cavità è risonante per un modo longitudinale elettrico in una gamma di frequenze intorno a 200 MHz (v. Foto 1, pag. 46). Dovendo essenzialmente lavorare ad una frequenza fissa ben determinata è stata costruita in modo da avere un fattore di merito Q piuttosto elevato (≈ 1600) al fine di usufruire di un buon rapporto tensione di gap / potenza d'ingresso^(*).

Purtroppo però con questo valore di Q non è possibile variare di molto la frequenza d'ingresso senza avere una potenza riflessa importante (Banda passante = $BW = \frac{f_0}{Q} \approx 200 \cdot 10^6 / 1600 \approx 125$ KHz) .

Questo limita molto la flessibilità delle misure di dp/p ; infatti occorre utilizzare, per la generazione dei "buckets", una frequenza $f = h \frac{\beta c}{2\pi R}$. Quindi f proporzionale a β a sua volta proporzionale a p .

Occorrerà perciò, in funzione dell'energia a cui si effettua la misura, scegliere il numero intero h in modo che f cada nell'intervallo di frequenze accettabili dalla cavità :

.....

(*) Due pistoni comandati elettricamente a distanza permettono l'accordo della cavità fra 199.230 MHz e 199.620 MHz.

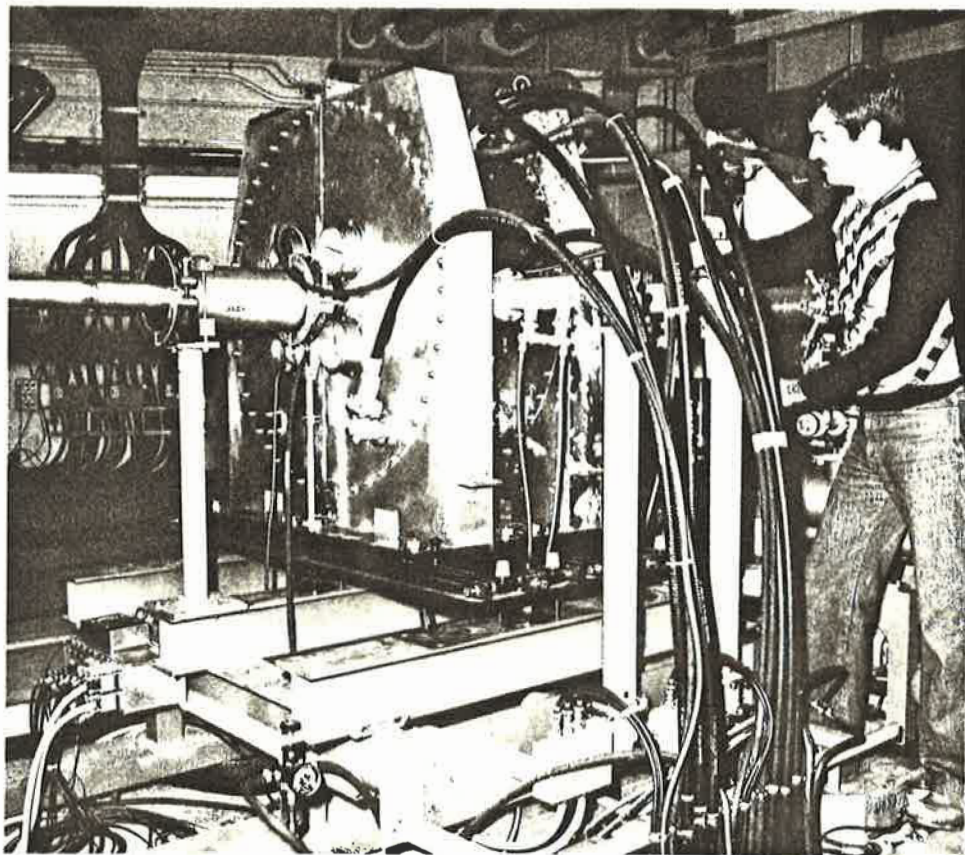


Foto 1 - Le due "cavit  200 MHz" installate nel CPS.

Una di queste   stata utilizzata per le misure di dp/p ,
l'altra   in fase di installazione.

Per^(*):

$p=10\text{Gev}/c$; $\beta = 0.9956$; $f_{r_0} = 475.05\text{KHz}$; $h = 420$; $f_r = 199.520\text{MHz}$

$p=24\text{Gev}/c$; $\beta = 0.9992$; $f_{r_0} = 476.77\text{KHz}$; $h = 418$; $f_r = 199.290\text{MHz}$

Ogni volta che si cambia energia occorre riaggiustare l'accordo mediante uno od entrambi i pistoni mobili^(**).

L'alimentazione della cavità è costituita da tre amplificatori in cascata di rispettivamente 1KW, 25KW e 50KW, questi due ultimi lavoranti in classe C (per la gamma di frequenze da noi utilizzata non si è resa necessaria la variazione dell'accordo dei circuiti di uscita).

3-2 Il generatore RF

Il generatore di radio-frequenza è il generatore che pilota la cavità.

È assolutamente necessario che questi abbia un rumore FM il più basso possibile.

Infatti una variazione di frequenza di 100 Hz introduce un errore sul valore di dp/p , a 24 Gev/c, dell'ordine di 10^{-4} che corrisponde, a volte, a circa il 10-20% dei valori correnti in operazione.

Naturalmente il generatore deve avere la possibilità di essere modulato in frequenza da un segnale esterno (nel nostro caso il segnale a rampa).

.....

(*) Per il significato dei simboli v.par.2-5 .

(**) I valori di Ω sono calcolati per una posizione radiale del fascio $t = 100\text{m}$, cioè al centro della camera a vuoto. Se il fascio circolasse su posizioni radiali diverse occorrerebbe tenere conto della relativa correzione.

Nel corso della misura si sono usati essenzialmente tre tipi diversi di generatori.

Inizialmente abbiamo fatto uso del segnale di un oscillatore a quarzo Hewlett-Packard a 201.445 MHz mescolato con l'uscita di un generatore HP-8640B a 1.9290 MHz, la differenza fra i due segnali era 199.516 MHz con una stabilità dell'ordine della decina di Hz.

Un generatore di funzione SPS 6102, usato come generatore di rampa, modulava l'HP-8640B in FM (v. schema blocchi di Fig.17). Nella seconda serie di misure si è invece utilizzato un sintetizzatore HP-8660B; anche questo generatore ha un rumore di frequenza dell'ordine dei 10 Hz.

