Indice

1 Introducción teórica

1.1 El Modelo Standard

El Modelo Standard de las interacciones entre partículas elementales (MS) es una teoría cuántica de campos basada en la invariancia gauge bajo ciertos grupos de transformaciones que da cuenta de las interacciones fundamentales relevantes a las escalas de energía estudiadas experimentalmente en los aceleradores de partículas[1].

El MS consta de dos sectores diferenciados:

- La Teoría de las Interacciones Electrodébiles [1] (QFD), unifica las interacciones electromagnéticas y débiles mediante un grupo de invariancia inicial $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$ espontáneamente roto al grupo de invariancia observado experimentalmente $U(1)_{em}$ mediante el mecanismo de Higgs, lo que justifica la masa no nula de los bosones intermediarios de las interacciones débiles.
- La Cromodinámica Cuántica [2] (QCD), da cuenta de las interacciones entre quarks y gluones, cuyo reflejo son las interacciones fuertes entre la materia hadrónica. Se basa en un grupo de invariancia gauge de color $SU(3)_C$ sin ruptura espontánea de simetría, con lo que los bosones que median estas interacciones (gluones) son de masa nula.

1.2 Descripción de $e^+e^- \rightarrow hadrones$

En esta sección se ilustran los aspectos del MS que más directamente van a intervenir en nuestro análisis, mediante el desglose de un suceso hadrónico.

En el proceso $e^+e^- \rightarrow hadrones$ podemos diferenciar las siguientes zonas en función de la relevancia de cada uno de los sectores del MS [fig. 1]:

1. **electrodébil**: A las energías de LEP-I, la contribución dominante a la sección eficaz de aniquilación electrón-positrón en un par $q\bar{q}$ es la mediada por el bosón Z^0. El estudio de este proceso junto con el mediado por un fotón virtual γ^* y la introducción de las correcciones radiativas completan el marco teórico en el que se estudia esta primera fase del proceso.

---

[1] El hecho de que no exista una teoría cuántica de la gravitación completamente satisfactoria es irrelevante para nuestro estudio, ya que la interacción gravitatoria entre partículas elementales es indetectable en los experimentos de altas energías actuales.

2. **QCD perturbativa**: Los dos quarks iniciales pueden radiar gluones. A energías cercanas a las de los haces ($\sqrt{s} \sim M_{Z^0}$), el valor pequeño de la constante de acoplo de QCD ($\alpha_s \sim 0.1$), permite el estudio de este proceso perturbativamente. La simulación de QCD perturbativa mediante técnicas Monte Carlo puede tratarse mediante dos formulaciones distintas:
   - (a) *elemento de matriz (EM)*: Consiste en calcular exactamente los diagramas de Feynman orden a orden. En principio, este es el método correcto, ya que describe completamente la cinemática, los fenómenos de interferencia y la estructura de helicidad de los procesos. Sin embargo, lo complicado del cálculo hace que se disponga del elemento de matriz completo sólo hasta segundo orden de la teoría de perturbaciones [3], lo que no proporciona una descripción completa y detallada de la evolución perturbativa de quarks y gluones.
   - (b) *parton shower (PS)*: Consiste en modelizar el desarrollo de cascadas de partones mediante el uso de ecuaciones de evolución probabilísticas basadas en las de Altarelli-Parisi [4]. Con este tipo de generación no imponemos un número máximo de partones con lo que, en principio, podemos simular la subestructura de los jets hadrónicos. Sin embargo, las ecuaciones de evolución del PS no describen satisfactoriamente diversas cantidades como la fracción de sucesos hadrónicos de tres jets.

fig. 1.- Modelización de un suceso $e^+e^- \rightarrow$ *hadrones*. Las líneas punteadas definen las distintas zonas: *i:* electrodébil, *ii:* QCD perturbativa, *ii:* QCD no perturbativa y *iv:* desintegraciones hadrónicas.

3. **QCD no perturbativa**: Los partones hadronizan a baja energía, $E_{had} \sim 1\ GeV$, con lo que la teoría de perturbaciones no es aplicable. Para describir este proceso hay que recurrir a modelos inspirados en las principales características de QCD pero no derivables directamente de su lagrangiano. Estos modelos son algoritmos probabilísticos fácilmente implementables mediante técnicas Monte Carlo. Los esquemas de fragmentación más comúnmente utilizados están basados en los siguientes modelos generales:

    (a) Modelos de *fragmentación independiente* [5]: Consisten en suponer que se puede describir la fragmentación de todo sistema de partones como una suma incoherente de las fragmentaciones de cada uno de los partones separadamente [fig. 2.a].

