

**FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID**

ANALISIS MULTICANAL DE LAS RESONANCIAS ESCALARES E ISOESCALARES

CERN LIBRARIES, GENEVA

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00098978

Tesis Doctoral presentada por:

D. ANTONIO GONZALEZ-ARROYO ESPAÑA

para optar al título de

**Doctor en Ciencias , Sección de
Físicas.**

RESUMEN

En este trabajo presentamos un estudio de la onda S e isospin cero para los procesos $\pi\pi\rightarrow\pi\pi$, $\pi\pi\rightarrow K\bar{K}$ y $K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}$. Empezamos por criticar los trabajos anteriores por dos motivos fundamentales. En primer lugar la incorrección de la estructura analítica de las parametrizaciones normalmente utilizadas. En segundo lugar la falta de completitud de la información experimental debida a la ausencia de datos sobre el proceso $K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}$. Subsanaamos la primera de las dificultades deduciendo una parametrización, modificación de la de la matriz K que cumple todos los requisitos teóricos que imponemos. El segundo problema lo solventamos utilizando información experimental sobre los procesos $p\bar{p}\rightarrow K\bar{K}\pi$ y $p\bar{p}\rightarrow K\bar{K}\pi\pi$, proveniente del experimento de antiprotones a 700 y 760 Mev/c analizado por la colaboración Bombay - CERN - College de France - J.E.N. Seguidamente ajustamos con nuestra parametrización a los datos de este experimento junto con los valores de η y δ_π que resultan del análisis independiente de la energía de Hyams *et al.* Discutimos los resultados del ajuste, en particular: parámetros de baja energía, la estructura del corte izquierdo de la amplitud $K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}$, que nos proporciona una condición de consistencia del ajuste, y finalmente la posible existencia de resonancias.

Respecto del último punto, calculamos las fases propias y los polos en hojas no físicas, que nos permiten determinar la masa y anchuras parciales del S^* . Posteriormente, substraemos la parte correspondiente a esta resonancia, mediante un criterio que discutimos previamente, y el fondo resultante sugiere la existencia de una nueva resonancia de masa superior a la del S^* , cuyos parámetros determinamos aproximadamente. Ninguna otra resonancia aparece en estos canales y con estos números cuánticos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco al Dr. F.J. Yndurain la dirección de este trabajo y su apoyo científico y profesional. Me siento, también, particularmente obligado con el Dr. J.A. Rubio tanto por su colaboración y ayuda científica como por su apoyo moral permanente. También agradezco su ayuda a los Drs. L. Montanet y R. Armenteros, y la hospitalidad de la división de Física Experimental del C.E.R.N. recibida durante alguna parte de este trabajo. A su vez debo agradecer las conversaciones científicas y la colaboración de los Drs. M. Aguilar-Benitez, M. Cerrada, L.E. Ibañez y C. López, y en general a los miembros del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid y del grupo de Altas Energías de la Junta de Energía Nuclear la cordialidad para conmigo y el grato ambiente en que se ha podido desenvolver mi trabajo. Finalmente doy las gracias a la Sra. Mercedes España y Emilia Redondo por la gentileza de haber mecanografiado este trabajo.

I. INTRODUCCION

Una nueva era en la historia de las partículas elementales da comienzo en 1964, cuando M. Gell-mann introduce el concepto de quark, y postula que los hadrones están constituidos por estos. A pesar del largo tiempo transcurrido desde entonces, aún quedan preguntas sin responder respecto de la naturaleza de las interacciones de estos constituyentes entre sí o con los leptones. Sin embargo, pocos dudan hoy de la existencia, en un cierto sentido, de los quarks. Nuestras ideas se han visto reforzadas grandemente con el descubrimiento de la Ψ y el resto de la especie de partículas encantadas, durante los últimos tres años.

Los modelos quark al uso, en su intento de descripción cualitativa y semicuantitativa de los datos experimentales, se caracterizan por su extrema sencillez de cálculo. Sin embargo, cada día ha de resultar más necesario el llegar a un grado mayor de precisión en nuestros cálculos, y aprender de forma más cuantitativa acerca de la estructura hadrónica. Los viejos hadrones constituyen aun un gran campo de aprendizaje en este sentido. Este interés se contrapone con la falta de nitidez de los datos experimentales a energías superiores a 1 GeV. la gran cantidad de canales abiertos y el número de partículas en los estados finales dificulta considerablemente el estudio de las resonancias (sus masas y sus anchuras) y por lo tanto su contrastación con el modelo quark o esquemas más generales como SU (3).

Uno de los problemas históricos con los que se enfrenta el modelo quark, es el de los mesones escalares de $I = 0$. Se barajan tres candidatos para dos puestos y subsiste una gran incertidumbre respecto a sus masas, sus anchuras y, lo que es más, su existencia. El modelo quark de excitación orbital predice la existencia de cuatro nonetes de mesones con $L = 1$ ($L \equiv$ momento angular orbital relativo entre quark y antiquark) con espín-paridad $J^{PC} = 1^{+-}, 2^{++}, 1^{++}, 0^{++}$. El único nonete que se encuentra libre de problemas es el 2^{++} .

Los estados correspondientes al nonete escalar son:

- a) una partícula extraña de $I = \frac{1}{2}$ y su antipartícula, probablemente el $K(1250)$,
- b) una partícula no extraña $I = 1$ que se acostumbra a identificar con el $\delta(976)$,
- c) dos estados de $I = 0$ que serían combinaciones lineales ortogonales de un estado singlete y otro octete de SU (3).

Las masas y anchuras predichas para estos estados dependen fuertemente del

modelo particular utilizado. Esta dificultad es, sin embargo, un incentivo, ya que la determinación de estos parámetros puede ser una información muy notable respecto del grado de precisión esperado de cada aproximación, y de la forma precisa de la interacción quark-antiquark en el interior de un hadrón.

Para los estados de $l = 0$ del nonete escalar se cuenta con tres candidatos en la literatura: $\epsilon - \sigma$ (88 – 900), S^* (1000) y ϵ' (1200 – 1300). De entre estos solo el S^* parece relativamente estrecho mientras que los otros dos son muy anchos. Ahora bien, tanto la existencia como las masas y anchuras de estos estados son muy dependientes del análisis experimental que se haga. Por este motivo, antes de intentar entender en el contexto del modelo quark (y otros modelos) como acomodar los distintos estados de $l = 0$, es obligado estudiar con detalle los datos experimentales de forma que los parámetros y existencia de estas resonancias se clarifique. El trabajo que aquí presentamos está dedicado por entero a esta tarea, que pone en juego toda una artillería teórica para esclarecer la situación experimental. En el intento de ser breve se ha omitido todo aquello que no es necesario para entender el trabajo y que se pudiera encontrar con tanto o más detalle en alguna otra publicación. Esperamos que la bibliografía que presentamos subsane esta dificultad.

Para terminar esta introducción, que esperamos haya servido para motivar y enmarcar dentro de esquemas más generales el presente trabajo, señalaremos el contenido de los demás capítulos. El próximo está dedicado a especificar la herramienta teórica y los resultados generales que se asumirán a lo largo de todo este trabajo. El siguiente capítulo se dedica a resumir brevemente los trabajos anteriores a este. También se presenta una crítica de estos lo cual constituye una motivación mas concreta de todo lo que sigue. El capítulo IV contiene la deducción de una parametrización que cumple todos los requisitos necesarios para nuestro estudio. En el capítulo V, con manifiesta brevedad, comentaremos sobre los datos experimentales que utilizaremos en el ajuste (capítulo VI) que describiremos a continuación.

El capítulo VII ha sido incluido de cara a entender la manera de interpretar dinámicamente los resultados del ajuste realizado. Su preocupación es la de describir las posibles caracterizaciones de una resonancia multicanal en presencia de un fondo o sin él. Los resultados del ajuste se presentan en el capítulo VIII. Este contiene, no solo aquellos resultados relativos a la posible existencia de resonancias, sino también otros que incluyen una condición de consistencia del ajuste deducida de cruce y un estudio de las longitudes de difusión. Finalmente, el capítulo IX establece las conclusiones y le siguen las referencias, tablas y figuras que completan este trabajo.

II. RESULTADOS GENERALES SOBRE LAS AMPLITUDES

Nuestro objetivo es estudiar las amplitudes de onda S e isospin 0 para los procesos $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ y $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$. El estudio de estos procesos ha constituido una larga y ardua tarea experimental y fenomenológica. La dificultad radica en el hecho de que estos experimentos no se pueden realizar directamente en el laboratorio y hay que inferirlos de reacciones de la forma $\pi N \rightarrow \pi\pi B$ y $\pi N \rightarrow K\bar{K} B$ (B denota un barion: N ó Δ) aislando la contribución de un pión intercambiado. Como contrapartida a la dificultad de extraer datos experimentales fiables y relativamente independientes de modelos, está la simplicidad teórica de estos procesos y, claro está, su importancia. Esta última radica en la gran cantidad de reacciones a los que los desfasajes $\pi\pi$ contribuyen de alguna manera. La baja masa del pión es la que da a estas reacciones tanta prodigalidad en Física de Partículas.

La simplicidad teórica a la que nos referíamos antes, tiene su origen también en la baja masa del pión respecto de los demás hadrones, en el hecho de que tiene espín cero y en el papel que el cruce juega en este caso. La colisión $\pi\pi$ elástica ha sido campo de ensayo sistemático de todos los resultados reducidos de la Teoría Axiomática de Campos y de unitariedad. La generalidad de estos resultados les confiere una gran importancia a la hora de utilizarlos en combinación con datos experimentales.

Hoy, podemos decir que poseemos un conjunto de desfasajes e inelasticidades relativamente estables (ver capítulo V) para la reacción $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ desde 500 hasta 1900 MeV. Ahora bien, para determinar que efectos dinámicos (resonancias y fondo) son responsables de estos datos, es necesario hacer un análisis multicanal incluyendo los tres procesos citados anteriormente y constreñir nuestro análisis de manera que todos los requisitos teóricos se verifiquen desde el principio. Lo que sigue de este capítulo, lo dedicamos a especificar la herramienta teórica que se utilizará a lo largo del trabajo, y los resultados, que se desprenden de la unitariedad, analiticidad y cruce acerca de las amplitudes $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ y $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ de onda S e isospin cero.

Comencemos fijando la notación. Llamaremos $f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{II}(s)$, $f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{II}(s)$ y $f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{II}(s)$ a las amplitudes de onda I e isospin I para los procesos especificados, donde s representa el cuadrado de la energía en el centro de masas. A veces utilizaremos estas amplitudes simultáneamente por medio de la matriz $f^{II}(s)$ definida como:

$$f_{(s)}^{11} = \begin{pmatrix} f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{11}(s) & f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{11}(s) \\ f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{11}(s) & f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{11}(s) \end{pmatrix}$$

Los índices de la matriz serán usados frecuentemente para denotar la amplitud a la que nos referimos, en vez de especificar el proceso. La normalización de estas amplitudes queda especificada escribiendo su expresión en función de los desfases e inelasticidades para s real y mayor que el umbral físico de $K\bar{K}$:

$$f_{(s)}^{11} = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\eta e^{2i\delta_\pi} - 1}{2iq_\pi} & \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{2q_\pi^{1/2} q_K^{1/2}} e^{i(\delta_\pi + \delta_K)} \\ \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{2q_\pi^{1/2} q_K^{1/2}} e^{i(\delta_\pi + \delta_K)} & \frac{\eta e^{2i\delta_K} - 1}{2iq_K} \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

En la expresión anterior δ_π y δ_K son los desfases $\pi\pi$ y $K\bar{K}$ respectivamente, η la inelasticidad y q_π (q_K) el momento en el centro de masas para el canal $\pi\pi$ ($K\bar{K}$). Los subíndices 1 y 2 substituirán a π y K algunas veces en la especificación del momento al que nos referimos. Recordamos la expresión de los momentos:

$$q_\pi(s) = \frac{\sqrt{s - 4\mu^2}}{2}$$

$$q_K(s) = \frac{\sqrt{s - 4M^2}}{2} \quad (11.2)$$

donde μ (M) denota la masa del pión (kaón). A continuación resumiremos los resultados que conforman nuestro conocimiento teórico de estas tres amplitudes en el caso de $l = 0$ y $l = 1$.

A. — Analiticidad

Las propiedades de analiticidad de las amplitudes de ondas parciales se obtienen a partir de las de la amplitud completa proyectando en ondas parciales. En este trabajo asumiremos que la amplitud completa posee la analiticidad dada por la representación de Mandelstam. Esto no compromete realmente nuestros resultados ya que nuestro estudio se centra en una región donde la analiticidad demostrada coincide con la máxima analiticidad de primera especie (1). Nuestras consideraciones versarán so-

lo sobre la onda S de isospin cero aunque gran parte de ellas son ciertas para otras ondas e isospines.

Las amplitudes $f_{\pi\pi\rightarrow\pi\pi}^{00}(s)$, $f_{\pi\pi\rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$ y $f_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$ son funciones real analíticas de la variable compleja $s(f(s) = f^*(s^*))$. Estas 3 funciones poseen cortes situados a lo largo del eje real y que se extienden desde $s = 4\mu^2$ hasta el infinito positivo. A estos cortes los llamaremos derechos o directos y son las proyecciones en ondas parciales de los cortes correspondientes a los estados intermedios posibles en el canal s. A lo largo de estos cortes tenemos puntos de ramificación cada vez que s es igual al umbral de producción de un estado físico con los mismos números cuanticos que $\pi\pi$, momento angular cero, e isospin cero. Estos estados en orden de menor a mayor umbral son: 2π , 4π , 6π , $K\bar{K}$, 8π , etc.

Las citadas amplitudes poseen a su vez cortes izquierdos que se extienden a lo largo del eje real en dirección de $s = -\infty$, y que son las proyecciones sobre la onda parcial o de los cortes de las amplitudes totales dados por la unitariedad en los canales t y u. El comienzo de dichos cortes tiene lugar en aquel valor de s donde las mencionadas singularidades de la amplitud completa penetran en la región de $|\cos \theta_s| \leq 1$. Vamos a clarificar este punto determinando dicho valor de s en el caso de la amplitud de $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$.

Empecemos escribiendo:

$$f_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta_s T_{(s,t)}^{I_s=0} \quad (11.3)$$

Se trata en primer lugar de determinar las singularidades de $T_{(s,t)}^{I_s=0}{}_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}$. Estas, vienen asociadas a los posibles estados intermedios con los números cuanticos del canal s, t y u.

Canal s: $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$.

El estado de mínima energía con los números cuanticos de $K\bar{K}$ es $\pi\pi$, de manera que las singularidades dadas por la unitariedad en este canal empiezan en $s = 4\mu^2$ y prosiguen a lo largo del eje real de s en dirección de $s = +\infty$.

Canal: $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$

Al igual que en canal s, tenemos cortes a lo largo del eje real de t empezando en $t = 4\mu^2$.

Canal u: $\bar{K}\bar{K} \rightarrow \bar{K}\bar{K}$.

El estado de mínima energía con estos números cuanticos es $\bar{K}\bar{K}$, luego el umbral de las singularidades se encuentra en $u = 4M^2$.

En resumen, la región de singularidades de la amplitud $T_{KK \rightarrow K\bar{K}}^{I_s=0}(s)$ es la que se muestra en el triangulo de Mandelstam de la figura 1. La amplitud de onda S hereda un corte derecho que empieza en $s = 4\mu^2$ y a su vez un corte izquierdo que comienza en la intersección del cono $|\cos \theta_s| = 1$ con $t = 4\mu^2$. Dado que $\cos \theta_s = 1 + 2t/(s - 4M^2)$, se tiene que dicho cono, para $s \leq 4M^2$, viene dado por $t = 0$ y $t = 4M^2 - s$ cuya intersección con $t = 4\mu^2$ tiene lugar en $s = 4M^2 - 4\mu^2$. Este valor señala pues el comienzo del corte izquierdo de $f_{KK \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$. Utilizando el mismo procedimiento podemos determinar el origen del corte izquierdo de las otras dos amplitudes, siendo este $s = 0$. Aparte de los cortes anteriormente mencionados, ninguna de las 3 amplitudes posee otra singularidad en el plano complejo de s (hoja física). Resumimos en la figura 2 la posición de los cortes de las amplitudes.