Anche se più costosa della precedente, questa soluzione è la migliore dal punto di vista operativo (lettura digitale della frequenza, eliminazione del mixer, ecc.).

Il generatore HP-8640B usato direttamente a 200 MHz ha un rumore FM di qualche centinaio di Hz, quindi decisamente meno buono dei precedenti; comunque, nelle misure correnti, dove non si richiede una precisione estrema, l'errore introdotto può essere accettabile.

3-3 Il generatore di rampa

Il generatore di rampa è costituito da un modulo NIM-SPS 6102 (generatore di funzione).

La pendenza della rampa è regolabile, con un potenziometro frontale, da un minimo di 10 msec ad un massimo di 200 msec, mentre l'inizio della rampa è comandato da un impulso C_{START} e la fine da un impulso C_{STOP} (v. par. 4-1 per la definizione degli impulsi C).

Questi impulsi, attraverso un flip-flop, servono anche ad aprire una porta lineare (che è in effetti un mixer HP-10514A utilizzato come attenuatore) che permette di eccitare la cavità solo durante il tempo di misura.

3-4 Il sistema di rivelazione e di osservazione

L'ampiezza del segnale raccolto ai capi della "pick-up a larga banda" è proporzionale, istante per istante, nel corso della misura, alla quantità di particelle spostate dai "buckets".

Non resta quindi che filtrare a 200 MHz il segnale proveniente dalla "pick-up", rivelarlo ed infine osservarlo su un'oscilloscopio.

Queste tre operazioni si realizzano contemporaneamente con un unico strumento se si utilizza un analizzatore di spettro (nel nostro caso un HP-8554L) come un "ricevitore" regolato in modo che l'inizio e la fine dello spazzolamento (o "sweep") orizzontale coincidano con l'inizio e la fine della rampa e che la frequenza minima e massima (f_{START} e f_{STOP}), sull'asse orizzontale, coincidano con la frequenza minima e massima del generatore RF.

4-I RISULTATI SPERIMENTALI

4-1 La prima serie

Come già detto precedentemente questa prima serie di risultati si riferisce a misure effettuate a $p = 10 \text{ GeV}/c$.

Le condizioni della macchina (CPS) erano :

ciclo magnetico di tipo A

$cp_{\text{max}} = 10 \text{ GeV}$

tempo di ripetizione = 1.2 sec

intensità media accelerata = $5 \cdot 10^{10}$ p.p.p.

"debunching" (v. appendice F) a $TA = C \ 610$ (*)

$BT2 = 600 \text{ sec}$

$TB = 2500 \text{ sec}$

Il fascio era distrutto su una targhetta interna alla fine del "flat-top" a $10 \text{ GeV}/c$ ($\approx C \ 810$).

Nelle foto l'asse verticale corrisponde al numero di particelle N , l'asse orizzontale alla frequenza della tensione RF sulla cavità, regolata a $\approx 10 \text{ KV}_{\text{max}}$ (f_{START} è la frequenza corrispondente all'estremo sinistro).

Come già detto al paragrafo 2-5, essendo tutte le nostre misure eseguite ad energie maggiori di quella di transizione (cioè $\approx 6 \text{ GeV}$ nel CPS), a variazioni positive della frequenza corrispondono variazioni negative in quantità di moto secondo la :

.....

(*) Il treno d'impulsi C è, nel CPS, un treno d'impulsi, distanti 1 msec l'uno dall'altro, legato al ciclo magnetico in operazione. L'iniezione del fascio avviene a $C=100$, mentre $C610$ corrisponde, su un ciclo A, all'inizio di un "flat-top" di campo magnetico a 4771 Gauss ($=10 \text{ GeV}/c$) lungo 200 msec.

$$\frac{df}{f} = -\eta \frac{dp}{p}$$

Applicando quindi questa formula possiamo calcolare il dp/p , per esempio, nella Foto 1 (in valore assoluto) :

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{1.83 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{5 \cdot 2.5 \cdot 10^3}{139.547 \cdot 10^6} \simeq 3.4 \cdot 10^{-3} = \pm 1.7 \cdot 10^{-3}$$

I simboli $t_s^{(*)}$ e t_d nelle didascalie delle foto stanno ad indicare i tempi di salita e di discesa della rampa.

Nel caso in cui i due tempi siano uguali, la rampa coinciderà con un triangolo isoscele ed otterremo così uno spazzolamento nei due sensi.

Questo procedimento è un metodo abbastanza pratico per verificare se si è introdotta una perturbazione in dp/p nel corso del primo passaggio.

Dalle Foto 2, 3 e 4 possiamo quindi concludere che per un tempo di "scan" (o spazzolamento) di 100 msec ($\dot{f} = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Hz/sec}$, $\Gamma = 0.14$) non abbiamo praticamente alcuna interferenza, infatti le due forme sono simmetriche (v. Foto 2).

Per un tempo di "scan" di 50 msec ($\dot{f} = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz/sec}$, $\Gamma = 0.3$) cominciamo ad intravedere una leggera deformazione che diventa poi catastrofica per $t_s = 20 \text{ msec}$ ($\dot{f} = 12.5 \cdot 10^5 \text{ Hz/sec}$, $\Gamma = 0.7$).

.....

(*) Qui il simbolo t_s coincide col simbolo $4t$ del paragrafo 2-5.

Foto 1

Scan tipico

TA=C610 ; BT2=600 μ sec ; TB2=2500 μ sec

$f_{START} = 199.535$ MHz

$f_{START} - f_{STOP} = 25$ KHz

$t_s = 100$ msec

$\dot{f} = 250$ KHz/sec

asse x : 2.5 KHz/div

dp/p = $\pm 1.7 \cdot 10^{-3}$ (*)

.....