    (b) Modelos de *fragmentación por cuerdas* [6]: La propiedad de confinamiento de QCD a grandes distancias se refleja en la formación de un flujo de color de dimensiones transversas pequeñas entre los quarks. Si asumimos que este tubo es uniforme, obtenemos un potencial que aumenta linealmente con la longitud, lo que hace que pueda ser descrito como una cuerda relativista de masa nula sin grados de libertad transversales. Cuando la distancia entre los quarks es suficientemente grande esta cuerda se fragmenta en los hadrones experimentalmente detectables [fig. 2.b].

    (c) Modelos de *fragmentación por clusters* [7]: Los clusters son formaciones de quark-antiquark sin grados de libertad internos y caracterizados únicamente por su masa total y por su contenido total en quarks. Se obtienen, o bien de la fragmentación de una cuerda o bien de la asociación de quarks tras el *parton shower* después de haber forzado el proceso $g \to q\bar{q}$ sobre todos los gluones finales. Los clusters dan lugar a los hadrones visibles [fig. 2.c].

4. **Desintegraciones hadrónicas**: En esta fase, los hadrones pesados creados inicialmente van decayendo en partículas suficientemente estables como para ser detectadas experimentalmente. Las predicciones teóricas están afectadas por mayores imprecisiones que los resultados experimentales, con lo que la implementación se realiza introduciendo las variables relevantes (anchuras parciales de desintegración, vidas medias...) medidas experimentalmente.

En esta memoria se presenta un análisis que se centra en el estudio de las dos fases intermedias en las que QCD gobierna la evolución: se realizará una medida de la constante de acoplo a energías del orden de la masa del bosón Z^0 y se abordará el estudio de fenómenos no perturbativos que permiten discriminar entre distintos modelos de fragmentación.

fig. 2.- Modelos de fragmentación:

fig. 2.A: Fragmentación independiente.
fig. 2.B: Fragmentación por cuerdas.
fig. 2.C: Fragmentación por clusters.

1.3 Estudios sobre jets

El método experimental de realizar un estudio sobre QCD perturbativa es encontrar variables sobre las cuales el efecto de la hadronización sea pequeño, ya que la fragmentación está inevitablemente asociada al proceso físico completo.

Un observable físico que nos relacione la detección experimental con QCD perturbativa debe ser:

- *insensible a las divergencias colineales e infrarrojas de QCD:* el valor que tome la variable no debe depender de la emisión de gluones de muy bajo momento o a muy bajo ángulo respecto a los quarks primarios.

- *fácilmente implementable teórica y experimentalmente:* las predicciones de QCD respecto al valor de la variable deben ser calculables perturbativamente y experimentalmente reproducibles mediante la información recogida en el detector.

- *Poco sensible al proceso de hadronización:* aun cuando a las energías de LEP la fragmentación tiene menor importancia que a energías menores[1], el efecto de este proceso sobre el valor de la variable debe ser parametrizable y pequeño.

1.3.1 Definiciones de jet

Los jets hadrónicos, concebidos como una gran acumulación de energía en forma de hadrones colimada en una pequeña región angular, constituyen un observable que relaciona QCD perturbativa con la detección experimental, ya que sus direcciones y energías están relacionadas con las de los partones diferenciados (quarks primarios y gluones duros) [fig. 3]. A continuación se darán definiciones operativas de jet y de variables asociadas con la estructura en jets de los sucesos hadrónicos, es decir, definidas de modo que cumplen las premisas anteriormente indicadas.

Tradicionalmente se ha atacado el problema de la determinación de la estructura en jets de los sucesos hadrónicos mediante dos estrategias esencialmente distintas:

1. **Parámetros de forma global:** No están asociados a una definición de jet, sino que caracterizan estadísticamente la forma de los sucesos mediante un parámetro continuo que indica el alejamiento de la situación de isotropía, que es lo que define intuitivamente la estructura

---

[1] Los efectos de la hadronización decaen típicamente con potencias de E_{CM} respecto a los términos dominantes del desarrollo perturbativo.

fig. 3.- Suceso de tres jets ($q\bar{q}g$).

en jets del suceso.
Se han definido varios parámetros en función del tipo de topología que se quiera identificar con mayor eficiencia; así, se identificó la estructura en jets (2-jet) [8] mediante el estudio del descenso de la esfericidad media, S: los sucesos ideales de dos jets tienen $S = 0$ mientras que en los sucesos isótropos $S = 1$. La variable *thrust* [9], T, se ideó con objeto de distinguir sucesos de dos jets de sucesos con multiplicidad más elevada. Se han definido otras variables independientes con objeto de caracterizar mediante un conjunto de valores sucesos con distinta multiplicidad en jets (su definición y propiedades pueden consultarse en [10]).