B.— Unitariedad

La unitariedad de la matriz S asociada al canal s, se transforma en condiciones particularmente sencillas sobre las amplitudes de ondas parciales. Para el proceso $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ y para $4\mu^2 \leq s \leq 16\mu^2$, la unitariedad elástica se expresa:

$$\Delta_R f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s) / 2i = \frac{2q_\pi}{\sqrt{s}} \left| f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s) \right|^2 ; \quad (11.4)$$

siendo $\Delta_R f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s)$ la discontinuidad a través del corte derecho. En virtud de la real analiticidad de la amplitud el miembro de la izquierda de 11.4 es igual a $\text{Im} f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s + i\epsilon)$ para s y ϵ reales.

Para $s \geq 16\mu^2$ la expresión anterior se modifica mediante la adición al miembro de la derecha de una contribución positiva debida al estado intermedio $\pi\pi\pi\pi$. Cada vez que

un nuevo canal se abre la discontinuidad se incrementa en una cantidad positiva. La dificultad de manejo que presentan los estados intermedios con mas de dos cuerpos se ve compensada, en nuestro caso, por su pequeña contribución a bajas energías. En base a esto prescindiremos de los canales 4π , 6π , 8π . etc. y solo consideramos el canal $K\bar{K}$. En esta aproximación consideraremos válida la expresión 11.4 hasta $s = 4M^2$ y por encima de esta energía queda modificada por:

$$\Delta_R f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s) / 2i = \frac{2q_\pi}{\sqrt{s}} \left| f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s) \right|^2 + \frac{2q_K}{\sqrt{s}} \left| f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) \right|^2 \quad (11.5)$$

El haber despreciado los umbrales inelásticos correspondientes a mas de dos partículas, debe tomarse con reservas en las proximidades de toda energía en la que $|f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}| \cong 0$, ya que en este caso la contribución proveniente de aquellos no es despreciable frente a la de la unitariedad elástica.

Utilizando idénticas premisas podemos escribir las ecuaciones correspondientes a la unitariedad de los procesos $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ y $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$:

$$\begin{aligned} \Delta_R f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) / 2i &= \frac{2q_\pi}{\sqrt{s}} \theta(s - 4\mu^2) f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00*}(s) + \\ &+ \frac{2q_K}{\sqrt{s}} \theta(s - 4M^2) f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00*}(s) \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\Delta_R f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) / 2i = \frac{2q_\pi}{\sqrt{s}} \theta(s - 4\mu^2) \left| f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) \right|^2 + \frac{2q_K}{\sqrt{s}} \theta(s - 4M^2) \left| f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) \right|^2 \quad (11.7)$$

En ambas expresiones $\theta(x)$ indica la función escalon y f^* la compleja conjugada de f . Hacemos notar que para $s \leq 4M^2 - 4\mu^2$ no podemos substituir $\Delta_R f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s) / 2i$ por $\text{Im} f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$, ya que la discontinuidad total a través del eje real es ahora $\Delta_R f + \Delta_L f$, siendo $\Delta_L f$ la discontinuidad a través del corte izquierdo.

Una forma muy conveniente de escribir las ecuaciones de unitariedad (11.5 - 7) es, utilizando el formalismo matricial. Las tres expresiones anteriores se reducen a:

$$\Delta_R f_{\pi\pi}^{00}(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} f_{\pi\pi}^{00}(s) \text{Re } Q f_{\pi\pi}^{00*}(s), \quad (11.8)$$

donde Q es la matriz diagonal de los momentos

$$Q = \begin{pmatrix} q_\pi & 0 \\ 0 & q_K \end{pmatrix}$$

y $\text{Re } Q$ indica la parte real de esta. Podemos ahora reescribir la expresión II.8 de una forma más cómoda:

$$\text{Im } f(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} f(s) \text{Re } Q f(s)^* + \Delta_L f(s) / 2i, \quad (\text{II.9})$$

donde:

$$\Delta_L f(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_L f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}} \end{pmatrix}$$

que es distinto de cero para $s \leq 4M^2 - 4\mu^2$.

C.— Cruce.

En este trabajo no vamos a utilizar todas las condiciones que, sobre la onda S se deducen de cruce. Solamente utilizaremos una condición que se deduce del cruce y de las relaciones de dispersión a s fijo. Esta condición nos da la estructura de la discontinuidad a través del corte izquierdo de $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ en función de la del corte derecho y viene dada por la proyección de Froissart-Gribov. La expresión reza:

$$\Delta_L f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}} = \frac{1}{S - 4M^2} \sum_{I'I'} \int_{4\mu^2}^{4M^2 - S} C_{st}^{OI'} (2I' + 1) P_{I'}(\cos \theta_u) \Delta_R f(u)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{I'I'} du \quad (\text{II.10})$$

siendo $C_{st}^{OI'}$ el elemento OI' de la matriz de cruce $s - t$. Ahora se puede relacionar Δ_R con $f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}$ para todas las ondas e isospines utilizando la relación II.7.

D.— Comportamiento umbral.

En los umbrales de $\pi\pi$ y $K\bar{K}$ las ondas parciales se comportan de la siguiente manera:

$$f_{ij}^{II}(s) \sim \text{cte} \times q_i^I q_j^I \quad (\text{II.11})$$

Para las amplitudes de $I=0$ y $I=0$ la condición II. 11 implica que estas se comportan como constantes en ambos umbrales. Usaremos, no obstante, del comportamiento umbral para poder truncar la expresión II. 10 en una determinada onda parcial. El valor de $f(s)^0$ en los umbrales $\pi\pi$ y $K\bar{K}$ coincide con el valor de las longitudes de difusión para los distintos procesos.

Todas las condiciones anteriormente expuestas serán utilizadas en lo que sigue en combinación con los datos experimentales para obtener una forma funcional de las amplitudes que satisfaga todos los requisitos teóricos y se ajuste a nuestra información experimental. Disponer de esta forma funcional es esencial para poder extrapolar fuera de la región medida y determinar todos los parámetros de interés físico: i) la posición de los polos en hojas no físicas, ii) las longitudes de difusión, iii) la forma funcional de los desfases y fases propias.

Un interés adicional es el de determinar si los datos experimentales son compatibles con analiticidad. Esto es particularmente interesante por encima del umbral $K\bar{K}$ donde los desfases e inelasticidades no son únicos, sino que están sujetos a ambigüedades. Para concluir este capítulo comentaremos, que el lector interesado puede encontrar una aproximación simple a los resultados contenidos en este capítulo en las referencias 3 y 4. Para un estudio más exhaustivo y riguroso pueden consultarse las referencias 1 y 2.

III. TRABAJOS ANTERIORES

Este capítulo pretende introducir al lector en los métodos que han sido utilizados para construir amplitudes dependientes de la energía para los procesos $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ y $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ de onda S e isospin cero. Nuestras consideraciones se concentran sobre los análisis de Hyams *et al.* (5) y Protopopescu *et al.* (6). Este último es de alcance mas limitado, ya que solo abarca la región comprendida entre 500 y 1150 MeV. También comentaremos el análisis de Estabrooks y Martin (7) y Cerrada *et al.* (8) el cual incorpora y resuelve algunos de los problemas que presentaremos a continuación respecto de los trabajos precedentes.

Empezaremos por describir brevemente el formalismo de la matriz K , en el cual se basa el análisis de Hyams *et al.* Supongamos que prescindimos de los cortes correspondientes a estados intermedios de más de dos cuerpos, y también de todos los cortes izquierdos de las amplitudes. En este caso, la expresión II.8 se reduce a:

$$\text{Im}f(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} f(s) \text{Re } Q(s) f(s)^*, \quad (\text{III.1})$$

Multiplicando la expresión anterior por la izquierda por $f(s)^{oo-1}$ y por la derecha por $f(s)^{oo* -1}$ resulta:

$$\text{Im}f(s)^{oo-1} = \frac{2}{\sqrt{s}} \text{Re } Q, \quad (\text{III.2})$$

Si definimos ahora

$$K(s)^{-1} = f(s)^{-1} + \frac{2i}{\sqrt{s}} Q(s) \quad (\text{III.3})$$

la condición de unitariedad III.2 queda reducida a la condición de que $K(s)$ sea una matriz real. Extendamos ahora $Q(s)$ a todo el plano complejo dando una determinación de la raíz cuadrada que aparece en la definición de $q_\pi(s)$ y $q_K(s)$. La determinación escogida es aquella para la cual $\text{Im}q_\pi(s) \geq 0$ e $\text{Im}q_K(s) \geq 0$ (hoja física) para todo s complejo. Tomando III.3 como la definición de $K(s)$ en todo el plano complejo podemos darnos cuenta de que $K(s)$ será una matriz de elementos funciones reales analíticas de la variable s . Esta condición junto con la realidad de K sobre el eje real, nos dice que los elementos de $K(s)$ no poseen cortes sobre dicho eje. Invirtiendo la argumentación, podemos concluir que dada K matriz simétrica, real analítica y libre de cortes podemos construir una nueva matriz:

$$f(s)^{oo} = (K(s) - \frac{2i}{\sqrt{s}} Q(s))^{-1} \quad (\text{III.4})$$

cuyos elementos poseen los cortes y las discontinuidades requeridas por unitariedad. Este hecho es de gran utilidad, ya que es relativamente sencillo escribir una parametrización concreta que describa una función meromorfa, y por tanto, dar una forma explícita a los elementos de la matriz K .

En concreto, Hyams *et al*/ eligen la siguiente expresión para la matriz $\bar{K} = 2K/\sqrt{s}$:

$$\bar{K}_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{s_1^0 - s} + \frac{\beta_i \beta_j}{s_2^0 - s} + \gamma_{ij}, \quad (III. 5)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, s_1^0$ y s_2^0 son constantes reales que se determinan ajustando a los momentos experimentales, en la reacción $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$, promediados en la transferencia de momento al cuadrado entre los dos nucleones. El ajuste se realiza utilizando expresiones análogas a la de la onda S, para una serie de ondas parciales.

Protopopescu *et al*. parametrizan la matriz $f(s)^{00}$ usando la matriz $M = \bar{K}^{-1}$, cada elemento de la cual escriben como un polinomio de segundo grado en s . Los coeficientes son determinados ajustando esta onda junto con otras a los momentos experimentales extrapolados a $t = \mu^2$, para la reacción $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^- \Delta^{++}$.

Las limitaciones de las parametrizaciones anteriormente citadas se desprenden, en primer lugar, del contexto en el que estas han sido deducidas. Las hipótesis en cuestión, se reducen a dos: i) la matriz $K(s)$ no posee cortes izquierdos, ii) la matriz K no posee cortes derechos asociados a estados intermedios de mas de dos cuerpos. Nuestro problema ahora, sera el de ver en que medida se pueden justificar estas hipótesis y de que manera los resultados obtenidos dependen de esta elección.

En primer lugar señalaremos que la justificación de una parametrización de este tipo depende, de entre otras cosas, de la región en la cual se supone va a ser válida. Nosotros estamos interesados en reproducir la forma funcional de las amplitudes en la región en la que vamos a utilizar datos experimentales $600 \text{ MeV} \leq \sqrt{s} \leq 1900 \text{ MeV}$. No obstante, este no es nuestro único interés. También pretendemos conocer el valor de las amplitudes fuera del eje real, y en concreto en las hojas no físicas y deseamos, a su vez, poder extrapolar al umbral $\pi\pi$. Todas estas pretensiones constituyen un criterio bajo el cual discernir si una determinada hipótesis puede ser considerada aceptable ó no. Como hipótesis de trabajo asumiremos que las singularidades alejadas de la región de interés no afectan a nuestros resultados. En virtud de este supuesto podemos prescindir de aquellos cortes izquierdos que comienzan en $s = 0$. No podemos decir lo mismo, sin

embargo, del corte con origen en $s = 4M^2 - 4\mu^2$ por su proximidad a la región de interés. Por lo tanto, en base a la proximidad, no tenemos ninguna razón para despreciarlo. Ahora bien, ¿a que puede afectar el no tenerlo en cuenta? ¿Puede acaso alterar la dependencia en s de las amplitudes $f(s)_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}$ y $f(s)_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}$ que no poseen dicho

corte? . La contestación es sí, aunque puede que no demasiado. Esto sale al paso de una serie de comentarios mantenidos en correspondencia privada con E.J. Squires é incluso manifestadas en un artículo de esta autor (9). La respuesta afirmativa se debe a que , aunque las citadas amplitudes no poseen dicho corte, estan relacionadas a través de la unitariedad con $f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$ que si lo posee. Para contruir la amplitud $f(s)_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}$ se necesi-

ta conocer $|f(s)_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}|^2$ para s real $\geq 4M^2$. Esta última cantidad es el módulo al cuadra-

do de una función con cortes, y tal que la discontinuidad a través de estos para $s \geq 4M^2$ es función, via unitariedad, del valor de $f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$ que sí posee el corte izquierdo. La cadena de dependencias establecida entre las amplitudes muestra nuestro aserto, aunque obviamente la relevancia de la presencia de dicho corte es menor para las dos primeras amplitudes que para la correspondiente a $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$. Como conclusión, cabe esperar que los polos en hojas no físicas, comunes a las tres amplitudes, no dependan crucialmente de dicho corte. Por el contrario las fases propias y la sección eficaz $K\bar{K}$ en las proximidades de $s = 4M^2$ si resultan sensibles, en principio, a una parametrización que incluya ó no el corte izquierdo.

Los cortes multipliónicos pueden influir en las tres amplitudes indistintamente. Estos, añaden una contribución extra a la discontinuidad a través de los cortes derechos. A excepción de los puntos de ramificación, su presencia no añade nada cualitativamente nuevo a la estructura analítica de las amplitudes. Con cierto nivel de confianza, podremos despreciarlos siempre que dicha contribución sea pequeña frente a la que proviene de los canales $\pi\pi$ y $K\bar{K}$. Experimentalmente, este parece ser el caso excepto en las proximidades del umbral $K\bar{K}$ donde $|f(s)_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}|^2 \cong 0$ ($\delta_\pi \cong 180^\circ$). Por encima de 1300 Mev, la contribución pudiera ser algo mas grande como para afectar, aunque no drasticamente, a los resultados.

El análisis que aquí presentamos da cuenta de una de las dificultades anteriormente citadas, que se refiere a la no inclusión del corte izquierdo de $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ en la parametrización de las amplitudes. La necesidad de introducirlo, que tiene como contrapartida la mayor complicación de los cálculos, es aún mayor debido a la inclusión que hacemos de datos que nos informan acerca de $f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$. El mejor test de que estos datos dependen y son sensibles a la presencia del corte izquierdo, es la condición de consistencia, deducida de cruce, que presentamos en el capítulo VIII.

Para terminar estas consideraciones sobre las limitaciones de las parametrizaciones de Hyams y Protopopescu, añadiremos que el análisis de este último tiene una desventaja adicional. El haber parametrizado la matriz M como un polinomio en s constriñe a las fases propias a no cruzar ningún múltiplo de π , cosa que ocurriría si M tuviera un polo. El lector puede encontrar algunas de las observaciones anteriormente expuestas de una manera mas extensa y con un planteamiento algo distinto en varios trabajos de Yndurain (10)(11). La referencia 12 recoge también algunas de estas críticas aparte de una descripción mas extensa del formalismo multicanal de la matriz K .