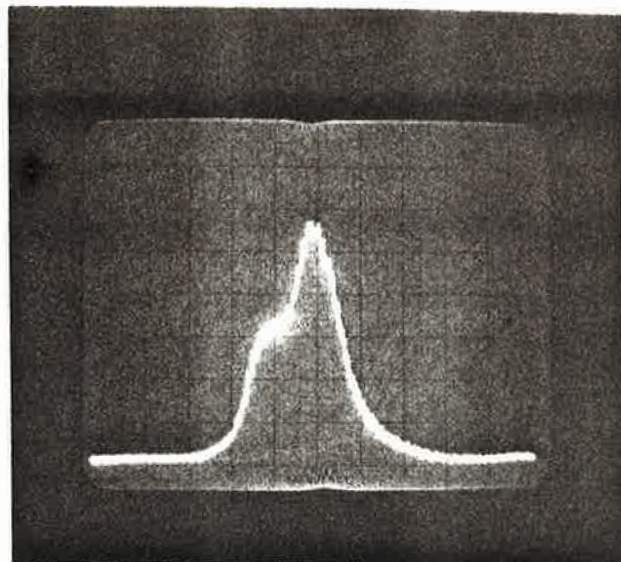


Foto 2

Doppio scan (andata e ritorno)

$f_{START} = 199.529$ MHz

$t_s = 2 \times 100$ msec

$\dot{f} = 250$ KHz/sec

asse x : 5 KHz/div

.....

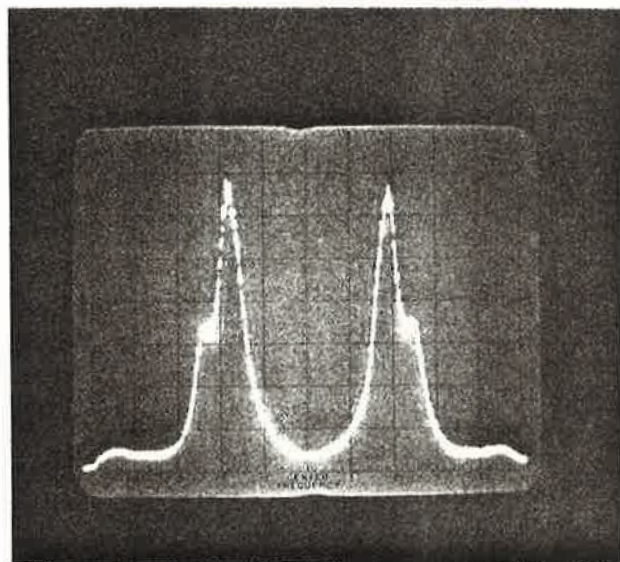


Foto 3

Doppio scan (andata e ritorno)

$f_{START} = 199.529$ MHz

$t_s = 2 \times 50$ msec

$\dot{f} = 500$ KHz/sec

asse x : 5 KHz/div

.....

(*) = $3.4 \cdot 10^{-3}$

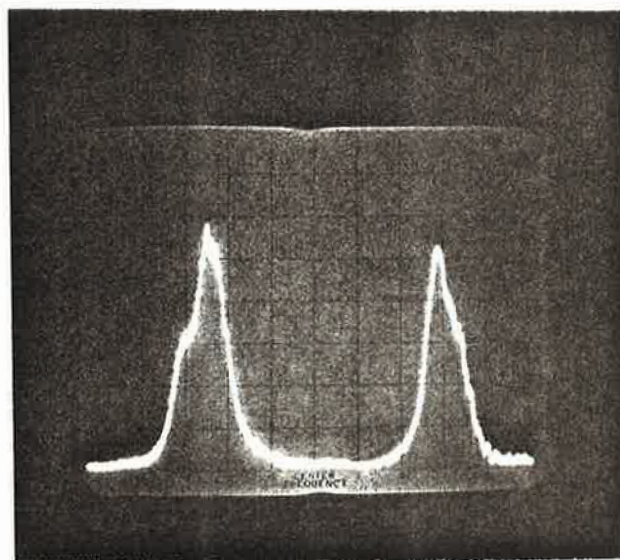


Foto 4

Doppio scan (andata e ritorno)

$f_{START} = 199.529 \text{ MHz}$

$t'_s = 20 \text{ msec}$

$t''_s = 50 \text{ msec}$

$\dot{f}' = 1.25 \text{ MHz/sec}$

$\dot{f}'' = 500 \text{ KHz/sec}$

asse x : $6.25 + 2.5 \text{ KHz/div}$

.....

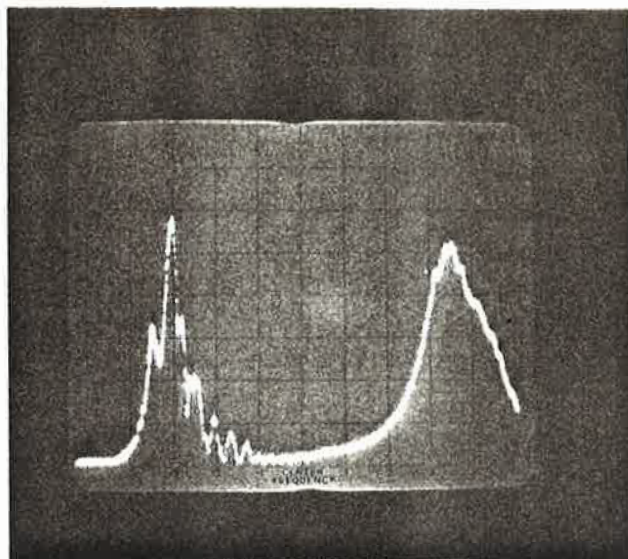


Foto 5

Scan singolo ("debunching" variato
presenza di un "doppio fascio")

$TA=610$; $BT2=900 \mu\text{sec}$; $TB=2500 \mu\text{sec}$

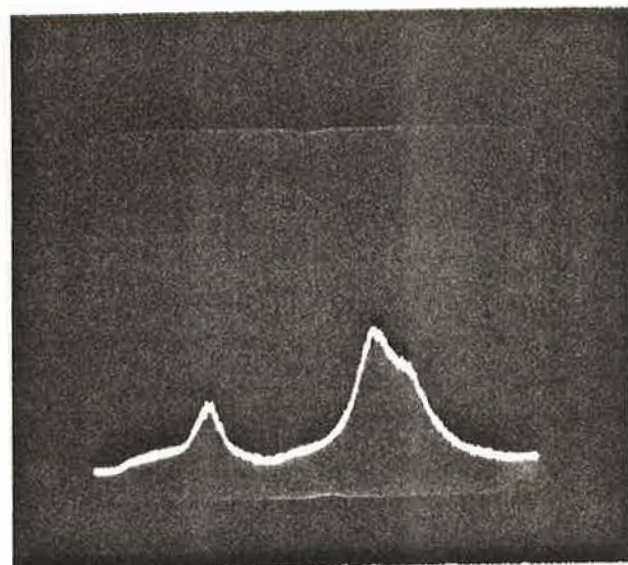
$t_s = 100 \text{ msec}$

$f_{START} = 199.515 \text{ MHz}$

$\dot{f} = 250 \text{ KHz/sec}$

asse x : 2.5 KHz/div

$dp/p = \pm 3.1 \cdot 10^{-3}$



4-2 La seconda serie

Queste misure sono state effettuate su un "flat-top" a 24 GeV/c. Nel primo gruppo di foto (dal numero 6 al numero 11) il fascio, dopo un "debunching" a salto di fase e dopo aver circolato nell'acceleratore per tutta la durata del "flat-top" (= 400 msec) veniva distrutto su una targhetta "dump" interna.