2. **Algoritmos de separación de jets:** Parten de una definición de jet concreta, con lo que suceso a suceso determinan la multiplicidad en jets y sus direcciones y energías. Se caracterizan por poseer una o más variables de test cuyo valor define la sensibilidad a la emisión de gluones a bajo ángulo o baja energía. Constituyen un procedimiento de análisis más completo que el anterior en la determinación de las características de los jets. Se distinguen dos tipos fundamentales:

a) el *algoritmo de Sterman-Weinberg* [11] define tanto a nivel de partones como experimentalmente un suceso de dos jets como aquel en el que la fracción de energía no contenida en dos conos opuestos de semiabertura δ es menor que ϵ. El par (ϵ, δ) es la variable bidimensional de test en este caso.

b) los *algoritmos de clusterización* consisten en formar los jets mediante asociación de partículas. Para ello se define una métrica y se procede asociando las dos partículas más cercanas si distan menos que una cierta distancia de corte, formándose una nueva pseudopartícula o cluster. Este proceso se itera hasta que todos los clusters formados disten más que el valor de corte. Los clusters restantes son lo que denominamos jets.

Dado que se utilizarán algoritmos de *clusterización* en el análisis aquí presentado, se describe a continuación con mayor detalle una clase genérica de éstos.

1.3.2 Algoritmos de masas invariantes

Hemos definido anteriormente las características generales de los algoritmos de clusterización. De entre ellos, los más comúnmente aplicados son aquellos en los que la métrica se basa en la masa invariante del sistema formado por dos partículas. Dadas dos partículas i y j, se denotará y_{ij} a la distancia M_{ij}^2 reescalada con $S = E_{CM}^2$ $(y_{ij} = M_{ij}^2/S)$.

Para tener completamente definido un algoritmo de masas invariantes hace falta definir la medida y el modo o esquema de recombinación de las partículas en clusters.

- **definición de M_{ij}^2**

  1. *tipo JADE* [12]: consiste en definir como distancia la verdadera masa invariante de las dos partículas:

  $$M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2 \; = 2E_iE_j\,(1 - \cos\theta_{ij}) \quad (m_{i,j} = 0)$$

  2. *DURHAM* [13]: Con objeto de evitar asociaciones entre gluones de baja energía y colineales a distinto quark dando lugar a una identificación no intuitiva de sucesos de tres jets [fig. 4], además de impedir la exponenciación de los términos dominantes del desarrollo perturbativo [14], se dio una definición alternativa para la distancia:

  $$M_{ij}^2 = 2\min\left(E_i^2, E_j^2\right)(1 - \cos\theta_{ij})$$

- **esquema de recombinación** La identificación de la multiplicidad en jets de un suceso puede depender, además de la definición de la distancia, del esquema bajo el que se hayan recombinado las partículas; esto es, de la definición del cuadrimomento del cluster formado a partir de los de las partículas que se recombinan. Las definiciones de los esquemas básicos de recombinación se detallan en la siguiente tabla:

Esquema	recombinación
E	$p_k = p_i + p_j$
$E0$	$E_k = E_i + E_j$ $\vec{p}_k = \frac{E_k}{\lvert\vec{p}_i + \vec{p}_j\rvert}\,(\vec{p}_i + \vec{p}_j)$
P	$\vec{p}_k = \vec{p}_i + \vec{p}_j$ $E_k = \lvert\vec{p}_k\rvert$

Se pueden describir algunas de las características de cada uno de estos tres esquemas de recombinación:

1. el esquema E es invariante Lorentz (exacto): el cuadrimomento de la pseudopartícula se obtiene como suma de los cuadrimomentos de las partículas recombinadas. Los jets serán, en general, masivos.
2. el esquema $E0$ conserva la energía pero no el trimomento ya que, recombinación a recombinación se reescala con objeto de obtener pseudopartículas y, finalmente, jets no masivos.
3. el esquema P consigue también jets no masivos pero, a diferencia del anterior, reescalando la energía en cada paso.

En el apartado 3.3 se expone un estudio comparativo de varios de los algoritmos de separación de jets aquí descritos, mediante su aplicación sobre una misma muestra de sucesos hadrónicos cuya generación y paso a través del detector L3 han sido simulados mediante técnicas Monte Carlo.

fig. 4.- Configuración $q\bar{q}gg$ identificada como de tres jets por el algoritmo de JADE.

1.4 Objetivos del estudio

En el apartado 1.2 se ha descrito cómo operativa y conceptualmente se pueden distinguir dos regiones para QCD. La perturbativa, que queda completamente definida por la medida del parámetro libre α_s a una determinada escala de energía, y la no perturbativa, que se intenta describir mediante modelos fenomenológicos que no se deducen directamente del lagrangiano de la teoría.