Aparte de los trabajos ya mencionados existen muchos otros que adolecen de los mismos defectos que los anteriores y otros tantos con un interés mas restringido fundamentalmente el de estudiar el S^* . Nos ocuparemos de estos últimos en el capítulo VIII. En cuanto al análisis de Estabrooks y Martín (7), su limitación radica en que no se trata de un análisis multicanal y cabe pues cuestionar la fiabilidad del método. Existe, no obstante, un trabajo, el de Cerrada *et al* (8) que incorpora la presencia del corte izquierdo, que empieza en $s = 4M^2 - 4\mu^2$, en todos los elementos de la matriz K . Sin embargo la forma de la parametrización:

$$\bar{K}_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j}{m^2 - s} + \gamma_{ij} \left(1 - \frac{4M^2 - 4\mu^2}{s}\right)^{3/2} + h_{ij} \quad (\text{III.6})$$

la más sencilla que incorpora la estructura del punto de ramificación, no puede satisfacer las condiciones que imponen que el corte izquierdo aparezca solamente en $f(s)_{KK \rightarrow KK}^{\pi\pi}$ y no en la demás amplitudes. Esta dificultad ha sido esquivada por los autores, añadiendo al χ^2 que se minimiza, una contribución debida a la violación de unitariedad que resulta de la incorrecta presencia de dicho corte en las dos amplitudes con dos piones en el estado inicial. Es difícil precisar, en que medida se consigue salvar la citada dificultad, por este procedimiento. En cualquier caso, sus resultados constituyen una estimación de la importancia que tiene la inclusión del corte izquierdo en una parametrización de estas amplitudes.

A continuación, señalaremos otra de las dificultades ó limitaciones de los análisis anteriores a este. Las ya citadas se referían exclusivamente a la manera en la cual las parametrizaciones de las amplitudes daban cuenta de la analiticidad y unitariedad de estas. Energía a energía, la unitariedad reduce la determinación de las amplitudes a la de tres parametros reales: δ_π , η , δ_K (ó K_{11} , K_{12} y K_{22}). Los análisis anteriormente mencionados, a excepción del de Cerrada, solo utilizan información experimental sobre δ_π y η , con lo que δ_K queda totalmente indeterminada. La ficticia unicidad del resultado final se debe a la elección de una parametrización determinada para la matriz

K. De hecho, la información disponible por estos autores equivale al conocimiento de la función:

$$h(s) = K_{11} + iq_2(s) \frac{K_{12}^2}{1 - iq_2 K_{22}} \quad (\text{III.7})$$

que es real para $s \leq 4M^2$ y compleja por encima de este valor. Esta dificultad no se puede subsanar utilizando analiticidad en s , para verlo basta reescribir III.7 en la forma:

$$h(s) = K_{11} - q_2^2 \frac{K_{12}^2 K_{22}}{1 + q_2^2 K_{22}^2} + iq_2 \frac{K_{12}^2}{1 + q_2^2 K_{22}^2} \quad (\text{III.8})$$

Esto muestra como $h(s) = g^{(2)}(s) + iq_2 g^{(1)}(s)$, siendo $g(s)$ una función memoria (sin cortes derechos), y por lo tanto no nos es posible conocido $h(s)$ construir K_{11} , K_{12} y K_{22} . Está, en nuestra opinión, es una dificultad mas seria que la correspondiente a la forma de la parametrización, pero lleva incluida la necesidad de introducir el corte izquierdo en la amplitud $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$. Para salvar la incompletitud experimental, el análisis de Cerrada *et al.* utiliza información proveniente del experimento de antiprotones a 750 MeV/c, realizado en la cámara de burbujas del CERN y analizado por el grupo de altas energías de la JEN en Madrid. En el presente trabajo presentamos un análisis con toda la estadística de este experimento. Pero antes de presentar esta análisis y los resultados que se desprenden de él, nos ocuparemos de deducir una parametrización que, de manera correcta, incorpore la presencia del corte izquierdo. Este es el objeto del capítulo siguiente.

IV. DEDUCION DE UNA PARAMETRIZACION CORRECTA

Este capítulo está dedicado al problema de parametrizar las amplitudes $f(s)_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}$ de manera que su estructura analítica sea la correcta, en base a las hipótesis precedentes, y la unitariedad se satisfaga. Necesitamos por lo tanto reproducir los cortes derechos asociados a los estados intermedios $\pi\pi$ y $K\bar{K}$, y además el corte izquierdo que empieza en $s = 4M^2 - 4\mu^2$ para $f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$. Sobre los cortes derechos las ecuaciones de unitariedad II.8 deben satisfacerse.

Para resolver este problema resulta particularmente interesante el pasar a la matriz K y ver como se modifica su estructura analítica en presencia del corte izquierdo de $f(s)_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$. En base a la definición de la matriz K (capítulo III) podemos concluir: 1) la matriz $K(s)$ es real analítica; 2) No posee cortes derechos (en nuestra aproximación de haber despreciado los estados finales de mas de dos cuerpos); 3) posee un corte izquierdo que empieza en $s = 4M^2 - 4\mu^2$ y se propaga a lo largo del eje real hacia $s = -\infty$; 4) la discontinuidad a lo largo de dicho corte satisface:

$$\Delta_L K(s) = (I + \frac{2i}{\sqrt{s}} K(s) Q(s)) \Delta_L f(s) (I + \frac{2i}{\sqrt{s}} Q^*(s) K^*(s)) \quad (IV.1)$$

Esta ecuación matricial es equivalente a las siguientes tres ecuaciones reales:

$$\frac{\text{Im} K_{22}(s)}{|1 - \frac{2i}{\sqrt{s}} q_2 K_{22}(s)|^2} = \frac{1}{2i} \Delta_L f_{22}(s). \quad (IV.2)$$

$$(1 + \frac{2}{\sqrt{s}} |q_2| \text{Re} K_{22}(s)) \text{Im} K_{12}(s) - \frac{2}{\sqrt{s}} |q_2| \text{Re} K_{12}(s) \text{Im} K_{22}(s) = 0 \quad (IV.3)$$

$$\text{Im} K_{11}(s) \text{Im} K_{22}(s) - \text{Im} K_{12}^2(s) = 0. \quad (IV.4)$$

La primera de estas tres ecuaciones relaciona solamente $K_{22}(s)$ con la discontinuidad a través del corte izquierdo. En nuestro problema vamos a suponer que dicha discontinuidad no nos la damos, con lo que en principio $K_{22}(s)$ es arbitraria (siempre que posea la estructura analítica dada) y IV.2 no es una condición a cumplir, sino un criterio para construir $\Delta_L f_{22}$. Tenemos pues que satisfacer IV.3 y IV.4. La primera de estas dos ecuaciones relaciona K_{12} y K_{22} , mientras que la segunda relaciona las tres cantidades. Deberemos, pues, resolverlas en orden.

A pesar de que no lo utilizaremos aquí, vamos a dar la solución a la ecuación IV.2 en el caso en que $\Delta_L f_{2,2}(s)$ sea un dato del problema. Para ello formemos la función:

$$\theta(s) = \frac{K_{2,2}(s)}{1 - \frac{2iq_2(s)}{\sqrt{s}} K_{2,2}(s)} \quad (IV.5)$$

Es fácil darse cuenta de que $\theta(s)$ es una función real analítica con un corte derecho que empieza en $4M^2$ y un corte izquierdo comenzando en $s = 4M^2 - 4\mu^2$. Estos dos cortes no se solapan. Además, sobre el corte derecho $\theta(s)$ satisface a la unitariedad elástica:

$$\text{Im}\theta(s) = \frac{2q_2}{\sqrt{s}} \left| \theta(s) \right|^2,$$

y sobre el corte izquierdo $\Delta_L \theta(s) = \Delta_L f_{2,2}(s)$. Vemos como nuestras condiciones son idénticas a las que se resuelven con el método N/D (3). Aplicando dicho método podemos encontrar $\theta(s)$ hasta el punto en que la arbitrariedad de CDD lo permite. Despejando ahora $K_{2,2}$ de IV.5, tenemos ya la solución a la ecuación IV.4.

Tras esta digresión sobre una variante mas compleja de nuestro problema, vamos ahora a resolver las otras dos ecuaciones. Definamos la función

$$\alpha(s) = 1 - \frac{2iq_2}{\sqrt{s}} K_{2,2}(s) \quad (IV.6)$$

la cual posee un corte izquierdo que le viene de $K_{2,2}$ y un corte derecho que recibe de q_2 . De nuevo, estos cortes no se solapan y podemos reescribir la ecuación IV.3 en la forma:

$$\text{Im}(K_{2,2}(s) \alpha^*(s)) = 0 \quad (IV.7)$$

Tomemos ahora $\chi(s) = K_{1,2}(s)/\alpha(s)$. En virtud de la expresión anterior y de la real analiticidad de $\chi(s)$, podemos concluir que esta función no posee corte izquierdo. Como contrapartida, posee un corte derecho, sobre el cual, la fase de $\chi(s)$ es igual y de signo contrario a la fase de $\alpha(s)$.

Definamos ahora la función $\chi^{(1)}(s)$ de la siguiente manera:

$$\chi^{(1)}(s) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{\text{atan} \left(\frac{2}{\sqrt{s'}} q_2(s') K_{2,2}(s') \right) (s - A)}{(s' - s)(s' - A)} \right] \quad (IV.8)$$

Mas adelante, veremos las condiciones necesarias, para que la definici3n anterior tenga sentido. Podemos darnos cuenta de que la funci3n $\chi^{(0)}(s) = \chi(s) / \chi^{(1)}(s)$ es real analftica y libre de cortes en todo el plano complejo de s. Concluimos, por lo tanto, que dado K_{22} y una funci3n real analftica, arbitraria, libre de cortes $\chi^{(0)}(s)$, podemos construir $K_{12}(s)$ de manera que la ecuaci3n IV.3 se satisfaga. La expresi3n de K_{12} es:

$$K_{12}(s) = \alpha(s) \chi^{(1)}(s) \chi^{(0)}(s) \quad (IV.9)$$

donde $\chi^{(1)}(s)$ se define en la relaci3n IV.8 y $\alpha(s)$ en la IV.6.

Vamos ahora, a resolver la ecuaci3n IV.4, es decir, construyamos $K_{11}(s)$ de manera qu3 dadas $K_{22}(s)$ y $K_{12}(s)$ la ecuaci3n IV.4 se satisfaga. Como en el caso anterior, transformaremos esta condici3n en una mas manejable:

$$\text{Im}K_{11} = \frac{2iq_2}{\sqrt{s}} \text{Im}K_{12} \frac{K_{12}}{\alpha} \quad (IV.10)$$

A3n podemos transformarla, una vez m3s, utilizando el hecho de que K_{12}/α es real a lo largo del corte izquierdo. Nos queda:

$$\text{Im}K_{11} = \text{Im}\left(\frac{2iq_2}{\sqrt{s}} \frac{K_{12}^2}{\alpha}\right) \quad (IV.11)$$

La expresi3n anterior nos permite construir la siguiente funci3n sin corte izquierdo:

$$h(s) = K_{11} + \frac{2iq_2}{\sqrt{s}} \frac{K_{12}^2}{\alpha} \quad (IV.12)$$

Esta funci3n posee, sin embargo, un corte derecho empezando en $s = 4M^2$ de manera que la parte imaginaria a lo largo de este corte viene dada por:

$$\text{Im}h(s) = \frac{2q_2}{\sqrt{s}} \frac{K_{12}^2}{|\alpha|^2} \quad (IV.13)$$

Definamos ahora la funci3n real analftica:

$$h^{(1)}(s) = \frac{\sqrt{s}}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{K_{12}^2(s') 2q_2(s')}{s' |\alpha(s')|^2 (s' - s)} ds' \quad (IV.14)$$

De nuevo, posponemos la discusión sobre la convergencia de la integral anterior. En términos de $h_{(s)}^{(1)}$ podemos definir:

$$h_{(s)}^{(0)} = h_{(s)} - h_{(s)}^{(1)} \quad (\text{IV.15})$$

que es una función real analítica y libre de cortes, así que procediendo en sentido inverso encontramos que

$$K_{11}(s) = h_{(s)}^{(1)} + h_{(s)}^{(0)} - \frac{2iq_2(s)}{\sqrt{s}} \frac{K_{12}^2(s)}{\alpha(s)} \quad (\text{IV.16})$$

satisface a la ecuación IV.4. Esta expresión junto con la IV.9 constituyen la solución al problema planteado en términos de tres funciones arbitrarias pero de estructura analítica conocida $K_{22}(s)$, $\chi_{(s)}^{(0)}$ y $h_{(s)}^{(0)}$.

Volvamos ahora a las expresiones IV.8 y IV.14 para dar sentido a las integrales que allí aparecen. Ante todo, debemos mencionar que se podían haber utilizado expresiones varias veces substraídas para $\chi_{(s)}^{(1)}$ y $h_{(s)}^{(1)}$, en términos de las cuales podríamos haber obtenido igualmente la solución. La arbitrariedad que acarrea el número de subtracciones elegido va incluida en la arbitrariedad de $h_{(s)}^{(0)}$ y $\chi_{(s)}^{(0)}$. Hemos elegido, no obstante, las expresiones IV.8 y IV.14 por simplicidad, y porque resultan bastante plausibles las hipótesis, bajo las cuales, estas tienen sentido. Damos a continuación un conjunto de condiciones suficientes para que $h_{(s)}^{(1)}$ y $\chi_{(s)}^{(1)}$ estén bien definidos:

1. $K(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow +\infty$ a lo largo del eje real
2. $K_{ij}(s)$ solo posee polos simples para $s > 4M^2$. Estos polos aparecen en todos los elementos de la matriz $K(s)$ y sus residuos están factorizados de manera que $\det K/K_{ij} = \text{cte} \neq 0$ en las posiciones de los polos.
3. $K_{ij}(4M^2) = \text{cte}$.

Estas condiciones, cuyo sentido físico discutiremos a continuación, se deduce de la estructura analítica, comportamiento umbral, etc. (capítulo II) junto con las siguientes condiciones sobre las amplitudes:

4. $|f_{ij}(s)| \rightarrow 0$ para $s \rightarrow \infty$ a lo largo del eje real.
5. $|f_{12}(s)| \neq 0$ para $s \geq 4M^2$

6. La función $(1 + \frac{2iq_1}{\sqrt{s}} f_{11})(1 + \frac{2iq_2}{\sqrt{s}} f_{22}) - \frac{4q_1 q_2}{s} f_{12}^2$ posee unicamente ceros simples a lo largo del corte derecho, para $s \geq 4M^2$.

7. $f_{11}(4M^2) \neq \frac{i}{\sqrt{4M^2 - 4\mu^2}}$.

La condición 1, y su equivalente la 4, implican que $\eta \rightarrow 1$, $\delta_\pi \rightarrow n\pi$ y $\delta_K \rightarrow m\pi$ para $s \rightarrow +\infty$, con n, m número naturales. Esto es equivalente a suponer que la matriz **S** correspondiente a $l = 0$, tiende a **I** cuando $s \rightarrow \infty$. Aun cuando esto no suceda, podremos siempre modificar las definiciones anteriores, siempre que **K**(s) esté acotada por un polinomio para $s \rightarrow \infty$. La condición 2 está justificada en base a las hipótesis mas admitidas de como parametrizar la matriz **K**. Según estos planteamientos, los polos de la matriz **K** en el eje real (fases propias resonantes) se corresponden con los polos en hojas no físicas de la matriz **f**, asociados a resonancias. La condición de polo simple se corresponde con la forma Breit-Wigner en ausencia de fondo. Excluimos pues a los dipolos. La condición de factorización, contenida en 2, restringe la posibilidad de que ambas fases propias resuenen a la vez. Las condiciones 5 y 6 son equivalentes a la 2. La condición 7, que implica la 3, se ha introducido por simplicidad, pero es trivial ver que modificando las definiciones de $\chi^{(1)}$ y $h^{(1)}$ se puede rebajar substancialmente esta hipótesis. Concluimos pues, que la solución que damos al problema planteado abarca la generalidad de los casos de interés físico, en mayor medida habida cuenta de que a efectos prácticos nos basta con que la solución sea localmente correcta en la región donde disponemos de datos experimentales. La deducción que hemos presentado puede verse en la referencia 13.

V. CONSIDERACIONES SOBRE LOS DATOS EXPERIMENTALES

Habiendo salvado una de las dificultades que mencionamos en el Capítulo III respecto de la manera de extraer de los datos experimentales una forma funcional fiable para las amplitudes en cuestión, queda aún por solventar otra de las dificultades aludidas: la falta de completitud de los datos experimentales. Dedicamos este capítulo a hacer una serie de comentarios sobre la manera en la cual esto se ha hecho, incluyendo algunas consideraciones sobre el conjunto de desfasajes e inelasticidades $\pi\pi$ que utilizaremos en el capítulo siguiente en nuestro ajuste.