Nel corso di queste misure, i valori di BT2 e TB (v. Appendice F) sono stati variati al fine di ottenere un'ottimizzazione della distribuzione del dp/p del fascio in vista di una estrazione lenta (questa condizione consiste nell'ottenere un dp/p molto grande ed il più uniforme possibile) .

Nel secondo gruppo di foto (dal numero 12 al numero 15) il fascio veniva estratto lentamente (SE 62) nel corso dei 400 msec di "flat-top".

Da notare che l'estrazione delle particelle ad alto p avviene prima di quelle a basso p , il che è logico dato che le prime viaggiano su orbite più esterne (in base ai valori misurati di dp/p si può risalire ai rispettivi valori di dr/r e quindi alle dimensioni radiali del fascio).

Foto 6

TA=C1063 ; BT2=842 μ sec ; TB=1745 μ sec

$f_{START} = 199.296$ MHz

$\dot{f} = 390$ KHz/sec

$t_s = 100$ msec

asse x : 1.95 KHz/div

$t_{START} = C1200$

$dp/p = \pm 1.34 \cdot 10^{-3}$

.....

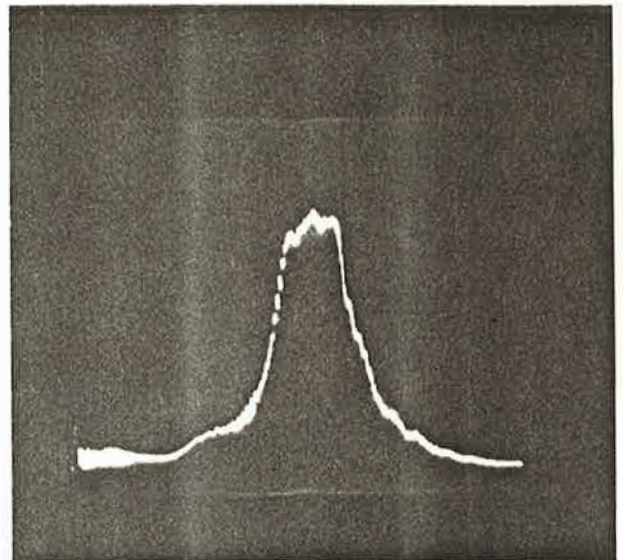


Foto 7

Aumentato il dp/p , cioè TB=2050 μ sec
(v. Appendice F)

$f_{START} = 199.293$ MHz

$\dot{f} = 420$ KHz/sec

asse x : 2.1 KHz/div

$dp/p = \pm 1.65 \cdot 10^{-3}$

.....

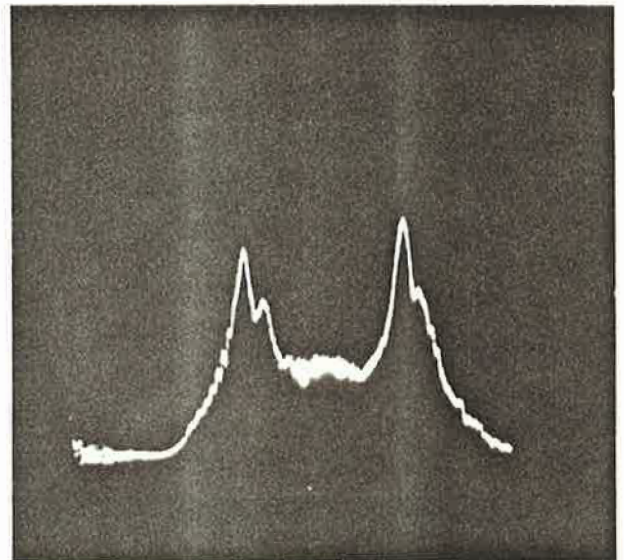


Foto 8

Aumentato ancora il dp/p

TB=2250 μ sec

$f_{START} = 199.289$ MHz

$\dot{f} = 260$ KHz/sec

asse x : 2.6 KHz/div

$dp/p = \pm 2.1 \cdot 10^{-3}$

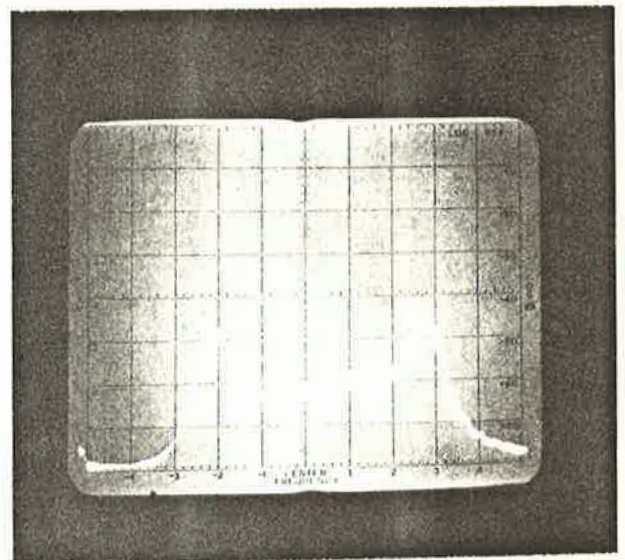


Foto 9

Aumentato ancora il dp/p

TB=2492 μ sec (valore operativo)

$f_{START} = 199.287$ MHz

$\dot{f} = 350$ KHz/sec

asse x : 3.5 KHz/div

dp/p = $\pm 2.75 \cdot 10^{-3}$

.....