Uno de los fenómenos asociados a QCD no perturbativa, descrito ya en los experimentos de PETRA a $\sqrt{s} \approx 30\ GeV$ sobre sucesos hadrónicos $e^+e^- \to$ *3-jet*, es la menor producción de partículas en la zona situada entre los jets de q y $\bar{q}$ respecto a las otras dos zonas inter-jets[1] [16], observación confirmada posteriormente por otros experimentos de colisiones e^+e^- [17, 18, 19]. Esta asimetría aparece de un modo natural en el modelo de fragmentación por cuerdas y por ello fue denominado *string effect*.

Se realizarán dos análisis complementarios sobre una muestra enriquecida en quarks pesados ($e^+e^- \to b\bar{b}$ y $e^+e^- \to c\bar{c}$) relativos a aspectos de QCD perturbativa y QCD no perturbativa:

- medida de α_s: La fracción de sucesos de tres jets sobre el total de sucesos de una cierta muestra hadrónica es proporcional a la constante de acoplo de QCD, con lo que, una vez identificada la muestra dentro de los sucesos hadrónicos podemos aplicar un algoritmo identificador de la multiplicidad en jets del suceso y dar un valor para α_s.

- estudio del *strig-effect*: Sobre una muestra de sucesos de tres jets y mediante una eficaz identificación de los jets puede observarse la asimetría tanto en número de partículas como en energía depositada en las zonas inter-jets y cuantificarla mediante diversas estimaciones.

Asumido el Modelo Standard, el valor de α_s obtenido mediante este análisis será menos preciso que el que se obtiene utilizando la muestra total de sucesos hadrónicos. Sin embargo, el valor obtenido tiene importancia doble:

1. Se ha obtenido sobre una muestra enriquecida en quarks pesados, lo que, en cierto modo, sirve como test de universalidad para QCD.

2. Se ha obtenido como un paso intermedio en el estudio del *string effect*, sirviendo como test del análisis completo.

---

[1] Una posible simulación de este efecto dentro del marco de QCD perturbativa puede encontrarse en [15].

fig. 5.- El detector L3:
fig. 5.A: Sección transversal al haz.

fig. 5.B: Sección longitudinal.

2 Descripción del detector L3

L3 es uno de los cuatro detectores instalados en el colisionador LEP. Situado en el área experimental P2, estudia las interacciones e^+e^- producidas, en la primera fase de LEP, a unas energías en torno a la masa del bosón Z^0 ($\sqrt{s} \approx 91\ GeV$).

L3 es un detector multiuso que cubre el 99% del ángulo sólido alrededor del punto de interacción y en cuyo diseño se puso especial énfasis en la medida de muones, electrones y fotones con alta resolución [20]. Constituye una estructura de $12 \times 12 \times 12 m^3$ que encierra un campo magnético uniforme de $0.5T$ en la dirección del haz. Para determinar con precisión la trayectoria de las partículas producidas en la interacción, se sitúa cerca del vértice una cámara de deriva en la que las partículas cargadas dejan una traza. Alrededor de este subdetector se encuentran los calorímetros, que miden la energía de las partículas en función de la señal que éstas depositan en ellos. Los calorímetros están diseñados de modo que las partículas que interaccionan con ellos depositen toda su energía en el interior del dispositivo. Su alta resolución angular está basada en una elevada segmentación. Primeramente, se halla situado el calorímetro electromagnético, diseñado para medir con excelente precisión la energía de fotones y electrones. Los hadrones pueden atravesar este calorímetro depositando parte de su energía, siendo detenidos en un nuevo calorímetro que rodea al anterior y mediate el cual se determina su energía y posición; se trata del calorímetro hadrónico. Finalmente, los muones, al ser partículas de baja interacción con la materia, pueden atravesar ambos calorímetros. Para identificarlos y medir con precisión su momento, se sitúan exteriormente tres niveles de cámaras de deriva separadas entre sí.

Un suceso hadrónico genérico se caracteriza por dar lugar a gran cantidad de partículas (leptones y hadrones) neutras y cargadas, con lo que las partes del detector que intervienen principalmente en la detección de los productos de desintegración de estos sucesos son la cámara de vértice y los calorímetros. Debido a las características concretas del análisis que aquí se presenta, las cámaras de muones juegan también un papel esencial.

A continuación, se describirán con más detalle cada uno de los elementos que componen el detector L3 [figs. 5].