En este trabajo se utiliza el conjunto de desfasajes $\pi\pi(\delta_\pi)$ e inelasticidades (η) provenientes del análisis en desfasajes independiente de la energía de Hyams *et al* (5). Estos datos cubren la región de energías comprendida entre los 600 MeV y los 1900 MeV. Están extraídos del experimento $\pi^-p \rightarrow \pi^+\pi^-n$ a 17.2 GeV/c realizado por la colaboración CERN-Munich. Los datos en cuestión se obtienen ajustando a los momentos experimentales integrados sobre $0.01 \leq t \leq 0.15$ (GeV/c)² (siendo t la transferencia de momento al cuadrado entre los nucleones) en base a las hipótesis de Ochs y Wagner (14). Para realizar este ajuste se limita el número de ondas parciales que contribuyen en cada energía, y las ambigüedades que aparecen, se eliminan, incluyendo en el χ^2 del ajuste un término que mide la separación de las amplitudes respecto de las determinadas en el análisis dependiente de la energía de estos mismos autores. Vemos, pues, como en cierta manera este análisis no es del todo independiente de la energía. No es mi intención el extenderme mucho en consideraciones sobre los datos experimentales, pero creo necesario el justificar, al menos, mi elección. Para energías inferiores a 1 GeV no hay diferencias substanciales entre la utilización de unos desfasajes u otros. La histórica ambigüedad "up-down" queda resuelta por debajo de la masa del ρ por la unitariedad, y por encima utilizando la información de $\pi^0\pi^0$. Aun queda, no obstante, una ambigüedad continua debido a la presencia de los canales con más de dos piones (10), pero parece que, quizás su influencia no sea muy grande salvo en $E = .99$ GeV donde $\delta_\pi \cong 180^\circ$. De hecho, para esa energía uno puede darse cuenta de que el desfasaje no se comporta de forma suave. A energías superiores a 1 GeV, la situación experimental no es tan clara y existe una ambigüedad continua y otra discreta (ceros de Barrelet) en los desfasajes e inelasticidades. Para eliminar estas ambigüedades, diversos autores utilizan el hecho de que las ondas D y F está dominadas por los mesones f y g respectivamente y que, por lo tanto, se comportan como funciones de Breit - Wigner. Existe una extensa literatura sobre la solución de estos problemas (Ver, por ejemplo, las referencias 3 y 27) y no es mi intención citarla aquí. Solamente añadiré que de las soluciones posibles, la correspondiente a los desfasajes de Hyams parece ser la mas plausible. Hay, no obstante, en la literatura otros conjuntos de

desfasajes cualitativamente iguales pero cuantitativamente un poco distintos, obtenidos del mismo experimento ó de otros en base a distintos métodos de extracción de los desfasajes. El parecido de los resultados, da confianza sobre la veracidad de los métodos de extrapolación utilizados. Aparte de los resultados de Hyams, los de Estabrooks y Martín (7) parecen ser los mas fiables. Por el momento no se puede hacer nada mas, y habrá que esperar a que se realicen medidas mas precisas de $\pi^0\pi^0$ y/o $\pi\pi\rightarrow K\bar{K}$ y $\pi\pi\rightarrow n\pi$ ($n > 2$) para dejar definitivamente sentado el tema.

Vamos ahora a discutir la manera en la que se puede incorporar información sobre el proceso $K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}$. Como mencionamos en el Capítulo III, esta información es necesaria si queremos determinar las tres amplitudes a la vez y libramos de la ficticia unicidad que surge de una parametrización concreta, en favor de una solución más real. Por el momento, los datos $KN\rightarrow K\bar{K}$ no son lo suficientemente precisos, como para salvar la dificultad que supone extrapolar a $t = M^2$, tan alejado de la región física. Por este motivo, resulta necesario buscar un proceso para el que haya suficiente estadística, y que en virtud de una serie de hipótesis sobre el mecanismo de producción, podamos relacionarlo con los procesos que aquí nos ocupan. En este trabajo, como en las referencias 8 y 15, hemos utilizado información sobre los procesos $p\bar{p}\rightarrow K\bar{K} + n\pi$ con $n = 1, 2$. Estos datos provienen de un experimento realizado en la cámara de burbujas de 80 cm del CERN y analizado por la colaboración J.E.N. — Bombay — CERN — College de France (JBCC). El momento de los antiprotones en el laboratorio es 700 MeV/c para parte de la muestra total, y 760 MeV/c para el resto.

La distribución de masa $K\bar{K}$ en ambas reacciones muestra un pico en las proximidades del umbral, cuyos números cuanticos han sido analizados, y resultan ser compatibles con la asignación $J^P = 0^+$ y tener $I = 0$ con 99% de nivel de confianza. Este hecho muestra como en una parte significativa de los sucesos para estos procesos, el kaón y el antikaón se producen asociadamente, y esto nos da la esperanza de relacionar el espectro de masa $K\bar{K}$ con η , δ_π y δ_K . A continuación haremos una serie de hipótesis que nos permitan encontrar una relación explícita entre estos nuevos datos experimentales y las amplitudes de los procesos que estamos considerando.

Respecto del análisis de los datos del experimento de antiprotones y una primera relación con η , δ_π y δ_K , podrá encontrar el lector información detallada en la referencia 16. Una buena parte de la estadística total fue analizada por el grupo de la JEN anteriormente, y el conjunto de sus resultados puede encontrarse en las referencias, 16, 8 y 15. En estos análisis se ha intentado reproducir todas las distribuciones de cada par de partículas tomando toda una serie de posibles estados finales, que incluyen resonancias parametrizadas como funciones de Breit-Wigner

respecto de los productos finales de su desintegración. Los resultados de este ajuste arrojan una medida cuantitativa de cuales son las contribuciones de cada canal a nuestros estados finales. Mas aún, en ellos se ve con claridad la necesidad de efecto umbral $K\bar{K}$ para explicar los datos. De este efecto se ha dado cuenta parametrizandolo como una resonancia (S^*) de masa y anchura a determinar en el ajuste. De esta manera se consigue extraer el porcentaje y la forma del fondo que acompaña a este efecto en la distribución de masa $K\bar{K}$. Se ve, por ejemplo, como el canal $K^*\bar{K}^*$ contribuye en un 30% a la distribución de masa $K\bar{K}$ para el estado final $K\bar{K}\pi\pi$. Este análisis muestra, además, como las posibles interferencias entre distintos canales no parecen ser muy importantes. Esto justifica la primera de nuestras hipótesis que consiste en escribir la distribución de masa $K\bar{K}$ como la suma de dos términos:

$$P_i^{K\bar{K}}(s) = N_i(s) [A_i |T|^2 + (1 - A_i)B_i(s)]; \quad (V.1)$$

El índice i toma los valores 1 y 2 correspondientes a las reacciones $p\bar{p} \rightarrow K^0\bar{K}^0\pi^+\pi^-$ y $p\bar{p} \rightarrow K^0\bar{K}^0\pi^0\pi^0$ respectivamente. $N_i(s)$ es el producto de un factor de normalización conveniente por el volumen del espacio de fases. $T(s)$ es la amplitud correspondiente a la producción del efecto umbral, mientras que $B_i(s)$ es el fondo estimado para cada proceso.

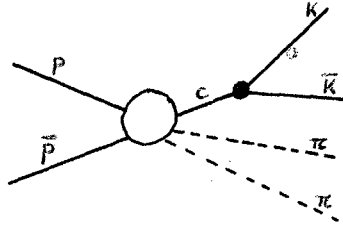
La constante A_i da cuenta de la importancia relativa de cada término en la reacción i .

El siguiente paso consiste ahora en escribir $|T|^2$ de manera que resulte obvia su relación con la colisión $\pi\pi$ y $K\bar{K}$. lo escribiremos de la siguiente forma:

$$|T|^2 = \sin^2 \delta^{(-)} \sin^2 \theta; \quad (V.2)$$

donde $\delta^{(-)}$ es una fase propia y θ y el ángulo que diagonaliza la matriz S . Esta expresión es una generalización natural del factor umbral de Watson (17) para el caso de dos canales acoplados. Este factor es $\sin^2 \delta$ para el caso de un solo canal y su aparición se debe al teorema de interacción en el estado final bajo ciertas hipótesis suplementarias (17)(18)(19). Evidentemente este teorema es de difícil justificación en un proceso de producción fuerte con tal número de partículas en el estado final. No obstante, tomado como hipótesis dinámica resulta plausible habida cuenta de que el comportamiento de $P_i^{K\bar{K}}(m_{K\bar{K}}^2)$ es muy rápido en las proximidades del umbral y es poco probable que ambas fases propias se comporten de manera tal. Por lo tanto, al igual que la hipótesis de factorización, la mayor fiabilidad de nuestra hipótesis descansa en el comportamiento rápido que se procura reproducir. Las correcciones que pudiera

haber a nuestra expresión podemos considerarlas incluidas en el fondo siempre que estas no tengan una fuerte estructura. A título informativo señalaremos la idea física que subyace a nuestra hipótesis de una manera distinta, cuya relación con el teorema de interacción en el estado final se puede ver siguiendo líneas parecidas a las de la referencia 20. Según este punto de vista la hipótesis dinámica que hemos hecho equivalente a imaginar que el proceso en cuestión tiene lugar a través del diagrama siguiente:



donde c es uno de los autoestados de la matriz S correspondiente a la difusión de los canales $\pi\pi$ y $K\bar{K}$. El vértice negro es proporcional a $\sin^2 \delta^{(-)} \sin^2 \theta$, mientras que el blanco se supone que varía poco en función de la masa de c . La expresión concreta de la amplitud para este proceso puede encontrarse en la referencia 12.

Habiendo conseguido relacionar el espectro de masa $K\bar{K}$ con las amplitudes $f_{ij}(s)$, estamos ya en disposición de utilizar esta información junto con los valores de η y δ_π para contruir las tres amplitudes. La manera en la que hemos realizado esta tarea queda descrita en el capítulo siguiente en el que utilizaremos toda la información que se desprende de los cinco primeros capítulos.

VI. AJUSTE

En este capítulo describimos el ajuste a los datos experimentales que hemos realizado, una vez que hemos solventado algunas de las dificultades que achacábamos a los trabajos precedentes. En primer lugar, disponemos de una parametrización que tiene en cuenta la existencia del corte izquierdo sin estropear la unitariedad. Nos queda, sin embargo, elegir una forma precisa, dependiente de una serie de parámetros, para las funciones $\bar{K}_{2,2}(s)$, $\bar{\chi}^{(0)}(s)$ y $\bar{h}^{(0)}(s)$, relacionadas con las funciones sin barra mediante multiplicación por $2/\sqrt{s}$. La forma concreta que daremos a estas funciones es:

$$\begin{aligned}\bar{K}_{2,2}(s) &= h_{2,2} + \frac{g}{s_2^0 - s} + \gamma_{2,2} (s - 4M^2 + 4\mu^2)^{3/2} \\ \bar{\chi}^{(0)}(s) &= a + bs \\ \bar{h}^{(0)}(s) &= m' + \frac{n}{s_1^0 - s}\end{aligned}\tag{VI.1}$$

Introduciendo estas expresiones en la parametrización descrita en el capítulo IV, tenemos ya una forma precisa para la matriz $f(s)$ en función de nueve parámetros reales. La forma que hemos escogido para las funciones arbitrarias está justificada por las siguientes razones:

- Introduciendo dos polos en esas tres cantidades damos facilidad al desfase δ_π para que realice un giro completo (de 0 a 2π radianes) desde el umbral hasta 1700 MeV, es decir para que cruce dos múltiplos impares de $\pi/2$
- El corte izquierdo de $\bar{K}_{2,2}$ ha de comportarse en el punto de ramificación como $|s - 4M^2 + 4\mu^2|^{3/2}$
- La cantidad $\bar{\chi}^{(0)}(s)$ no puede tener polos en el eje real, si asumimos la hipótesis 2 del capítulo IV.
- $\bar{h}^{(0)}(s)$ tiene un polo a la energía en la que δ_π cruza 90° . En base a estos cuatro puntos está claro que la parametrización que hemos escogido es prácticamente la más sencilla posible.

En el ajuste que hemos hecho no hemos utilizado m' como parámetro libre, sino que hemos utilizado esta arbitrariedad para substraer una vez la expresión de $h^{(1)}(s)$, y

así quitar importancia a la zona de alta energía de la integral. La expresión para $\bar{h}(s)$ utilizada en el ajuste es:

$$\bar{h}(s) = m + \frac{n}{s_1^0 - s} + \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{K_{12}^2(s') 4q_2(s')(s-B)}{\sqrt{s's} |\alpha(s')|^2 (s'-s)(s'-B)} \quad (VI.2)$$

Veamos ahora como la expresión de $\bar{h}^{(0)}(s)$ y los parámetros de los que es función son fácilmente deducibles sin necesidad de hacer un ajuste. En primer lugar, para $s \leq 4M^2$ $\bar{h}(s) = \text{tg} \delta_{\pi}/q_1(s)$, lo cual prueba el punto d) anterior. Por lo tanto s^0 , viene determinado mediante $\delta_{\pi}(s_1^0) = 90^\circ$, y n está relacionado con la pendiente de δ_{π} en este punto. Un vistazo a los datos experimentales y un simple cálculo nos permiten obtener, pues, valores aproximados de s_1^0 y n . Una vez con estos, basta con ver el valor de $\bar{h}(s)$ para $s = B$ para deducir el valor de m aproximadamente. Hemos visto, por lo tanto, como obtener los parámetros de $\bar{h}^{(0)}(s)$ en el supuesto de que tome la forma dada por VI.1.

Podemos ir más lejos y comprobar que esta forma parece ser la mejor en base a los datos experimentales de Hyams *et al.* Para ello relacionemos la parte real e imaginaria de $\bar{h}(s)$ con η y δ_{π} para $s > 4M^2$. La relación exacta es:

$$\begin{aligned} \text{Re} \bar{h}(s) &= \frac{1}{q_1} \left[\frac{2\eta \sin 2\delta_{\pi}}{\eta^2 + 1 + 2\eta \cos 2\delta_{\pi}} \right] \\ \text{Im} \bar{h}(s) &= \frac{1}{q_2} \left[\frac{1 + \eta^2}{\eta^2 + 1 + 2\eta \cos 2\delta_{\pi}} \right] \end{aligned} \quad (VI.3)$$

Utilizando la relación VI.2 podemos escribir:

$$\text{Re} \bar{h}(s) = m + \frac{n}{s_1^0 - s} + \frac{P}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im} \bar{h}(s') (s-B)}{(s'-s)(s'-B)}, \quad (VI.4)$$

donde P indica la parte principal. Esta relación puede utilizarse para comprobar la forma de $\bar{h}^{(0)}(s)$ ya que podemos calcular el miembro de la derecha en base a los datos experimentales y ver si se ajusta al miembro de la izquierda calculado con esos mismos datos experimentales utilizando VI.3. En concreto, utilizando la forma funcional de η y δ_{π} dada por los ajustes de Hyams *et al.* (5) y de Cerrada *et al.* (8), hemos calculado el miembro de la derecha de VI.4 y observado que ajusta bien a $\text{Re} \bar{h}(s)$ calculado con los datos de Hyams independientes de la energía desde 600 MeV hasta 1900 MeV. Esto nos da gran confianza, pues, en la forma funcional escogida para $\bar{h}^{(0)}(s)$ y además nos da ciertas garantías sobre la estabilidad de la expresión VI.2 para grandes variaciones de s . Este hecho es de importancia, por ejemplo, a la hora de extrapolar al umbral de $\pi\pi$ para

calcular la longitud de difusión. Para terminar de especificar la forma funcional escogida para el ajuste, diremos que hemos tomado los puntos de substracción de las integrales de $h(s)$ y $\chi(s)$ en los valores $B = .372 \text{ GeV}^2$ y $A = 4M^2$ respectivamente.