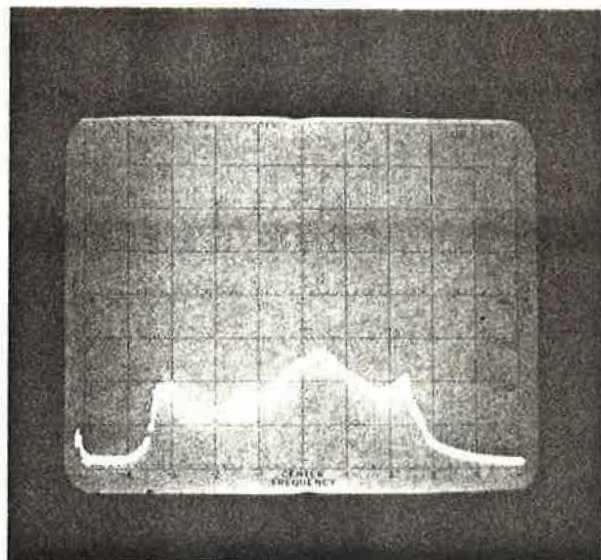


Foto 10

Ottimizzazione di BT2 per il

massimo di dp/p : BT2=1000 μ sec

$f_{START} = 199.287$ MHz

$\dot{f} = 350$ KHz/sec

asse x : 3.5 KHz/div

dp/p = $\pm 2.95 \cdot 10^{-3}$

.....

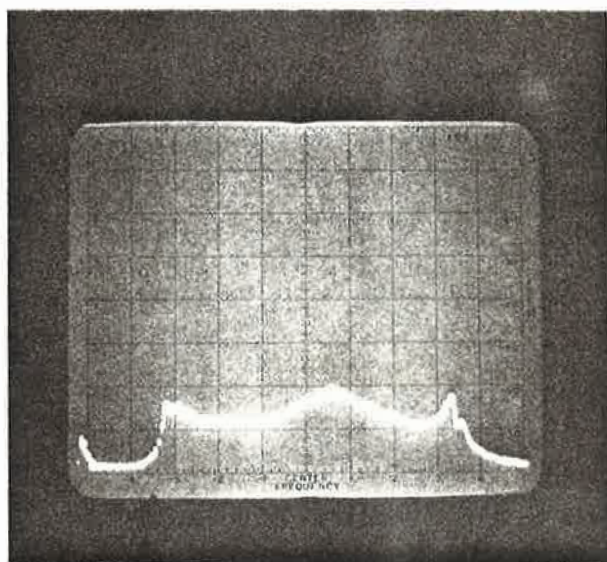


Foto 11

Aumentato il valore di BT2, il dp/p

diminuisce (v. Appendice F)

BT2=1200 μ sec

$f_{START} = 199.287$ MHz

$\dot{f} = 350$ KHz/sec

asse x : 3.5 KHz/div

dp/p = $\pm 2.41 \cdot 10^{-3}$

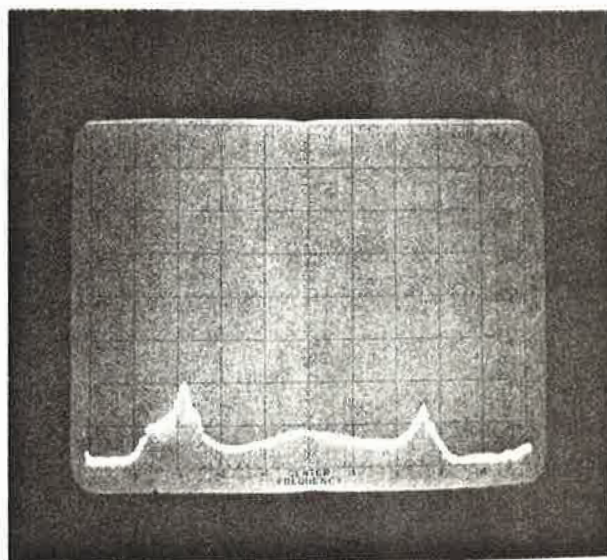


Foto 12

Valori operazionali per SE 62

TA=C1054 ; BT2=842 μ sec ; TB=2492 μ sec

f_{START} = 199.269 MHz

t_{START} = C1070

$\dot{f}$ = 200 KHz/sec

asse x : 2.0 KHz/div

per il calcolo del dp/p v. nota

a pag.58

.....

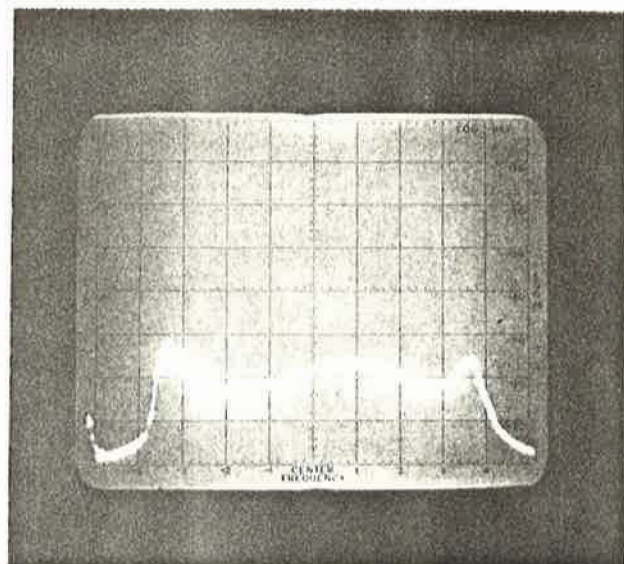


Foto 13

$\approx 1/3$ delle particelle iniziali

sono state estratte (SE 62)

f_{START} = 199.264 MHz

t_{START} = C1170

.....

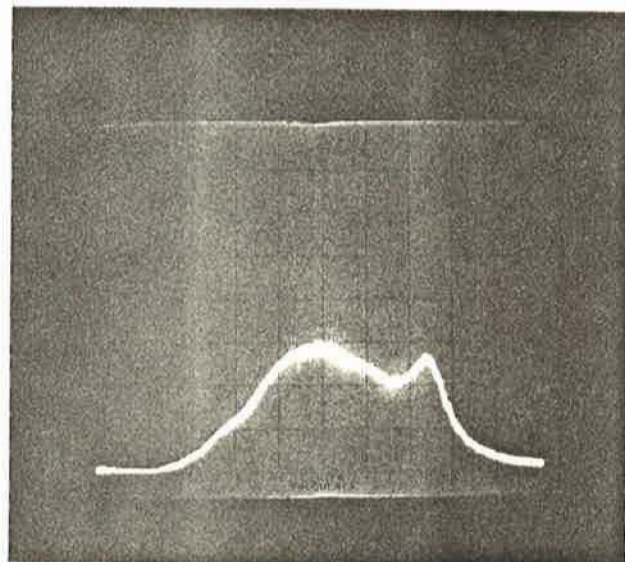


Foto 14

$\approx 2/3$ delle particelle iniziali

sono state estratte (SE 62)