2.1 La cámara de vértice (TEC)

Ocupa la parte más interna de L3 rodeando el tubo del haz. Se trata de una cámara de deriva cilíndrica de $8cm$ de radio interno, $50cm$ de radio externo y $90cm$ de longitud, que funciona en modo de expansión de tiempo (*Time*

Expansion Chamber) y que está dividida en dos cilindros concéntricos. El número de hilos que actúan en la medida de una traza es 62 y la resolución ideal en el plano transverso es de $50\mu m$ por hilo, lo que permite la identificación de la carga de una partícula de 50 GeV al 95% de nivel de confianza. Rodeando a la cámara de deriva existen dos cámaras proporcionales que permiten la medida de la coordenada z con una resolución de $300\mu m$.

2.2 El calorímetro electromagnético (BGO)

El calorímetro electromagnético de L3 tiene como finalidad la medida de la posición y energía de electrones y fotones, y ayudar en la identificación de hadrones y muones. Está constituido por unos 11000 monocristales de BGO (germanato de bismuto) en forma de pirámide truncada de bases $2 \times 2\ cm^2$ y $3 \times 3\ cm^2$ y 24 cm de altura. Estos cristales se disponen sobre una estructura soporte alrededor de la TEC, apuntando al vértice de interacción. El calorímetro se compone de una parte central o *barrel*, que cubre la región $42.3^\circ < \theta < 137.7^\circ$, y dos partes laterales o *end caps*, que cubren las regiones $12^\circ < \theta < 42^\circ$ y $138^\circ < \theta < 168^\circ$. La resolución en la medida de la energía varía desde cerca de un 5% a 100 MeV hasta cerca del 1% por encima de 1 GeV; la resolución espacial medida por encima de 2 GeV es menor que 2 mm y la separación electrón/hadrón a más de 1 GeV es $1:1000$.

2.3 Contadores de tiempo de vuelo

Entre los calorímetros electromagnético y hadrónico se sitúan los contadores de tiempo de vuelo. Se trata de 30 tiras de plástico centelleador de 1 cm de espesor dispuestas longitudinalmente siguiendo la forma del calorímetro hadrónico. Los plásticos llevan asociados a cada uno de sus extremos un fotomultiplicador, con lo que el paso de una partícula ionizante a través de uno de los centelleadores produce una señal en cada uno de los dos fotomultiplicadores asociados. De estas dos medidas se obtiene el tiempo de paso y la coordenada z de la partícula detectada. Su buena precisión en tiempo ($\simeq 0.5\ ns$) permite usarlos para distinguir entre muones cósmicos y sucesos de dimuones: la diferencia de tiempos de vuelo entre centelleadores opuestos es 5.8 ns para un muon cósmico, mientras la diferencia de tiempos entre las señales procedentes de la pareja de muones de un suceso $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ debe ser compatible con cero.

2.4 El calorímetro hadrónico

Las cascadas hadrónicas no se recogen totalmente en el BGO. Para recoger toda la energía que escapa del calorímetro electromagnético, éste se encuentra totalmente recubierto por un calorímentro hadrónico compuesto de una sucesión de placas de absorción de uranio y de cámaras proporcionales cuyos hilos están orientados en alternancia en la dirección del eje del haz y perpendicularmente a él. Se compone de una parte central o *barrel* y dos de bajo ángulo o *end caps* que, en conjunto cubren el 99.5% del ángulo sólido. El número de longitudes de absorción es superior a 4 en cualquier dirección y la resolución alcanzada para sucesos $e^+e^- \rightarrow hadrones$ es de un $10\sqrt{E}\%$ en la zona central y del orden del $14\sqrt{E}\%$ en los *end caps.* El calorímetro hadrónico nos permitirá, gracias a su fina segmentación, localizar angularmente los jets.

2.5 El filtro de muones

Consiste en ocho octantes idénticos formados por seis placas absorbentes de latón de 1 *cm* de grosor, intercaladas con cinco cámaras proporcionales y seguidas de cinco capas absorbentes de 1.5 *cm.* Su principal misión es añadir 1.03 longitudes de absorción al calorímetro hadrónico para la detención de las partículas que no sean muones.

2.6 Las cámaras de muones

El detector de muones de L3 ocupa la parte más externa del mismo. Constituye el subdetector más grande de L3, con 11.4 m de longitud y 5.6m de radio exterior. Está compuesto por dieciséis módulos semejantes denominados octantes, ya que cada uno de ellos cubre 1/8 del ángulo total en el plano $r\varphi$. Ocho de ellos se disponen en la zona $z < 0$ y los ocho restantes simétricamente en $z > 0$. Cada octante está formado por:

- Tres cámaras llamadas P, que permiten determinar, además de las coordenadas x e y, el momento del muon. Para ello, miden la curvatura de un muon mediante 56 señales, alcanzando una precisión en la determinación del momento de $\sigma_p/p \approx 0.06p(\%)$, es decir, del $2.8 \pm 0.2\%$ para muones de 45 GeV.