Utilizando la parametrización anterior, hemos ajustado simultáneamente los valores de μ y δ_π dados por Hyams desde 600 MeV a 1900 MeV (a excepción de $E = .99 \text{ GeV}$) y los espectros de masa $K\bar{K}$ para las reacciones $p\bar{p} \rightarrow K^0 \bar{K}^0 \pi^0$, $\bar{K}^0 K^0 \pi^+ \pi^-$ desde el umbral hasta $E = 1.155 \text{ GeV}$. Los resultados del ajuste se presentan en la figura 3 y en la Tabla 1. La significación estadística del ajuste es muy buena (comparese con los demás ajustes a los mismos datos experimentales de la referencia 15). Respecto a la unicidad del mismo diremos, que hay varios mínimos relativos aunque mucho menos satisfactorios, desde un punto de vista estadístico, que el que aquí presentamos. Hay, sin embargo, otro mínimo tan bueno como el que damos, cuando se substituye la expresión V.2 por:

$$|T|^2 = \sin^2 \delta^{(+)} \cos^2 \theta \quad (\text{VI.5})$$

En este caso el papel de ambas fases propias se intercambian. En general los parámetros de una solución a la otra varían en menos de un 10%, y todos los detalles del ajuste son substancialmente iguales. En realidad es francamente difícil evitar esta ambigüedad ya que $\delta_\pi(4M^2) = \delta^{(-)}(4M^2) \cong 180^\circ$ y su tangente próxima a cero al igual que la de $\delta^{(-)}(4M^2) = \delta_\pi(4M^2) = 0$. Por lo tanto, ambas fases propias son muy parecidas, modulo π , en las proximidades del umbral $K\bar{K}$. La fase propia que se ajusta al espectro de masa $K\bar{K}$, que es siempre la que cruza $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ a $E \cong 1200 \text{ MeV}$, depende del valor de $\delta_\pi(4M^2)$. Si este valor es positivo ($K_{11} > 0$), entonces $\delta^{(-)}$ es creciente en el umbral y esta fase es la que se ajusta, si es negativo, $\delta^{(-)}$ es decreciente y tenemos la otra solución. Esta arbitrariedad de la solución, ya observada por Yndurain (11), no es posible eliminarla en base a la probabilidad estadística del ajuste pero no parece tener ninguna significación a nuestro juicio.

No vamos a incluir en este capítulo ninguna otra consecuencia o resultado del ajuste ya que consideramos necesario un estudio previo de las resonancias y su caracterización para poder guiarnos a la hora de interpretar los resultados. Posponemos, pues, el resto de las consecuencias hasta el capítulo VIII, una vez fijada la base sobre la que han de ser miradas.

VII. CARACTERIZACION DE RESONANCIAS MULTICANALES

Dedicamos este capítulo a la consideración de las caracterizaciones de resonancias multicanales. Consideramos necesaria su inclusión debido a su relevancia a la hora de interpretar nuestros resultados y habida cuenta de la gran dispersión e incompatibilidades en los criterios que hay en la literatura. Esto es solamente una parte de nuestro interés en el tema. El resto de nuestra preocupación, se justifica por la necesidad de dar, más tarde o más temprano, una respuesta a las preguntas que subsisten sobre las resonancias escalares, es decir, encontrar sus características y compararlas con los modelos quark. Para ello, debemos tener un criterio de como separar el fondo de la parte resonante en un proceso cualquiera, y esto es una buena parte de lo que en este capítulo vamos a tratar. No se trata de dar una solución definitiva sobre el tema, ya que esto exigiría un estudio más dinámico. Por ejemplo, en este sentido cabría preguntarse (28) sobre cual es la masa de una resonancia a efectos de compararla con la que resulta de considerar esta como un estado ligado de quarks y antiquarks. No vamos a resumir todos los resultados existentes en la literatura (A estos efectos, el lector puede consultar las referencias 12 y 21), tan solo vamos a citar y probar unos cuantos resultados y argumentaremos algunos otros.

La definición de una resonancia, como un estado metaestable bajo interacciones fuertes, nos parece inatacable pero poco operativa. Lo que en teoría de potencial resulta unívoco, aparece como ambiguo al pasar al caso relativista, tanto bajo el punto de vista de matriz S como bajo el de teoría de campos. En el caso de un solo canal, las dificultades parecen fáciles de solventar. Tanto el punto de vista, que hace relación a los polos en hojas no físicas, como el que tiene en cuenta el comportamiento Breit-Wigner del desfase son equivalentes. Utilizando la variable q_1 en vez de s para representar ambas hojas de Riemann en un solo plano complejo, podemos construir la amplitud más elemental con un polo en una hoja no física de s :

$$f = \frac{\sqrt{s} \operatorname{Im} q_1^R}{q_1^2 - 2iq_1 \operatorname{Im} q_1^R - |q_1^R|^2} = \frac{\sqrt{s} \operatorname{Im} q_1^R}{(q_1 - q_1^R)(q_1 + q_1^{R*})} \quad (\text{VII.1})$$

Esta fórmula es equivalente a una Breit-Wigner relativista, si identificamos $|q_1^R|^2$ con $s_0/4 - \mu^2$ e $\operatorname{Im} q_1^R$ con $-m_0 \Gamma(s)/2q_1$, lo cual da el buen comportamiento umbral a la amplitud de onda S. Para otras ondas parciales la situación es más desafortunada, ya que si queremos reproducir el comportamiento umbral tenemos que introducir nuevas singularidades (en general alejadas de la región física). Por ejemplo, en el caso de la onda P y tomando $\Gamma(s) = q_1^3 \times \text{cte}$, aparecen tres polos de la amplitud: dos

equivalentes a los de la expresión VII.1, y otro en la hoja física y debajo del umbral (estado ligado). No obstante, no hay que dar ningún sentido físico a esas singularidades adicionales ya que posiblemente representan al corte izquierdo y al resto de las singularidades que no hemos considerado.

Para saber como se separa una parte resonante de un fondo, se puede considerar el caso de dos resonancias, tomando una de ellas como fondo para la otra. De la misma manera que anteriormente, podemos construir una amplitud con las singularidades dadas por la existencia de las dos resonancias, y encontramos que el desfase correspondiente es la suma de los desfases que resultarían, si solo cogieramos una de las dos resonancias cada vez. Este es el criterio habitual de separación en el caso de un solo canal: $\delta = \delta^R + \delta^B$. También es fácil comprobar que la función inversa de alcance efectivo $h(s)$, tiene, para el caso de resonancia sin fondo, un polo en el eje real en $s = s_0$:

$$h(s) = \frac{\sqrt{s}}{2q_1} \operatorname{tg} \delta = \frac{2 \operatorname{Im} q_1^R}{q_1^2 - |q_1^R|^2} \quad (\text{VII.2})$$

Al incluir el fondo, este polo se desplaza hacia el umbral si $\delta_B > 0$ o en el sentido contrario si $\delta_B < 0$. Una observación interesante respecto de la separación de fondo y resonancia, es que la matriz S correspondiente, es el producto de la matriz S de la resonancia y la matriz S del fondo:

$$S = S^R S^B \quad (\text{VII.3})$$

Para pasar al caso de dos canales acoplados, tenemos que sustituir $f(s)$ por $\mathbf{f}(s)$, $h(s)$ por $\mathbf{K}(s)$ y S por $\mathbf{S} = \mathbf{I} + 4i \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{f} \mathbf{Q}^{1/2} / \sqrt{s}$. Si intentamos aplicar el método que hemos utilizado para el caso de un solo canal, tropezamos en primer lugar con la dificultad de saber que variable hay que escoger para que las cuatro hojas de Riemann queden representadas en un solo plano complejo. Una elección posible es la de Fujii y Fukugita (22) $\omega = (q_1 + q_2) / (M^2 - \mu^2)^{1/2}$, pero claramente no es la única. Además la correspondencia entre polos y resonancias se debilita por dos motivos principales. El primero es que un caso típico de fenómeno de cusp da lugar a un polo en una hoja no física muy cerca del umbral (21). El segundo es que debido a que hay tres hojas no físicas, no sabemos ni cuantos polos hay, ni donde han de estar los polos correspondientes a una misma resonancia. Por estos motivos, en el caso de ausencia de fondo consideramos que una resonancia viene asociada con una matriz $\mathbf{K}$ de la forma:

$$\mathbf{K}(s) = \frac{2}{\sqrt{s}} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^2}{s_0 - s} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{s_0 - s} \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{s_0 - s} & \frac{\alpha_2^2}{s_0 - s} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.4})$$

Esta definición generaliza la estructura de $h(s)$ en el caso de un solo canal. Además tiene otras ventajas, ya que da lugar a una forma Breit–Wigner para las amplitudes (en onda S):

$$f_{ij}(s) = \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(s_0 - s) - i(q_1 \alpha_1^2 + q_2 \alpha_2^2)}, \quad (\text{VII.5})$$

y se corresponde con una fase propia resonante y otra cero:

$$\text{tg} \delta^{(-)} = \frac{q_1 \alpha_1^2 + q_2 \alpha_2^2}{s_0 - s} \quad (\text{VII.6})$$

El criterio que hemos adoptado para caracterizar una resonancia multicanal en ausencia de fondo, coincide con el de Froissart (21), Yndurain (12) y Morgan (23). Bajo este punto de vista podemos preguntarnos por las singularidades de las amplitudes en hojas no físicas correspondientes a resonancias. La relación VII.5 nos dice, que para resonancias no demasiado anchas, las amplitudes poseen dos polos, uno en la tercera hoja de Riemann ($\text{Im} q_1 < 0$, $\text{Im} q_2 < 0$) y otro en la segunda ($\text{Im} q_1 < 0$, $\text{Im} q_2 > 0$) o en la cuarta ($\text{Im} q_1 > 0$, $\text{Im} q_2 < 0$). Además, la parte imaginaria de la posición del polo en la variable s es mayor para el de la tercera hoja que para el otro. De hecho, $\text{Im} s^{\text{III}}$ es igual a la inversa de la pendiente de $\delta^{(-)}$ en el punto en el que $\delta^{(-)} = 90^\circ$. Así pues, para nosotros toda resonancia irá asociada con dos polos de las amplitudes y esto nos permitirá distinguirla del caso de fenómeno de cusp en el que solo aparece un polo. Otros autores, no obstante, distinguen entre dos tipos de resonancias: las de tipo Breit–Wigner asociadas a dos polos (como las que aquí consideramos), y las asociadas a un solo polo (22), (9).

Vamos ahora a discutir como se puede introducir el fondo que acompaña a una resonancia, lo cual nos permitirá extraerlo de una amplitud correspondiente a un proceso físico. Como en el caso de un solo canal consideraremos el caso de dos resonancias, y generalizaremos luego el resultado a un fondo cualquiera. Nuestro problema se reduce al de construir una matriz $\mathbf{S}$ unitaria y simétrica en función de dos matrices $\mathbf{S}^{(1)}$ y $\mathbf{S}^{(2)}$ unitarias y simétricas correspondientes a dos resonancias. Una condición adicional es que nuestro criterio ha de coincidir con el ya establecido para resonancias a un solo canal. En aquél caso bastaba con multiplicar las dos matrices $\mathbf{S}$ para obtener la nueva. En el caso de dos canales esto no se puede hacer ya que $\mathbf{S}^{(1)}\mathbf{S}^{(2)}$ es unitaria pero, en general, no simétrica. Por el contrario, si simetrizamos el producto perdemos la unitariedad. Una opción posible consiste en diagonalizar ambas matrices $\mathbf{S}$ y luego multiplicar. Esto equivale a sumar las fases propias. Sin embargo, también esta

posibilidad presenta dificultades ya que luego no sabemos como desdiagonalizar la nueva matriz $\mathbf{S}$, y cualquiera que sea la forma que inventemos de retornar a la base de los canales físicos, habremos perdido la información de como se acoplaba una de las dos resonancias a cada canal. Un criterio que salva todas estas dificultades es el de Morgan (23). Este autor define los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{S}$ como producto de los correspondientes de $\mathbf{S}^{(1)}$ y $\mathbf{S}^{(2)}$:

$$S_{ii} = S_{ii}^{(1)} S_{ii}^{(2)} \quad (\text{VII.7})$$

mientras que el elemento S_{12} lo escoge de manera que la resultante matriz $\mathbf{S}$ sea unitaria y simétrica

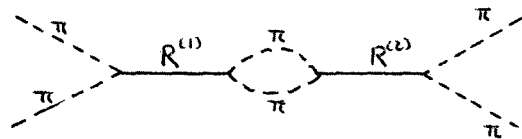
$$S_{12} = (S_{11} S_{22} - \frac{S_{22}}{S_{11}^*})^{1/2} \quad (\text{VII.8})$$

A pesar de que esta forma de resolución no plantea problemas evidentes, creemos que es intuitivamente más correcto sustituir este criterio por otro, que explicaremos a continuación.

Para Morgan la amplitud $\hat{f}_{11} (= \frac{\sqrt{s}}{2q_\pi} f_{11})$ viene dada por:

$$\hat{f}_{11} = \hat{f}_{11}^{(1)} + \hat{f}_{11}^{(2)} + 2i \hat{f}_{11}^{(1)} \hat{f}_{11}^{(2)} \quad (\text{VII.9})$$

El último término del miembro de la derecha podemos representarlo diagramáticamente por:



Estamos pues operativamente introduciendo un estado intermedio de dos piones (canal 1) entre las dos resonancias $R^{(1)}$ y $R^{(2)}$. No hay, sin embargo, razón alguna para que no podamos incluir un estado intermedio de dos kaones (canal 2) entre las dos resonancias. Vamos a modificar la expresión VII.9 de la siguiente manera:

$$\hat{f}_{11} = \hat{f}_{11}^{(1)} + \hat{f}_{11}^{(2)} + 2i (\hat{f}_{11}^{(1)} \hat{f}_{11}^{(2)} + \hat{f}_{12}^{(1)} \hat{f}_{12}^{(2)}) \quad (\text{VII.10})$$

Es razonable el hecho de que f_{11} contenga un término proporcional a $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$, siendo $\alpha_1 (\beta_1)$ y $\alpha_2 (\beta_2)$ las constantes de acoplamiento de la resonancia $R^{(1)} (R^{(2)})$ a los canales 1 y 2 respectivamente. Que esto es así viene sugerido por los diagramas de Feynman cuando las resonancias son introducidos como partículas en un lagrangiano fenomenológico. Nuestro criterio es equivalente a tomar $S_{11} = (S^{(1)} S^{(2)})_{11}$. Podemos hacer lo mismo para el elemento S_{22} , y determinar S_{12} para que la matriz S resultante sea unitaria y simétrica utilizando la fórmula VII.8. Con nuestra hipótesis el elemento f_{11} de la amplitud queda:

$$f_{11} = \frac{q_1 \alpha_1^2 (s_1 - s) + q_1 \beta_1^2 (s_0 - s) - i q_1 q_2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2}{((s_0 - s) - i q_1 \alpha_1^2 - i q_2 \alpha_2^2)((s_1 - s) - i q_1 \beta_1^2 - i q_2 \beta_2^2)}, \quad (\text{VII.11})$$

donde s_0 y s_1 son las masas al cuadrado de las resonancias $R^{(1)}$ y $R^{(2)}$ respectivamente. Es interesante notar que los polos de la nueva amplitud vienen dadas por la unión de las correspondientes a $f^{(1)}$ y los de $f^{(2)}$. También se puede ver, tras unas cuantas operaciones, como para $s_1 \gg s_0$ y en las proximidades de $s = s_0$ una de las fases propias es la suma de una fase propia resonante más una fase propia de fondo que se comporta suavemente excepto en las proximidades del umbral.

Para terminar citaremos un criterio distinto debido a Yndurain(24) que consiste en escribir la matriz $S^{(i)}$ como $\exp[iH^{(i)}]$ donde $H^{(i)}$ sera pues autoadjunto y simétrico. La nueva matriz S entonces la construiremos como $\exp[iH^{(1)} + iH^{(2)}]$. Este criterio coincide con el nuestro respecto de los elementos diagonales si en el desarrollo de esta última exponencial nos quedamos solo con los terminos mas bajos (hasta el cuadrático inclusive). Los elementos no diagonales no coinciden ya que al truncar el desarrollo perdemos la unitariedad.