f_{START} = 199.260 MHz

t_{START} = C1270

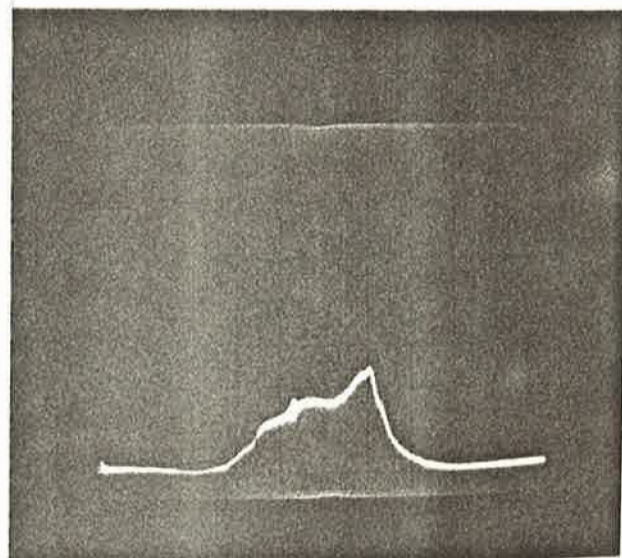
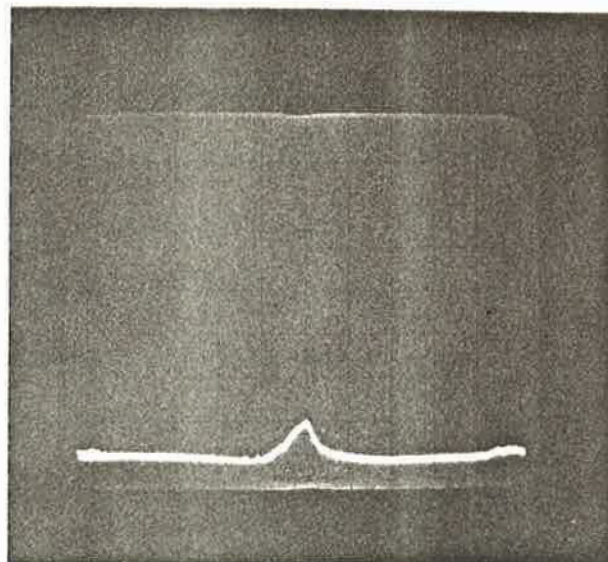


Foto 15

Quasi tutte le particelle
sono state estratte (SE 62)

$$f_{START} = 199.257 \text{ MHz}$$

$$t_{START} = C1370$$



Nota: Durante l'estrazione lenta SE 62 il campo magnetico B non è costante (generalmente $dB/B = -1.39 \cdot 10^{-3}$) quindi bisogna tenere conto di questo fattore nel calcolo del dp/p , secondo la formula (v.Bibl 1) :

$$\frac{dp}{p} = \frac{r^L}{r^L - r_t^L} \left[\frac{dB}{B} - r_t^L \frac{df}{f} \right]$$

dalla Foto 12 ricaviamo : $df/f = 1.1 \cdot 10^{-4}$

sostituendo e calcolando la formula precedente otteniamo per la Foto 12 un $dp/p = \pm 2.9 \cdot 10^{-3}$.

Concludendo, vorrei ringraziare tutte le persone che con il loro aiuto hanno contribuito alla realizzazione di questa tesi.

In modo particolare: il Dr.D.Boussard,i cui consigli mi sono stati di indispensabile aiuto durante tutti i lavori; il Dr. D.Dekkers ed il Prof.P.Germain,per avermi messo in condizione di realizzare questa esperienza; il Dr.J.Gareyte,il Prof.R. Santangelo ed il Dr.N.Vogt-Nielsen per le interessanti ed utili discussioni sull'argomento.

APPENDICE A

(v.Bibl.5)

La funzione δ di Dirac

Definiamo la funzione δ di Dirac come :

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} f(x)$$

dove $f(x) = 0$ per $x < -\frac{a}{2}$ e $x > \frac{a}{2}$

e $f(x) = \frac{1}{a}$ per $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$

inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

La proprietà importante della funzione δ può essere scritta

come :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) g(x) dx = g(x_0)$$

dove $g(x)$ è una funzione qualsiasi di x .

Analisi di Fourier per una funzione δ di Dirac periodica

Vogliamo trovare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - k \frac{2\pi\nu}{\Omega}\right)$$

essendo questa funzione pari, la sua serie di Fourier avrà la forma

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \cos \frac{h\Omega x}{\nu} = a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h \cos \frac{h\Omega x}{\nu}$$

dove

$$a_h = \frac{\Omega}{\pi\nu} \int_{-\pi\nu/\Omega}^{+\pi\nu/\Omega} f(x) \cos \frac{h\Omega x}{\nu} dx \quad \text{per } h \neq 0$$

$$a_0 = \frac{\Omega}{2\pi\nu} \int_{-\pi\nu/\Omega}^{+\pi\nu/\Omega} f(x) dx$$

Dato che $f(x)$ vale zero al di fuori dell'intervallo $(-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2})$

ed $f(x) = \frac{1}{a}$ all'interno di questo intervallo, otteniamo per $h \neq 0$

$$a_h = \frac{\Omega}{\pi\nu} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{1}{a} \cos \frac{h\Omega x}{\nu} dx \quad \text{quando } a \rightarrow 0$$

$$a_h = \frac{\Omega}{\pi\nu} \frac{\nu}{h\Omega a} \left[\sin \frac{h\Omega x}{\nu} \right]_{-a/2}^{+a/2}$$

$$= \frac{\Omega}{\pi\nu} \frac{\nu}{h\Omega a} \sin \frac{h\Omega a}{2\nu}$$

$$= \frac{\Omega}{\pi\nu} \frac{\sin \frac{h\Omega a}{2\nu}}{\frac{h\Omega a}{2\nu}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\Omega}{\pi\nu}$$

per $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\Omega}{2\pi\nu} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{1}{a} dx \\ &= \frac{\Omega}{2\pi\nu} \left[\frac{x}{a} \right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{\Omega}{2\pi\nu} \end{aligned}$$

perciò

$$f(x) = \frac{\Omega}{2\pi\nu} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\Omega x}{\nu} \right]$$

Da notare che tutte le armoniche hanno la stessa ampiezza.