- Cuatro cámaras llamadas Z, que determinan la coordenada z. Dos de ellas envuelven a la cámara P interna y dos a la externa. Cada cámara tiene dos planos de hilos, de modo que en conjunto localizan la posición en la dirección del haz mediante 8 señales, con una precisión en la pendiente menor del 1%.

Si exigimos que haya señales en todas las cámaras, el ángulo sólido cubierto es $44° < \theta < 136°$. Exigiendo únicamente señales en dos de las cámaras P y una de las parejas de cámaras Z, dicho ángulo se amplía hasta $35.7° < \theta < 144.3°$.

2.7 El monitor de luminosidad

La medida de la luminosidad en LEP se realiza mediante el recuento del número de sucesos Bhabha ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) a bajo ángulo, ya que la sección eficaz de este proceso es muy alta, conocida e independiente del Modelo Standard (la contribución dominante a bajo ángulo es la mediada mediante el intercambio de un γ en el canal t). En L3, el monitor de luminosidad costa de dos calorímetros electromagnéticos de BGO situados en las zonas anterior y posterior del detector, lejos del vértice de interacción (265 *cm*) y a muy bajo ángulo con respecto al haz.

2.8 El sistema de *trigger*

El *trigger* consiste en un sistema rápido de decisión que discrimina los sucesos válidos frente a sucesos espúreos, es decir, sucesos que no proceden de la interacción e^+e^- o que no interesan para el análisis. Un sistema de trigger optimizado consigue minimizar los tiempos muertos del detector. En LEP, los haces de electrones y positrones se cruzan en el centro geométrico de L3 con una frecuencia aproximada de 45000 *Hz* (un cruce cada 22 μs), aunque, por término medio sólo un cruce cada diez segundos dará lugar a una interacción. Por todo esto, se hace necesario un buen sistema de *trigger* de la cadena de toma de datos que decida, en el reducido espacio de tiempo entre dos colisiones si se ha producido un suceso válido o no.

El sistema de *trigger* suele emplear una parte muy reducida de la información debido a que la respuesta debe darse en un tiempo menor que 22 μs mientras que la lectura completa de la información recogida en el detector es mucho más lenta (el detector L3 utiliza en promedio 1 *Mbyte* por suceso). Si se satisfacen unos criterios muy generales el suceso se acepta. Se debe llegar a un compromiso para estos criterios, ya que deben ser lo suficientemente poco restrictivos como para no perder sucesos válidos y, a su vez, deben conseguir rechazar gran parte de los sucesos espúreos.

El sistema de trigger está estructurado en tres niveles:

- *El nivel 1* recoge los datos considerados más significativos de cada subdetector y los procesa, mediante algoritmos sencillos, para poder tomar una decisión en los 22 μs entre colisiones. Si la respuesta es negativa, el detector es reinicializado para recoger información sobre el siguiente suceso. Si es positiva, se activa la conversión analógico-digital de los datos, que son pasados al segundo nivel. El flujo de datos tras el nivel 1 es de unos 100 *Hz*.

- *El nivel 2* procesa los sucesos aceptados por el nivel 1. Al disponer de más tiempo que el nivel 1, puede reconstruir la información del *trigger* completa y estudiar con más detalle las características del suceso. El flujo de datos tras el nivel 2 es $10 - 50$ *Hz*. Estos pasan al último nivel de *trigger*.

- *El nivel 3* es en el que toda la información del suceso ha sido recogida ya (aunque todavía no registrada en cinta), y está disponible para que el suceso sea procesado de forma análoga a la que se usará posteriormente en la reconstrucción *offline*. El suceso es registrado por el experimento si no ha sido rechazado por ninguno de los tres niveles.

3 Selección de la muestra

3.1 Características generales de la muestra

El análisis presentado a continuación se basa en la selección de una muestra de sucesos hadrónicos enriquecida en quarks pesados (b o c). Por ello, además de exigir características hadrónicas, se identificarán los sucesos $e^+e^- \rightarrow b\bar{b}$ y $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}$ mediante la exigencia de un muon procedente de una desintegración semileptónica de los quarks b o c, puesto que ésta es la principal fuente de leptones energéticos incluidos en sucesos hadrónicos.

Este mismo procedimiento etiqueta con gran probabilidad un jet procedente de quark o antiquark frente a uno gluónico (procedente del gluon) [21], lo que nos permitirá realizar el análisis del *string effect* sobre la submuestra de sucesos de tres jets.