VIII. RESULTADOS DEL AJUSTE

En este capítulo presentamos una serie de resultados que se deducen de nuestro mejor ajuste y que se refieren a diversas cuestiones. En primer lugar damos la estructura de δ_K (Fig. 4) que junto con η y δ_π nos posibilita para construir las tres amplitudes por el encima del umbral $K\bar{K}$. También presentamos en la Fig. 6 las fases propias que, claro está, cumplen:

$$\delta^{(+)} + \delta^{(-)} = \delta_\pi + \delta_K \quad (\text{VIII.1})$$

Comentaremos la estructura de las fases propias posteriormente, a la hora de hablar de las resonancias presentes en estos procesos. La pequeñez de una de las fases propias justifica las hipótesis dinámicas realizadas para analizar la distribución de masa $K\bar{K}$. Otro cálculo que merece atención es el de los polos en hojas no físicas (Tabla 2). También volveremos con esto posteriormente, al final del capítulo.

Lo que vamos a presentar a continuación es una condición de consistencia de nuestro mejor ajuste y que hace referencia a la discontinuidad a través del corte izquierdo de $f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}$. Esta condición es una medida de la sensibilidad de nuestro ajuste a la estructura de este. La condición en cuestión resulta de la comparación de la discontinuidad del corte izquierdo que se puede calcular directamente del ajuste y la calculada utilizando la proyección de Froissart-Gribov. El primero de ambos cálculos viene dado por la fórmula IV.2 y la forma funcional depende de la que hemos dado a $K_{22}(s)$. El otro cálculo se realiza utilizando la fórmula II.10. El comportamiento umbral de las amplitudes nos permite prescindir de todas las ondas parciales a excepción de las ondas S y P de isospines 0 y 1 respectivamente.

La bondad de esta truncación se verificó en un cálculo realizado utilizando todas las ondas parciales hasta la onda F inclusive. La onda S que tomamos es también la que corresponde al ajuste del capítulo VI. En cuanto a la onda P la fórmula utilizada corresponde a una Breit-Wigner correspondiente a la resonancia ρ .

$$|f_{1\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}}|^2 = \frac{(m_\rho^2 - 4\mu^2)^2}{(m_\rho^2 - s)^2 + m_\rho^2 \Gamma^2(s)} \times a^2 |q_1|^2 |q_2|^2 \frac{s}{4} \quad (\text{VIII.2})$$

donde:

$$\Gamma(s) = \frac{s - 4\mu^2}{m_\rho^2 - 4\mu^2}^{3/2} \Gamma_0 \quad (\text{VIII.3})$$

Los parámetros reales m_ρ , Γ_ρ y a fueron fijados a los valores: $m_\rho = 777$ MeV, $\Gamma_\rho = 155$ MeV y $a = .894$ GeV², este último valor extrajo de la referencia 25. El resultado de la comparación de cálculo puede observarse en la Figura 5. Conviene resaltar el sorprendente parecido cualitativo de ambos resultados, muy especialmente en las proximidades de $s = 4M^2 - 4\mu^2$ donde el segundo de estos depende poco de la onda P y por lo tanto se traduce en una condición sobre los parámetros del ajuste. En concreto, el comportamiento en el punto de ramificación del corte izquierdo depende de la longitud de difusión de la amplitud $f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}$. Este hecho nos permite hacer dos determinaciones independientes de esta cantidad. Utilizando el cálculo directo determinamos $|f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(4\mu^2)| = .1377$ mientras que utilizando la proyección de Froissart-Gribov el resultado es $= .1313$. Resulta francamente sorprendente el acuerdo entre ambos resultados. Si comparamos nuestro resultado con el que se desprende de la utilización del proceso $K\pi \rightarrow K\pi$, vía cruce (25), vemos que también hay compatibilidad con éste, que da un valor de 0.30 ± 0.15 para la amplitud en el umbral. A su vez el modelo de Veneziano da un valor de 0.29 para esta cantidad.

Otro parámetro de baja energía de gran interés es el valor de la amplitud $f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}$ en el umbral. Nuestro ajuste da un resultado de 0.69. Otros cálculos basados en la extrapolación directa de los datos experimentales, dan resultados, en general, más pequeños que el nuestro. No obstante, en el cálculo de la longitud de difusión hay implicada una extrapolación y esta es solo aproximadamente fiable dado el hecho de que hemos omitido el corte izquierdo de la amplitud $f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}$, que empieza en $s = 0$. Resumimos los valores de estos parámetros de baja energía en la tabla 3.

Por último, vamos a ocuparnos del problema de saber cuales son las resonancias que poseen estos números cuánticos. La estructura de las fases propias no parece fácilmente interpretable. Resaltamos que estas cruzan $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ a las energías de $E = 870$ y 1180 MeV. Utilizando la estructura analítica en hojas no físicas podemos intentar determinar las resonancias presentes en estos procesos. Utilizando la posición de los polos de la segunda y tercera hojas de Riemann situados en $s = 1. \pm i 0.045$ GeV² y $s = 0.97 \pm i 0.085$ GeV², podemos calcular los parámetros α_1^2 , α_2^2 y s_0 de la fórmula VII.5. Son cuatro ecuaciones para determinar tres cantidades reales, luego hay una condición adicional que han de cumplir la posiciones de los polos, y que nos sirve para precisar la bondad de nuestro esquema. Resolviendo las ecuaciones obtenemos: $\alpha_1^2 = 0.124$ GeV, $\alpha_2^2 = 0.238$ GeV y $s_0 = 0.986$ GeV. Utilizando el valor de s_0 y de α_2^2 podemos determinar α_1^2 utilizando la ecuación restante, el resultado es $\alpha_1^2 = 0.1$ GeV, que muestra la compatibilidad de las cuatro ecuaciones y da un 20% como medida del

error cometido en la determinación de los parámetros. Vemos pues, como en nuestro ajuste la resonancia S^* posee una masa próxima a $2M$ y está más acoplada a $K\bar{K}$ que a $\pi\pi$. Sorprende, en primer lugar, el acuerdo entre la posición de nuestro polos y aquellos que resultan del análisis de Fujii y Fukugita (22), que utiliza una parametrización muy distinta. Esto se traduce en una gran similitud entre los parámetros que ellos atribuyen al S^* y los que aquí presentamos (Tabla IV). Los autores de aquel trabajo se preocupan de determinar si el S^* viene asociado con un solo polo en la segunda hoja, o con dos polos en la segunda y tercera hoja. Su resultado coincide con el nuestro y esto constituye una gran evidencia en favor de la existencia y propiedades de la resonancia S^* . No obstante, no conviene olvidar que otros ajustes (refs. 5, 8, 15 y 26) obtienen un resultado distinto al nuestro sin dejar de ser estadísticamente satisfactorios. En la Tabla IV resumimos los polos en hojas no físicas correspondientes al S^* , encontrados por otros autores. Notemos como en muchos de ellos, el S^* viene asociado a un solo polo y resulta por tanto, en nuestra opinión, dudosa su asimilación a una resonancia. Mas aún, incluso en el caso de dos polos hay una gran discrepancia en la posición de estos. La sensibilidad de los parámetros del S^* a dicha posición, se puede ver comparando los resultados del presente trabajo y el de Fujii y Fukugita con el de Morgan (23). Este último utilizando los polos de Hyams *et al.* (5) determina: $s_0 = 0.966 \text{ GeV}^2, \alpha^2 = 0.374 \text{ GeV}$ y $\alpha_2^2 = 1.39 \text{ GeV}$. Vemos como hay una gran dispersión en estos valores lo cual no es difícilmente explicable dada la diferencia entre la posición del polo de la tercera hoja de Riemann en estos trabajos. Hay otro artículo que se sitúa entre el de Morgan y el nuestro en cuanto a los valores de estos parámetros (9). La tabla 4 resume varios resultados de la literatura respecto a estos parámetros.

Nuestro interés se vuelve ahora hacia la determinación del fondo que acompaña al S^* . Desafortunadamente, las singularidades en hojas no físicas, salvo las correspondientes al S^* , no son satisfactorias. En muchos casos no se ha explorado una región suficientemente amplia del plano complejo. En otros, los polos no aparecen a pares y es cuestionable pues su asociación con resonancias. Por este motivo, el camino que seguiremos será el de substraer de las amplitudes la parte correspondiente al S^* e intentar interpretar dinámicamente la parte restante. Para realizar esta tarea utilizaremos el criterio que establecimos en el capítulo anterior. El criterio mas frecuente consiste en definir $\delta_\pi^B = \delta_\pi - \delta_\pi^R$ y $\eta^B = \eta/\eta_R$, donde el subíndice R indica la parte resonante y el subíndice B la parte de fondo. Claro está, que la adopción de este criterio es para la mayoría de los autores una necesidad ya que solo poseen información de $f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}$.

En las figuras 7 y 8, presentamos los valores de η_B , δ_π^B y δ_K^B que resultan de nuestro análisis. La solución no es única, hay dos posibles valores para la inelasticidad,

y asociados a cada uno de estos, dos posibles pares de valores para las fases. No obstante a partir de 1350 MeV, todas las soluciones son prácticamente iguales. Por debajo de esta energía, las diferencias tampoco son dramáticas y una sola solución ilustra perfectamente la estructura de todas. Conviene resaltar el comportamiento Breit-Wigner de la fase δ_{π}^B desde 1350 MeV hasta 1700 MeV. El punto de máxima pendiente se sitúa en las proximidades de 1500 MeV, donde la inelasticidad se aproxima mucho a la unidad. Esto sugiere la existencia de una resonancia acoplada fundamentalmente a $\pi\pi$. Si calculamos las fases propias y determinamos su pendiente máxima se pueden obtener los parámetros aproximados de esta posible resonancia:

$$\begin{aligned} m_{\epsilon'} &\cong 1500 \text{ MeV} \\ \alpha_1^2 &\cong .714 \text{ GeV} \\ \alpha_2^2 &\cong 0 \end{aligned}$$

El fondo que acompaña a la resonancia ϵ' es de $\delta_{\pi}^{BB} = 65^\circ$. Ya en el análisis de Hyams aparecía un polo en la tercera hoja de Riemann cercano a esta energía, aunque no venía acompañada de polo alguno en la segunda o cuarta hoja.

Concluimos pues, que aparte del S^* existe posiblemente una resonancia ancha con las propiedades arriba mencionadas. Sin embargo, esto no es ninguna prueba concluyente y sería necesario descubrir su presencia en forma de polos en hojas no físicas de las amplitudes. No hay ningún rastro de una resonancia ϵ de masa inferior al S^* , con lo que cualitativamente nuestros resultados comprueban la interpretación de Morgan, y otros autores posteriores respecto de la estructura de estos canales.

IX: CONCLUSIONES

A la vista de lo presentado en los anteriores capítulos podemos concluir lo siguiente:

1. Que es necesario utilizar una parametrización que de cuenta del corte izquierdo de $f(s)_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}$, si queremos obtener la correcta forma funcional de esta amplitud, de las fases propias y, via unitariedad, de las otras amplitudes.

2. Que para eliminar la ambigüedad existente en la matriz K es necesario utilizar información sobre $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$.

3. Una vez solventadas estas dificultades (Capítulos IV y V), que es posible ajustar satisfactoriamente el conjunto de desfasajes e inelasticidades dados por Hyams, junto con la distribución de masa $K\bar{K}$ en los procesos $p\bar{p} \rightarrow K\bar{K} n\pi$ con $n = 1, 2$. Esto constituye una justificación de las hipótesis dinámicas que nos relacionan las anteriores reacciones con $\delta_{\pi\eta} \gamma \delta_{K\eta}$, y a su vez nos permite obtener una determinación de esta última cantidad.

4. También se concluye que la sensibilidad del ajuste a la estructura del corte izquierdo parece garantizada, a la vista del acuerdo entre las dos determinaciones de la discontinuidad a través de dicho corte, una directamente y la otra utilizando la fórmula de Froissart – Gribov.

5. El punto anterior permite a su vez dar dos determinaciones, que difieren en menos de un 10%, del valor de $f(4\mu^2)_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}$. A su vez $f(4\mu^2)_{\pi\pi \rightarrow \pi\bar{\pi}}$ resulta algo superior a los valores más recientemente citados.

6. Concluimos a su vez, que dados los polos en hojas no físicas que resultan de nuestro ajuste, parece reforzarse la existencia de la resonancia $S^* (992)$, acoplada a $K\bar{K}$ el doble que a $\pi\pi$.

7. Si substraemos de las amplitudes la parte correspondiente a esta resonancia, tal y como precisamos en el capítulo VII, el fondo resultante presenta indicios de una resonancia $\epsilon' (1500)$ acoplada fundamentalmente a $\pi\pi$ y con anchura de 350 Mev.

8. Ninguna resonancia ϵ de masa inferior al S^* es necesaria para interpretar los datos.

Antes de finalizar este capítulo vamos a enumerar algunas cosas que deberán ser atacadas ó perfeccionadas en el futuro. En primer lugar sería interesante disponer de una determinación mas precisa y sin ambigüedades de η y $\delta_{\pi\eta}$, lo cual exige de mayor estadística en $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ y muy fundamentalment medidas mejores de $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$.

$\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ y $\pi^0\pi^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. También es interesante disponer de una mayor información respecto de los canales o varios piones, a los que podría estar acoplado el ϵ . Todo esto necesita de un estudio en profundidad del mecanismo de intercambio de un pión y su fondo dada su relevancia en la extracción de datos experimentales. También son de notable interés otras determinaciones de $\sigma(K\bar{K} \rightarrow K\bar{K})$ obtenidos indirectamente en otros procesos en base a determinadas hipótesis dinámicas.

Otro proyecto a tener en cuenta se relaciona con un estudio más a fondo de la resonancia ϵ' . Todos los trabajos que se ocupan de estudiar el S^* , estudian al ϵ' de forma distinta y por el momento hay poco acuerdo respecto de las propiedades de este. Por lo tanto, es preciso una exploración de la estructura analítica en hojas no físicas a energías superiores, y una ampliación de las parametrizaciones y ajustes de numerosos autores, de manera que cubran toda la zona donde hay datos experimentales disponibles.

Una vez que se hayan cubierto los anteriores puntos, se puede intentar entender en base a $SU(3)$, el modelo quark u otros modelos las propiedades de los mesones escalares en la línea de los trabajos de Morgan²³, Fujii y Fujigita²² y Martin, Ozmutlu y Squires⁹. Es sugestivo por ejemplo el comentario de Morgan respecto del desfasaje que resulta una vez substraído el S^* y el ϵ . Este resulta aproximadamente igual al correspondiente de $I=2$ que es un proceso exótico. No debemos olvidar sin embargo, que subsisten problemas respecto de la comparación de la masa de las resonancias como estados ligados de quarks, y el parámetro de masa en la fórmula de Breit—Wigner. Esta pregunta resultará más crucial a medida que nuestra preocupación se aleje más de la comprobación del modelo quark y se acerque al problema de determinar la interacción precisa entre estos.