APPENDICE C

(v.Bibl.8)

Parametri vari

Procediamo in questa Appendice al calcolo ed alla definizione di alcuni fra i parametri più correnti che appaiono nella teoria degli acceleratori di particelle.

Definizione di η :

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\eta \frac{dp}{p} \quad (C1)$$

(Ω = velocità angolare della particella ; p = quantità di moto della particella)

essendo

$$\Omega = \frac{v}{r} = \frac{c\beta}{r}$$

(v = velocità della particella ; r = raggio dell'orbita della particella), quindi :

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dr}{r} \quad (C2)$$

Dalla Relatività (v.Bibl.1) :

$$\frac{d\beta}{\beta} = \gamma^{-2} \frac{dp}{p} \quad (C3)$$

il fattore α detto "momentum compaction" per definizione vale:

$$\alpha = \frac{dr/r}{dp/p}$$

quindi per la (C2) e la (C3) :

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = (\gamma^{-2} - \alpha) \frac{dp}{p} \quad (C4)$$

col solito significato per γ (cioè $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$)
per la (C1) otteniamo :

$$\eta = (\alpha - \gamma^{-2}) \quad (C5)$$

il valore di γ per cui $\eta = 0$ si indica con γ_t (ed è una
costante per un dato acceleratore)

$$\gamma_t^{-2} = \alpha$$

quindi

$$\eta = (\gamma_t^{-2} - \gamma^{-2}) \quad (C6)$$

(Nel CPS : $\gamma_t^{-2} \cong 0.027$ perciò E_t (=energia di transizione) $\cong 5.7\text{Gev}$)

Frequenza delle oscillazioni sincrotroniche

Dall'espressione (46) dell'Hamiltoniana

$$H(\varphi, \Delta W) = -\frac{h}{2} \Omega' \Delta W^2 + \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi + \frac{\dot{\omega}}{\Omega' h} \varphi$$

con

$$\Delta \dot{W} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\dot{\omega}}{\Omega' h} + \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi$$

ricordando

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \Delta W} = -h \Omega' \Delta W = \sqrt{\frac{eV h \Omega'}{2\pi}} y = -\sqrt{\frac{\dot{\omega}}{r}} y \quad (D1)$$

$$\ddot{\varphi} = -h \Omega' \Delta \dot{W} = \dot{\omega} - \frac{eV h \Omega'}{2\pi} \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{eV h \Omega'}{2\pi} (r - \sin \varphi) \quad (D2)$$

Prefigiamoci di studiare solo le oscillazioni di piccola ampiezza e poniamo :

$$\varphi = \varphi_s + \delta \quad \text{con } \delta \text{ piccolo rispetto a } \varphi_s$$

$$\sin \varphi = \sin \varphi_s \cos \delta + \cos \varphi_s \sin \delta = r + \sqrt{1-r^2} \delta$$

sostituendo in (D2)

$$\ddot{\delta} = \frac{eV h \Omega'}{2\pi} (-\sqrt{1-r^2} \delta) = -\frac{\dot{\omega}}{r} \sqrt{1-r^2} \delta$$

questa è l'equazione differenziale di un moto armonico con frequenza di oscillazione :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\dot{\omega}}{r} \sqrt{1-r^2}} \quad (D3)$$

APPENDICE E

(v.Bibl.4)

Espressione di Γ nel caso in cui $B = \text{costante}$

Dalla (48)

$$\Gamma = \frac{2\pi \dot{\omega}}{e V \Omega' \hbar} \quad (\text{E1})$$

e dalla (38)

$$\frac{\dot{\omega}}{\hbar \Omega'} = \frac{\dot{E}_s}{\Omega_s} \quad (\text{E2})$$

inoltre (v.Bibl.1) :

$$\frac{dE_s}{E_s} = \beta^2 \frac{dp}{p} \quad (\text{E3})$$

quindi

$$\dot{E}_s = E_s \frac{\beta^2}{p} \dot{p} \quad (\text{E4})$$

ancora dalla Bibl.1 :

$$\frac{dB}{B} = \gamma_t^2 \frac{df}{f} + \frac{\gamma^2 - \gamma_t^2}{\gamma^2} \frac{dp}{p}$$

Col solito significato per $\gamma = \frac{E}{E_0}$ e γ_t (v. Appendice C),
essendo poi il campo magnetico $B = \text{costante}$, $dB = 0$, otteniamo dalla (E3) :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{\eta} \frac{df}{f} \quad (\eta = \gamma_t^{-2} - \gamma^{-2})$$

la (E1) diventa quindi :

$$\Gamma = \frac{2\pi \hbar}{e V c} E \frac{\beta}{\eta} \frac{\dot{f}}{f} \quad (\text{E5})$$

essendo inoltre dalla Relatività $E = cp/\beta$

$$\Gamma = \frac{2\pi \hbar}{e V} \frac{p}{\eta} \frac{\dot{f}}{f} \quad (\text{E6})$$

APPENDICE F

Sul come si effettua un "debunching" (*)

Vi sono due metodi principali per effettuare un "debunching". Il più semplice consiste nel diminuire fino al valore zero, in un tempo di qualche millisecondo, la tensione radio-frequenza. Si ottiene in questo modo un fascio con un dp/p molto piccolo. Il secondo metodo è un po' più complesso, ma permette di ottenere valori di dp/p a scelta fra un minimo coincidente circa col minimo del caso precedente ed un massimo funzione del valore massimo della tensione radio-frequenza di accelerazione. Per descrivere questo secondo procedimento supponiamo di avere un fascio circolante con campo magnetico costante (cioè ad energia costante).

Aumentiamo la tensione RF al suo valore massimo ottenendo così nello spazio delle fasi la situazione di Fig.F1 dove l'area tratteggiata corrisponde al fascio di particelle.

All'istante che indicheremo con TA si fa effettuare alla RF un salto di fase di 180° , ottenendo quindi la situazione di Fig.F2 .

In questo punto (instabile) il fascio è sottoposto a forze che tendono a "tirarlo" secondo le direzioni indicate e dopo un certo tempo (in genere dell'ordine di qualche centinaio di μ sec) assumerà la forma di Fig.F3.

A questo punto, indicato con BT2, si salta ancora di 180° , ritornando nella posizione iniziale.