3.2 Criterios de selección de la muestra

Para el estudio del *string effect* se usará una identificación basada en los muones. Por ello, hemos partido de una muestra preseleccionada de sucesos con muones inclusivos[1]. Dado que los cortes de preselección son muy poco restrictivos, podemos asegurar que la pérdida de buenos sucesos al aplicarlos es despreciable[2].

La muestra utilizada pertenece al total de sucesos hadrónicos recogidos en el detector L3 durante el año 1991. La luminosidad integrada es de $13.1pb^{-1}$, lo que se significa unos 320000 sucesos hadrónicos provenientes de la desintegración del Z^0. De ellos, 95628 sucesos pasan estos cortes de preselección.

Paralelamente, y con objeto de estudiar los cortes efectuados sobre la muestra inicial, se ha utilizado una muestra de 135359 sucesos $q\bar{q}$ Monte Carlo generados mediante el programa JETSET 7.3 [22], que incorporan la respuesta del detector mediante el programa de simulación SIL3 basado en GEANT 3.14 [23] y para cuya reconstrucción se han usado los mismos programas que para los datos.

---

[1] Con esta nomenclatura designamos los sucesos que han pasado algunos criterios de selección previos exigiendo características hadrónicas generales y que contengan al menos una traza en las cámaras de muones.

[2] En el caso de la exigencia de una traza en el detector de muones esto no es así; de hecho, posteriormente se corregirá por la eficiencia de este subdetector.

3.2.1 Cortes hadrónicos

Experimentalmente, un suceso hadrónico lleva asociadas una serie de trazas características que nos permiten diferenciarlo claramente.

Las únicas partículas que atraviesan el detector sin interaccionar son los neutrinos. En un suceso hadrónico no nos esperamos neutrinos muy energéticos con lo que la energía depositada en los calorímetros debe ser aproximadamente la totalidad de la disponible (la del centro de masas), depositándose de un modo compensado en todas las direcciones. Por otro lado, frente a lo que ocurre en un suceso leptónico, un suceso hadrónico tiene elevada multiplicidad fruto de la fragmentación de los partones en hadrones. Estas dos características nos definen variables sobre las que podemos imponer cortes de selección, ajustados mediante estudios Monte Carlo, que nos definen con gran eficiencia la muestra de hadrónicos.

Las variables y valores concretos que modelan el comportamiento hadrónico de un suceso tomado en L3 son:

- $0.5 < E_{vis}/\sqrt{s} < 1.5$
- $|E_{||}|/E_{vis} < 0.5$
- $E_{\perp}/E_{vis} < 0.5$
- $N_{cluster} \geq 18 \ si \ |\cos\theta_{th}| < .743 \quad (barrel)$
  $N_{cluster} \geq 14 \ si \ |\cos\theta_{th}| > .743 \quad (end\ caps)$

donde E_{vis} corresponde a la energía calorimétrica total depositada por el suceso; $E_{||}$ y $E_{\perp}$ son la proyección en el eje del haz y en el plano $r\varphi$ respectivamente de la suma vectorial de los depósitos calorimétricos (*imbalances* o descompensaciones); $N_{cluster}$ corresponde al número de asociaciones o cúmulos (*clusters*) calorimétricos reconstruidos a partir de los depósitos de energía en los calorímetros (da una idea de la multiplicidad del suceso) y θ_{th} es el ángulo que forma la dirección del *thrust* del suceso con la del haz. El hecho de que se distingan dos regiones angulares correspondientes al *barrel* o zona central y a los *end caps* o zona de bajo ángulo corresponde a la distinta geometría del detector en las dos zonas lo que hace que se apliquen distintos algoritmos de reconstrucción de *clusters*.

Mediante un estudio Monte Carlo de estos cortes obtenemos una aceptancia superior al 99%, con una contaminación estimada del 0.1% [24].

De los 95628 sucesos preseleccionados, 51749 pasan estos cortes.

En la figura 6 se muestran las distribuciones de estas variables para datos reales y para sucesos Monte Carlo señalándose los valores de corte. Se muestra también la distribución tras los cortes de la energía recogida en los calorímetros.

fig. 6.- Cortes hadrónicos. Distribuciones de las variables significativas efectuados todos los cortes hadrónicos salvo el correspondiente:

fig. 6.A: Energía visible.
fig. 6.B: Descompensación transversal.
fig. 6.C: Descompensación longitudinal.

fig. 6.D: *Clusters* calorimétricos a bajo ángulo (*end caps*).
fig. 6.E: *Clusters* calorimétricos a alto ángulo (*barrel*).
fig. 6.F: Energía depositada en los calorímetros (efectuados los cortes hadrónicos).