REFERENCIAS

1. A. MARTIN y F. CHEUNG, 'Analiticity properties and bounds of the Scattering Amplitudes' Gordon and Breach Science Publishers (1970).
2. A. MARTIN 'Scattering Theory: Unitarity, Analiticity and Crossing'. Springer-Verlag (1969).
3. B.R. MARTIN D. MORGAN y G. SHAW. 'Pion-Pion interactions in Particle Physics'. Academic Press (1976).
4. A.D. MARTIN y T.D. SPEARMAN. 'Elementary Particle Theory' North-Holland Publishing Co. (1970).
5. B. HYAMS *et al.*, Nuclear Phys. **B64**, 134 (1973)
6. S. D. Protopopescu *et al.* Phys. Rev. **D7**, 1279 (1973).
7. P. ESTABROOKS and A.D. MARTIN, Nuclear Phys. **B.95**, 322 (1975).
8. M. CERRADA, A. GONZALEZ-ARROYO, J.A. RUBIO y F.J. YNDURAIN, Phys. Letters **62B**, 353 (1976).
9. A.D. MARTIN, E.N. OZMUTLU and E.J. SQUIRES, Nuclear Phys. **B121**, 514 (1977).
10. F.J. YNDURAIN, Proceedings of the 3rd International Winter Meeting on Fundamental Physics, Sierra Nevada (Spain) 1975, Published Instituto de Estudios Nucleares, Madrid (1975).
11. F.J. YNDURAIN, Nuclear Phys. **B88**, 318 (1975).
12. M. AGUILAR-BENITEZ, J.A. RUBIO y F.J. YNDURAIN, 'Hadronic resonances', G.I.F.T. report 4875, Vol 1 (1975).
13. A. GONZALEZ-ARROYO, In preparation.
14. W. OCHS y F. WAGNER, Phys. Letters **44B**, 271 (1973).
15. M. AGUILAR-BENITEZ *et al.* CERN preprint. EP/Phys 77-34 (To appear in Nuclear Phys.).
16. J.A. RUBIO, Proceedings of the 3rd International Winter Meeting on Fundamental Physics, Sierra Nevada (Spain), 1975.

17. K.N. WATSON, Phys. Rev. **88**, 1163 (1952).
18. J.D. JACKSON y G.L. KANE, Nuovo Cimento **23**, 444 (1962).
19. M. JACOB, G. MAHOUX and R. OMNES, Nuovo Cimento **23**, 838 (1962).
20. J.D. JACKSON, Nuovo Cimento. **34**, 1644 (1964).
21. M. FROISSART, Proceedings of the 3rd Ecole d'ete de Physique des Particules GIF—SUR—IVETTE, Saclay (Francia) (1971).
22. Y. FUJII y M. FUKUGITA, Nuclear Phys **B85**, 179 (1975).
23. D. MORGAN, Phys. Letters **51B**, 71 (1974).
24. F.J. YNDURAIN, Comunicación privada.
25. F.P. PALOU, J.L. SANCHEZ—GOMEZ y F.J. YNDURAIN. Z. Physik **A274**, 161 (1975).
26. S.M. FLATTE, Phys. Letters **63B**, 228 (1976).
27. J.L. PETERSEN, 'The $\pi\pi$ interaction', CERN review 77—04 (1977).
28. F.J. YNDURAIN, comunicación privada.

LISTA DE TABLAS

Tabla I: Parámetros del mínimo obtenido en el ajuste.

Tabla II: Posición de los polos en hojas no físicas. La región explorada se extiende desde 700 hasta 1400 MeV. Los errores son de 0.005 GeV^2 en todas las cantidades.

Tabla III: Parámetros de baja energía: $a_{11} = f(4\mu^2)_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}$ y $a_{12} = f(4\mu^2)_{\pi\pi \rightarrow KK}$. Junto a los resultados obtenidos con nuestro ajuste presentamos los resultados de otros autores extraídos por procedimientos distintos.

Tabla IV: a) Polos asociados al S^* obtenidos por diversos autores: Ref. 5, 22, 15 (Fits 1, 2 y 3) y Ref. 9 (Fit de matriz K constante (1), y de fórmula Breit-Wigner (2)).

b) Parámetros s_0 , α_1^2 y α_2^2 de la fórmula Breit-Wigner calculados por varios autores.

TABLA I

s_1^O	$.76 \pm 0.01$
s_2^O	1.4 ± 0.03
g	0.37 ± 0.025
η	1.48 ± 0.03
γ_{22}	0.61 ± 0.04
h_{22}	0.16 ± 0.01
a	4.39 ± 0.05
b	$- 1.93 \pm 0.025$
m	3.4 ± 0.1
A_1	0.44 ± 0.06
A_2	0.77 ± 0.14
N.D.	138
χ^2	103.1

Todos los parámetros se dan en las potencias de GeV correspondientes.

TABLA II

Hoja de Riemann	2^a $\text{Im}q_\pi < 0, \text{Im}q_K > 0$	3^a $\text{Im}q_\pi < 0, \text{Im}q_K < 0$
S_p (GeV ²)	$1.000 + i 0.045$	$0.970 + i 0.085$ $1.650 + i 0.045$

TABLA III

	a_{11}	$ a_{12} $
Directo	0.69	0.1377
Froissart-Gribov	—	0.1313
Ref. 25	0.5 ± 0.3	0.30 ± 0.15
Veneziano	0.29	0.29
Hyams Männer	0.6 0.44 ± 0.10	0.26

TABLA IV

a) Polos del S^*

$S_p (\text{GeV}^2)$	2ª hoja	3ª hoja
Ref. 5	$1.014 + i 0.03$	$1.036 + i 0.525$
Ref. 22	$1.002 + i 0.044$	$0.918 + i 0.115$
Ref. 15 (1)	$0.950 + i 0.150$	$1.000 + i 0.100$
Ref. 15 (2)	$0.966 + i 0.04$	
Ref. 15 (3)	$0.965 + i 0.053$	$1.000 + i 0.350$
Ref. 9 (1)	$0.976 + i 0.024$	
Ref. 9 (2)	$0.977 + i 0.034$	$0.678 + i 0.247$

b) Parámetros del S^*

	$S_0 (\text{GeV})$	$\alpha_1^2 (\text{GeV})$	$\alpha_2^2 (\text{GeV})$
Ref. 23	0.966	0.374	1.39
Ref. 22	0.983	0.168	0.386
Ref. 9	0.956	0.19	0.71
Este trabajo	0.986	0.124	0.238

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Triangulo de Mandelstam del proceso $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ y las relacionadas. La zona rayada representa la región de singularidades mientras que las dos rectas más oscuras ($t = 0$ y $u = 0$) representan el borde de la región $|\cos\theta_s| = 1$.

Figura 2: 2a) Plano complejo de s . Los cortes de las amplitudes $f_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}^{00}(s)$ y $f_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$ están marcados en negro. Los puntos de ramificación están marcados por una x .

2b) lo mismo que el a para $f_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{00}(s)$

Figura 3: Cantidades ajustadas: η , δ_π y espectro de masas para los dos procesos: $pp \rightarrow KK\pi$ y $pp \rightarrow KK\pi\pi$.

Figura 4: Valor de δ_K que resulta del ajuste.

Figura 5: Cálculo de la discontinuidad a través del corte izquierdo de $f_{KK \rightarrow KK}^{00}(s)$: ——— cálculo directo; — — — — cálculo utilizando Froissart–Gribov.

Figura 6: Fases propias del ajuste $\delta^I = \delta^{(-)}$; $\delta^{II} = \delta^{(+)}$

Figura 7: Gráfica de δ_π^B .

Figura 8: Gráfica de δ_K^B y η^B .

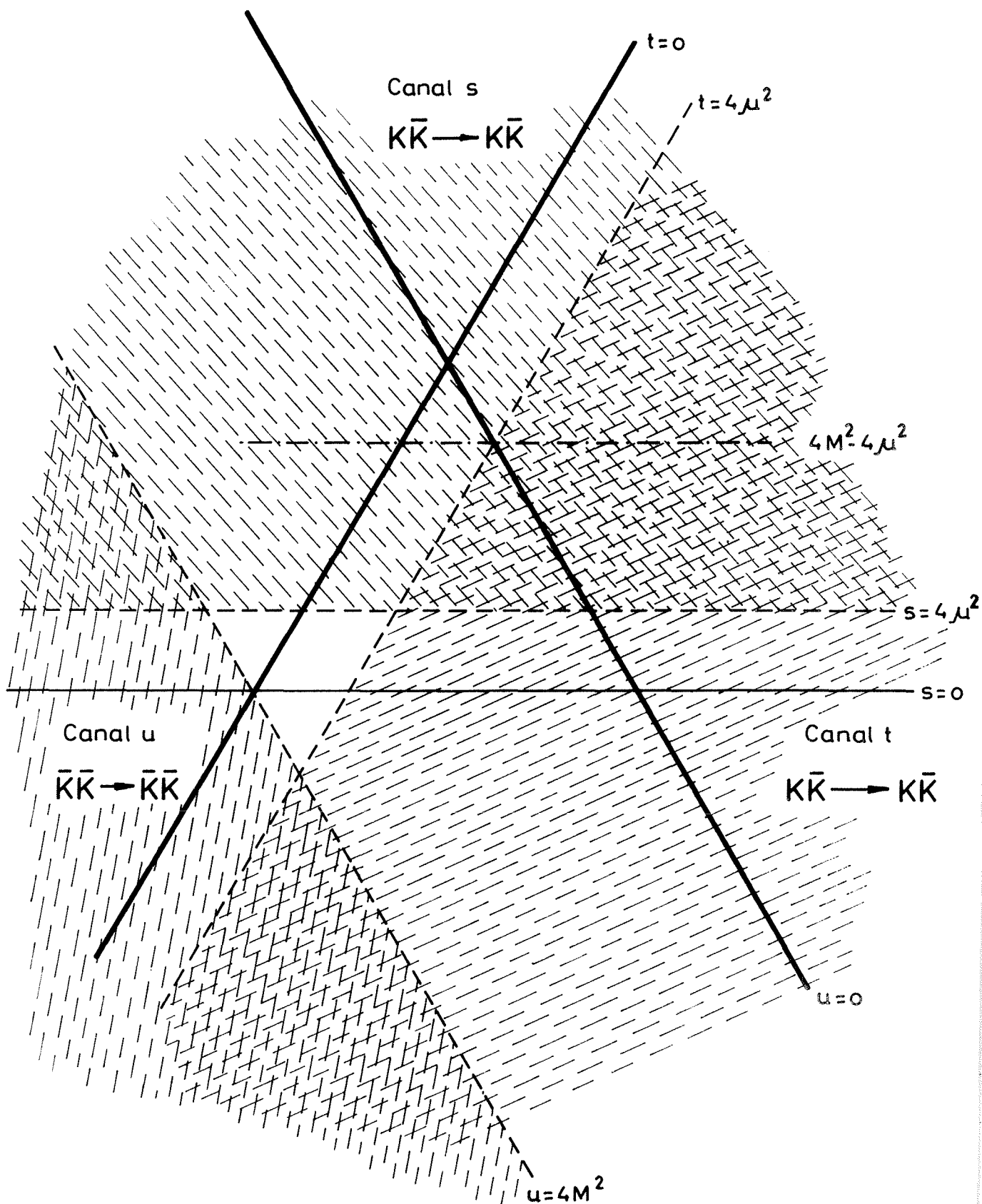
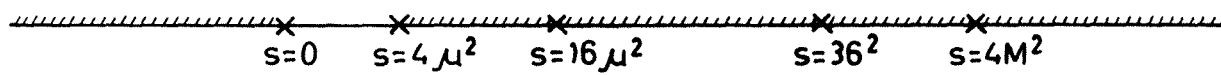


Fig. 1

$$f^{00} \pi\pi \rightarrow \pi\pi \text{ y } f^{00} \pi\pi \rightarrow K\bar{K} \quad s)$$

a)



$$f^{00} K\bar{K} \rightarrow K\bar{K} \quad s)$$

b)