Ora sappiamo che le particelle all'interno del "bucket" effet-

.....

(*) Il "debunching" è l'operazione che permette di passare da un fascio costituito da pacchetti ad un fascio continuo.

tuano delle rotazioni lungo delle traiettorie quasi ellittiche tutte centrate nel punto ($\varphi = 0$, $y = 0$).

Ciò vuol dire che l'ovale rappresentante le particelle effettuerà delle rotazioni attorno a questo punto.

Quando si troverà all'orizzontale (dopo $1/4$ di oscillazione sincrotronica) avremo un minimo di dp/p .

L'operazione finale consiste nello spegnere totalmente la tensione RF al tempo TB corrispondente al dp/p desiderato.

Per un'estrazione lenta occorre un fascio con grande dp/p e quindi si utilizza questo secondo metodo per effettuare il "debunching" inviando TB quando l'ovale si trova in posizione verticale.

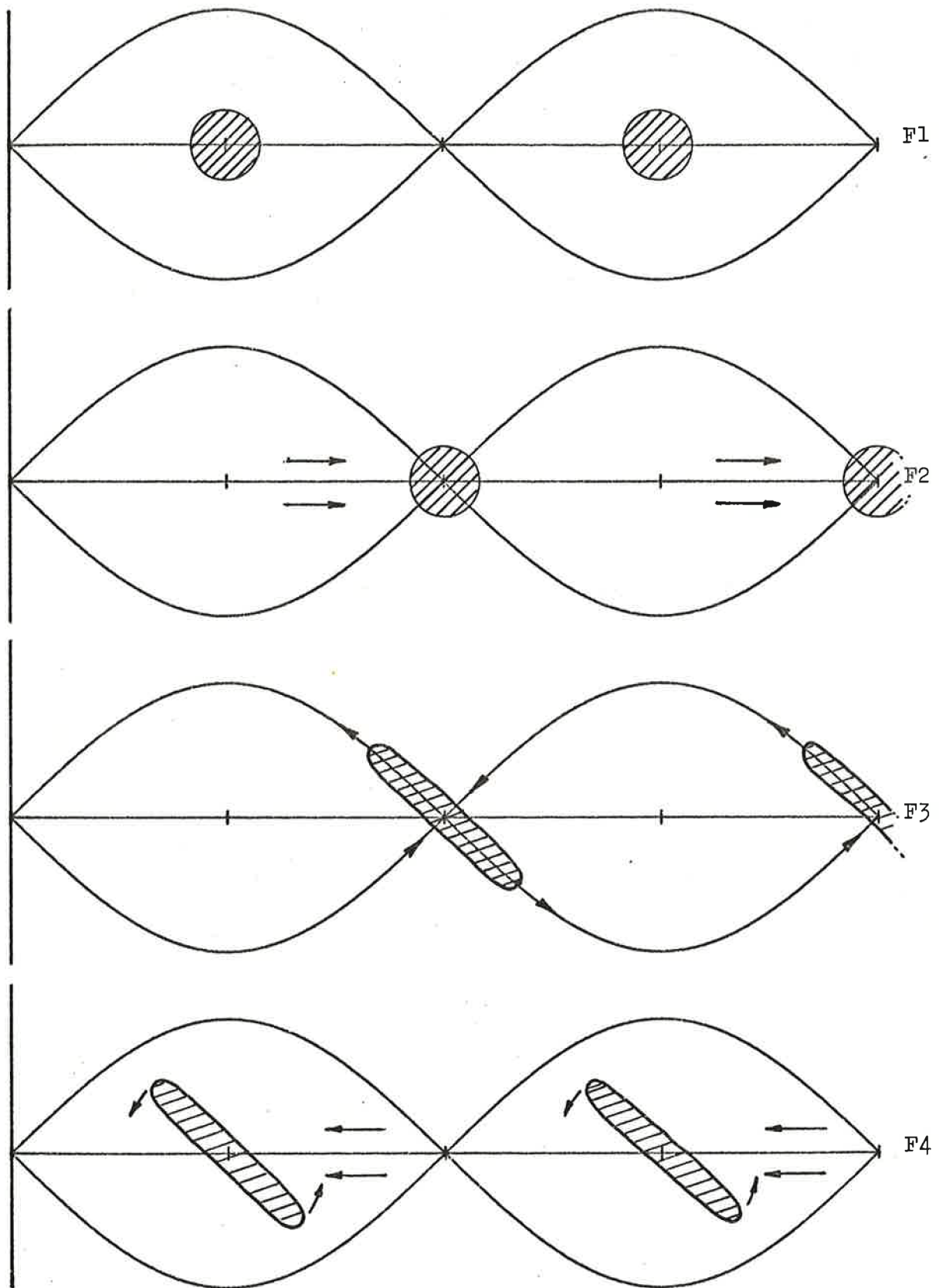


Fig. F1, F2, F3, F4

BIBLIOGRAFIA

- 1- A selection of formulae and data useful for the design of
A.G.synchrotrons.
C.Bovet,R.Guiran,I.Gumowski,K.H.Reich ;CERN-MPS-SI/Int
- 2- Method of radio frequency acceleration in fixed field acce-
lerators with applications to high current and intersecting
beam accelerators.
K.R.Symon and A.M.Sessler ; CERN Symposium 1956
- 3- Study programme on beam stacking processes (report 2,3,5)
N.Vogt-Nielsen ; CERN-PS/NVN-1
" " -2
" " 58-9
- 4- MD Note
D.Boussard ; CERN int.report MPS/SR/MD 72-9
- 5- Theory of radio-frequency acceleration
CERN int.report PS/4497/p/sb
- 6- Theory of cyclic accelerators
A.A.Kolomensky and A.N.Lebedev ; North-Holland Publ.Co.
- 7- Accélérateurs circulaires de particules
H.Bruck ; Presses Universitaires de France
- 8- What are the equations for the phase oscillations in a syn-
chrotron?
H.G.Hereward ; CERN 66-6
- 9- Particle accelerators
M.S.Livingston and J.P.Blewett ; McGraw-Hill Co.
- 10- On the phase equation for synchrotrons
H.G.Hereward and K.Johnsen ; CERN-PS/HGH-KJ 1
- 11- Fisica teorica (Vol.1)
L.D.Landau e E.M.Lifshic ; Edizioni MIR
- 12- Phase-space dynamics of particles
A.J.Lichtenberg ; J.Wiley & Sons Inc.