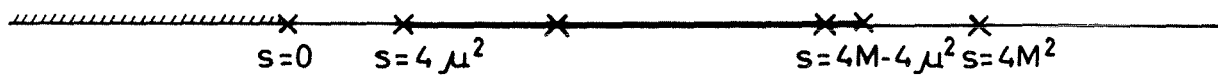


Fig. 2

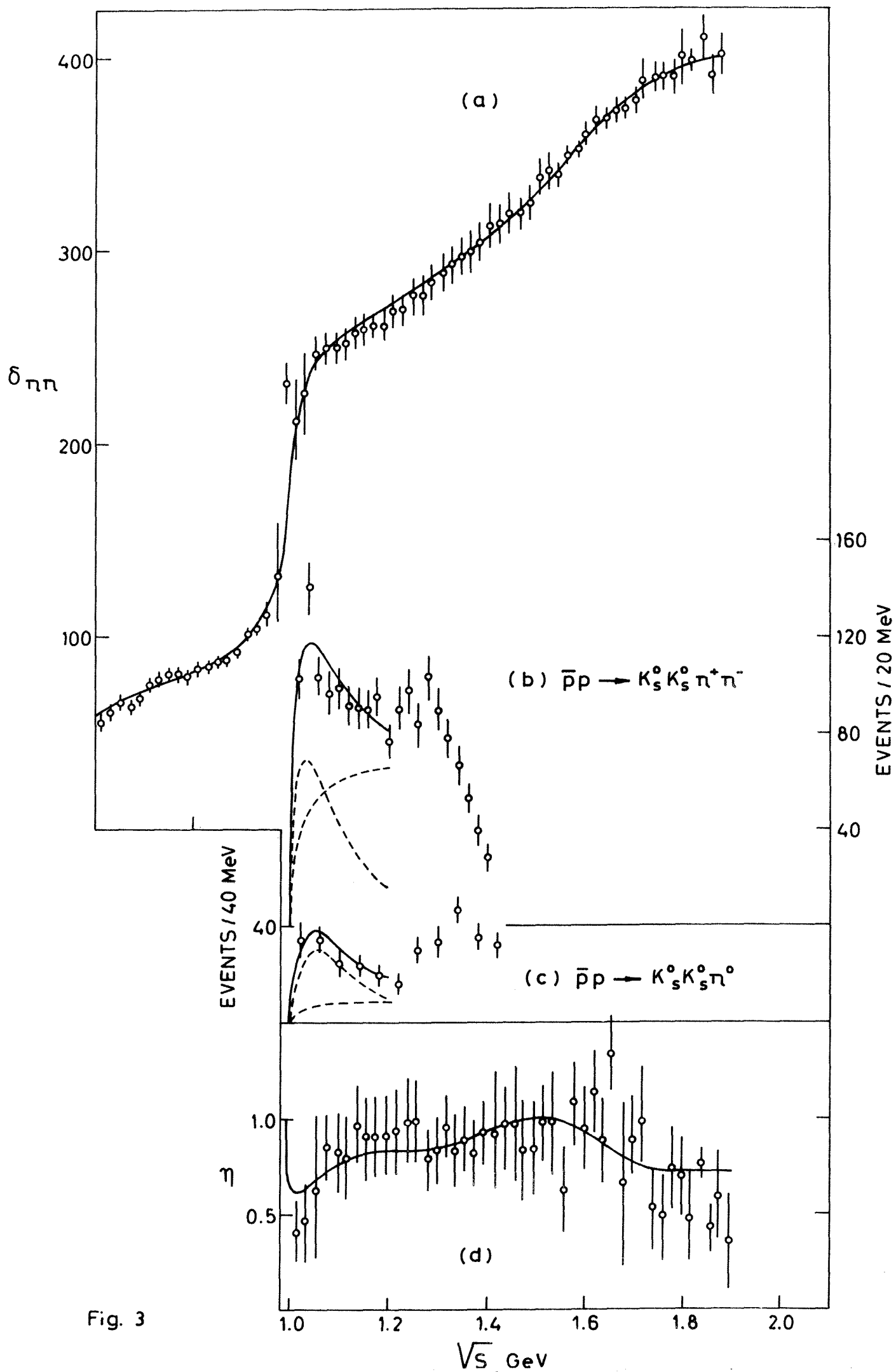


Fig. 3

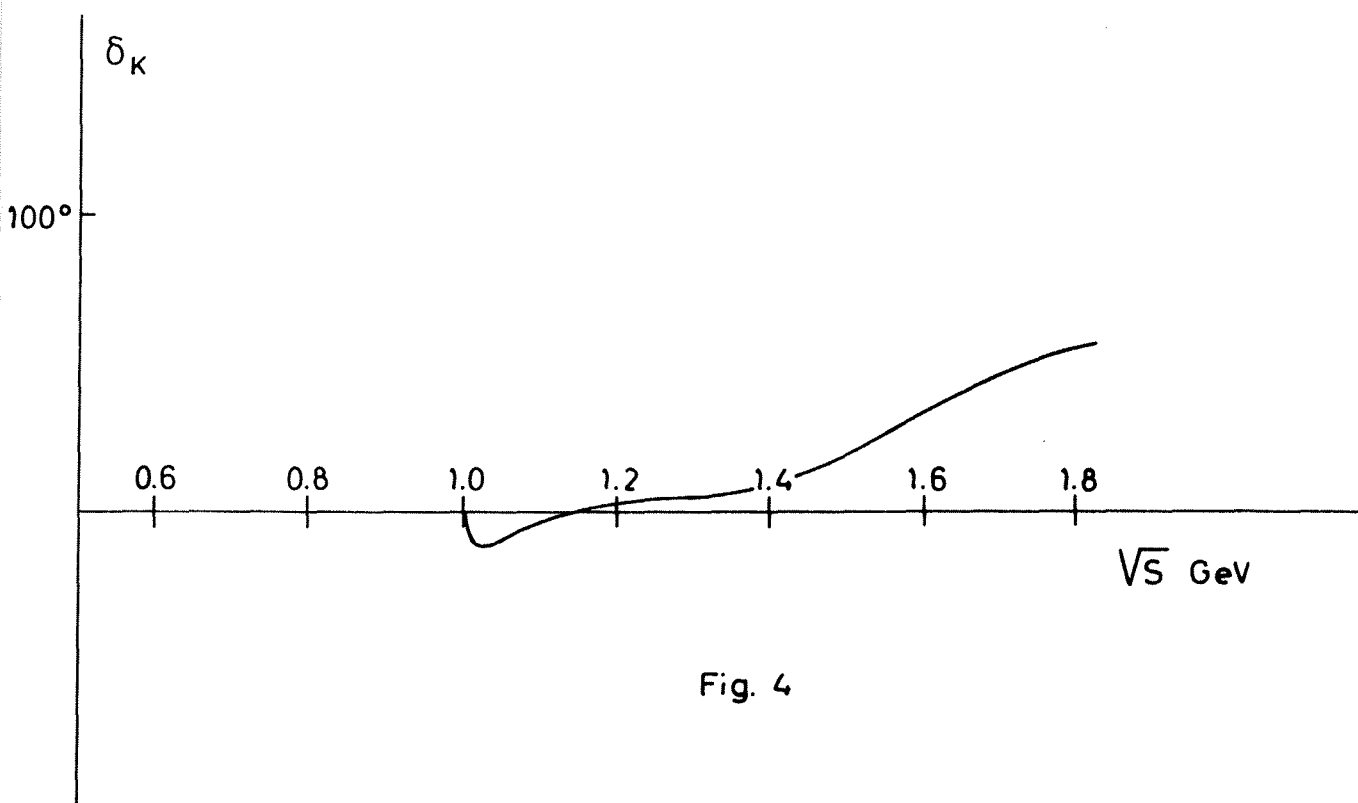


Fig. 4

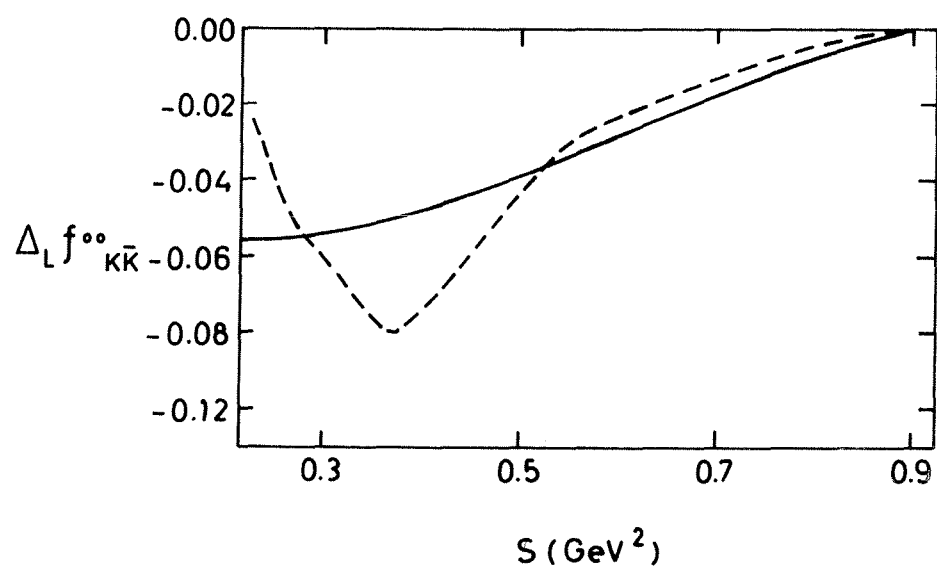


Fig. 5

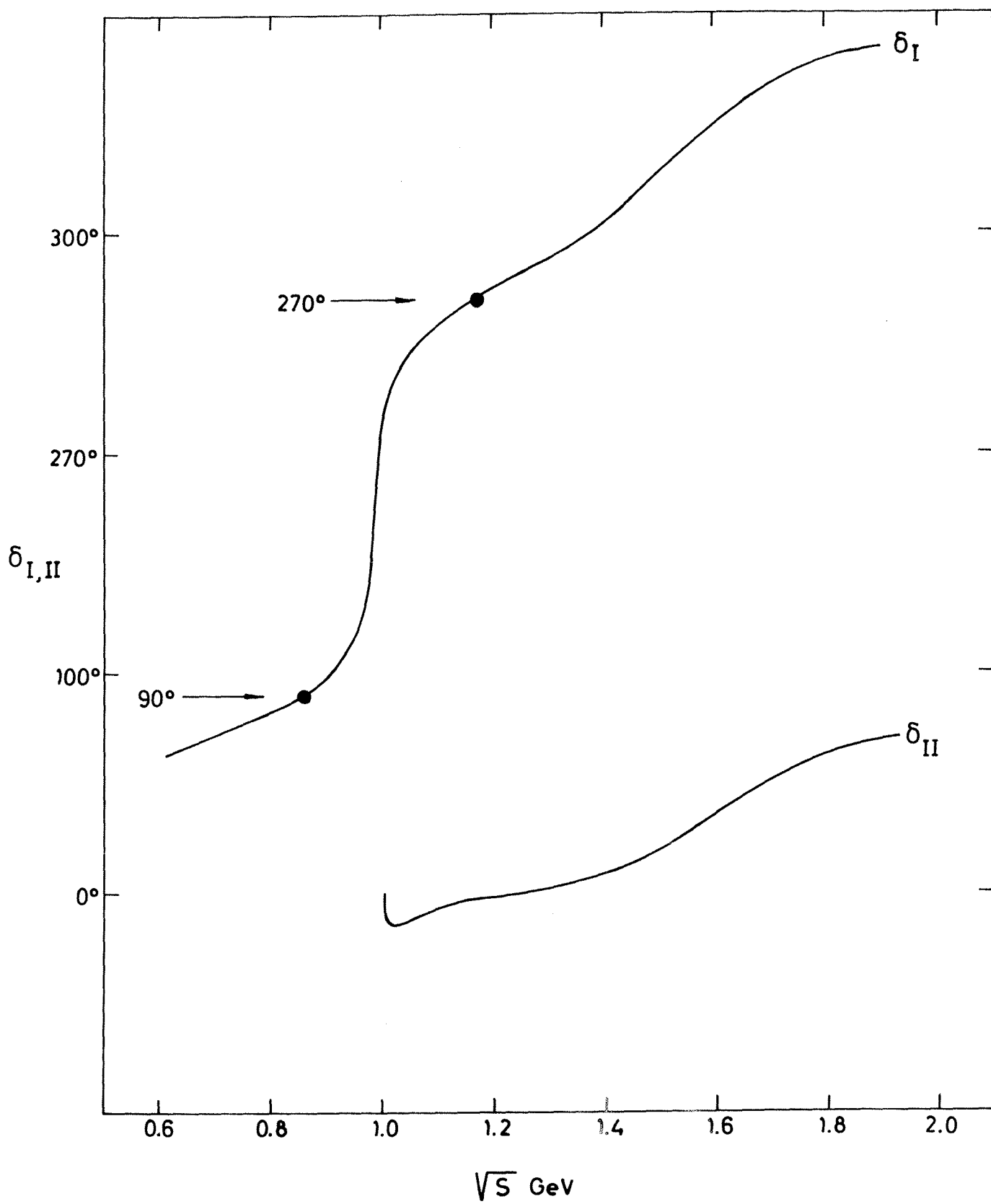


Fig. 6

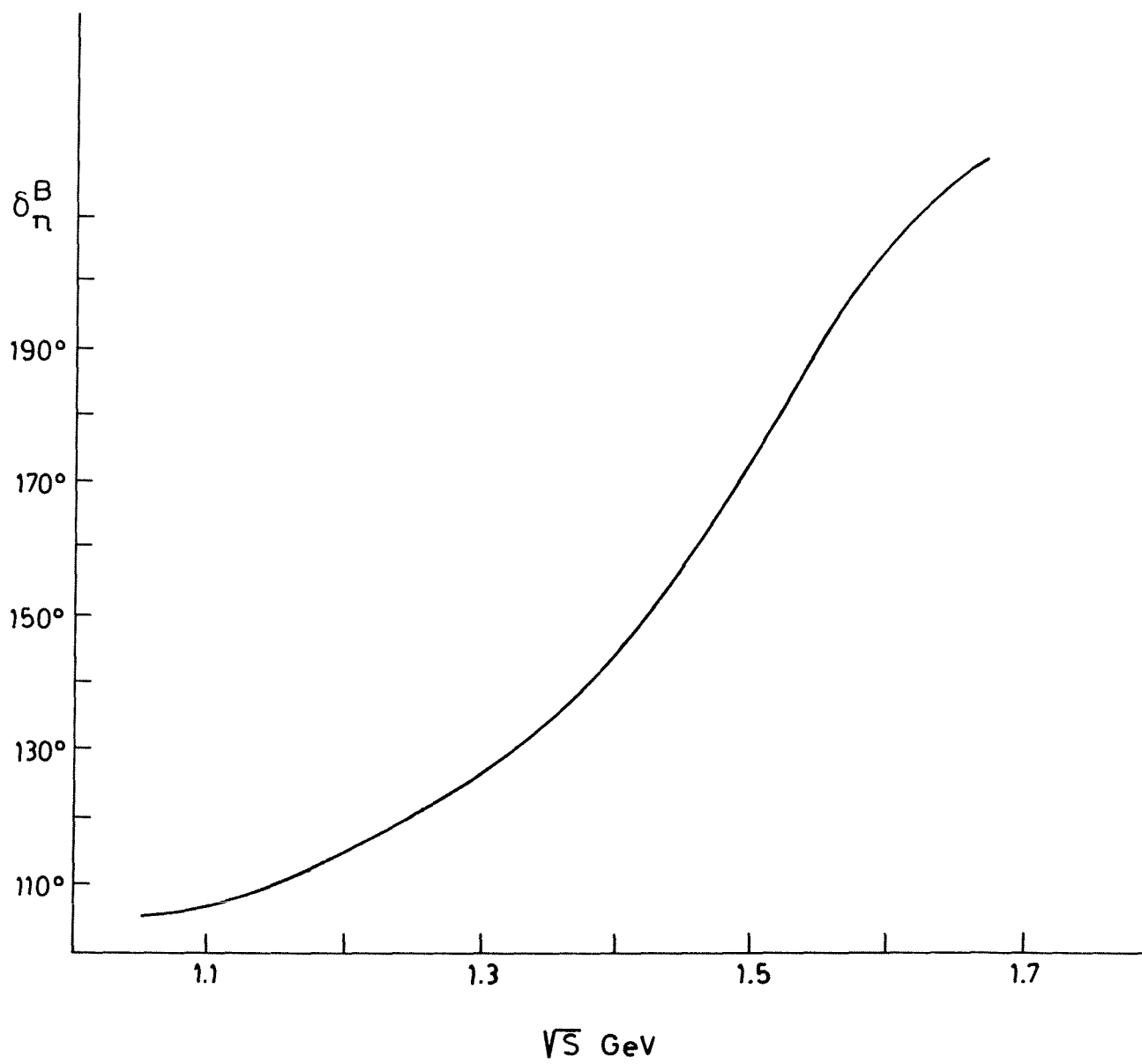


Fig. 7

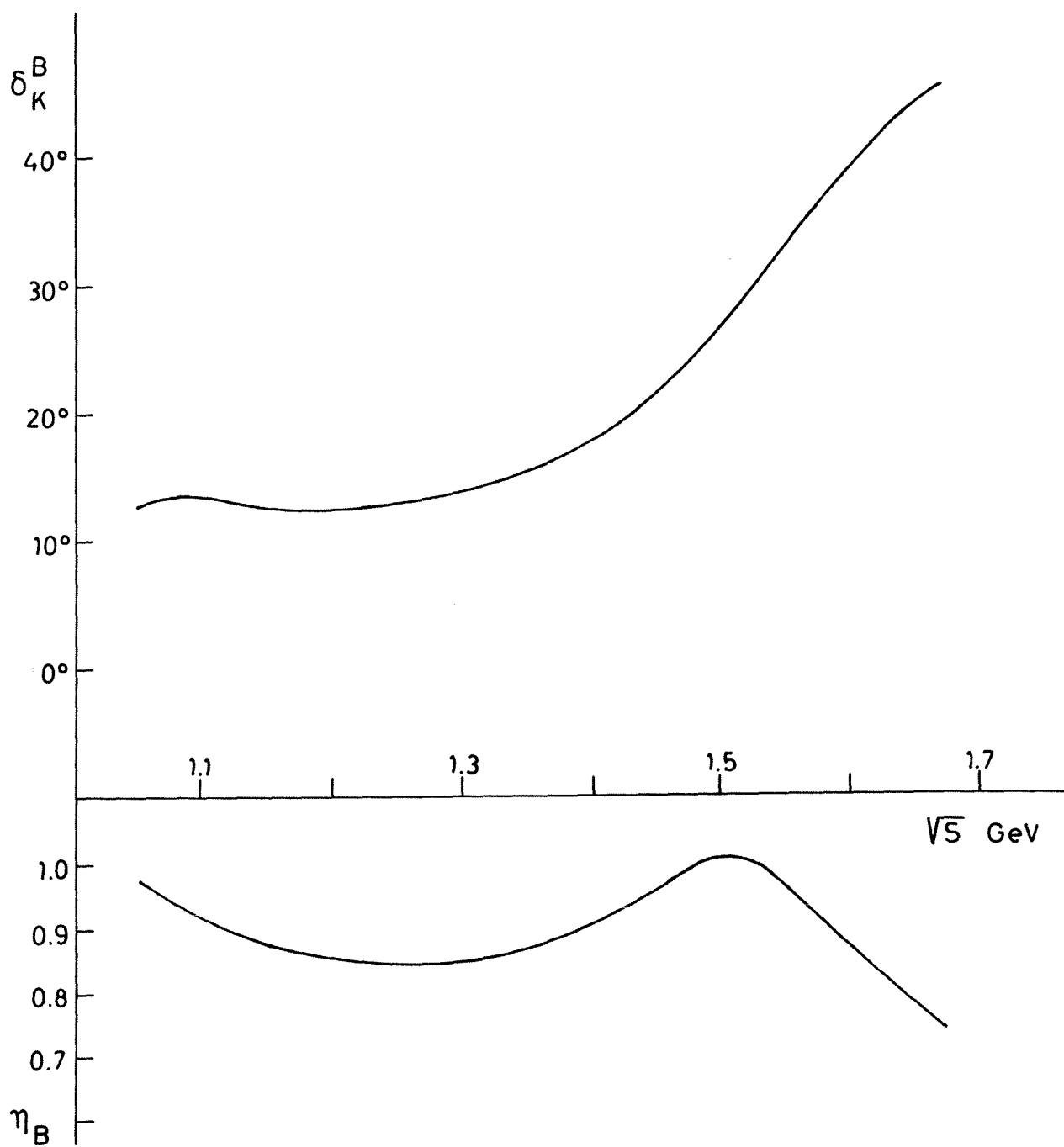


Fig. 8