3.2.2 Cortes muónicos

Deseamos distinguir mediante variables medibles experimentalmente las trazas en las cámaras de muones que proceden de una desintegración semileptónica de un quark pesado. Primeramente, para poder determinar el momento y la carga del muon es necesario que haya atravesado al menos un número mínimo de planos de cámaras. Otra variable que nos puede permitir diferenciar las trazas que nos interesan es su distancia mínima al vértice de interacción: los muones procedentes de una desintegración semileptónica de un quark pesado provienen del vértice[1]. Por último, debido a la fragmentación dura de los quarks pesados en hadrones, los muones que constituyen la señal tienen una energía superior a la de las posibles contaminaciones. La exigencia de un momento mínimo para la traza reconstruida nos permite enriquecer la muestra en quarks pesados y disminuir la contaminación.

Los cortes que se exponen a continuación son la optimización, ajustada mediante un estudio Monte Carlo, de las exigencias físicas antes expuestas:

- $\#pseg \geq 2$, $\#zseg \geq 1$
- $d^{r\varphi}_{min} < 200\ mm$, $d^{z}_{min} < 300\ mm$
  $\#\sigma_{r\varphi} < 4$, $\#\sigma_z < 4$
- $4\ GeV/c < P_\mu < 30\ GeV/c$

donde $\#pseg$ y $\#zseg$ denotan el número de niveles de cámaras P y el número de parejas de cámaras Z respectivamente, usados para reconstruir la traza del muon; $d^{r\varphi}_{min}$ y d^{z}_{min} son la mínima distancia al vértice de interacción en el plano $r\varphi$ y z respectivamente, de la traza reconstruida; $\#\sigma_{r\varphi}$ y $\#\sigma_z$ expresan las distancias anteriores medidas en unidades del error estimado en la reconstrucción de la traza; P_μ indica el momento reconstruido del muon cuya traza estamos estudiando.

En la figura 7 se observan las distribuciones para las variables de corte de los muones. Se ha corregido el Monte Carlo por la eficiencia media de las cámaras de muones durante la toma de datos ($92.2 \pm 0.5\%$)[25]. El área cuadriculada corresponde a la muestra de sucesos Monte Carlo identificada como la señal, es decir, muones que proceden de una desintegración primaria de una quark pesado (b o c).

Mediante un estudio Monte Carlo podemos estimar la composición de la muestra obtenida tras los cortes. Para ello identificaremos las principales fuentes de muones inclusivos hadrónicos y otros tipos de sucesos que pueden simular esta señal:

---

[1] Estrictamente, el muon debe proceder de un vértice secundario, ya que corresponde a la desintegración de un mesón tipo B o D; sin embargo, debido a la pequeña vida media de estos hadrones, éste puede considerarse situado en el vértice de interacción.

fig. 7.- Cortes muónicos. Distribuciones de las variables significativas efectuados todos los cortes muónicos salvo el correspondiente (encierran una área cuadriculada las distribuciones correspondientes a muones que proceden de una desintegración primaria de b o c):

fig. 7.A: Momento del muon reconstruido.

fig. 7.B: Distancia mínima al vértice en el plano rφ de la traza reconstruida.
fig. 7.C: Distribución correspondiente en el eje del haz.
fig. 7.D: Distancia mínima al vértice en el plano rφ en unidades del error de reconstrucción estimado.
fig. 7.E: Distribución correspondiente en el eje del haz

1. $b \to \mu$: muones procedentes de sucesos $e^+e^- \to b\bar{b}$ donde el μ proviene de la desintegración primaria de un b:

$$b \to c\mu^- \bar{\nu}_\mu$$

2. $b \to c \to \mu$: muones procedentes de sucesos $e^+e^- \to b\bar{b}$ donde el μ proviene de la desintegración de un c:

$$b \to cW^-; c \to s\mu^+\nu_\mu$$

$$b \to cW^-; W^- \to \bar{c}s; \bar{c} \to s\mu^-\bar{\nu}_\mu$$

3. $c \to \mu$: muones procedentes de sucesos $e^+e^- \to c\bar{c}$ donde el μ proviene de la desintegración primaria de un c:

$$c \to s\mu^+\nu_\mu$$

4. **Contaminación**: corresponde a los procesos que pueden simular la señal. Hemos estudiado dos fuentes generales de contaminación:
    - *punch-through*: un hadrón cargado llega hasta las cámaras de muones dejando una señal análoga a la que dejaría uno de éstos.
    - desintegración: el muon detectado procede de la desintegración de un hadrón ligero cargado o de la interacción de uno de éstos con el detector.

En la siguiente tabla se muestra la evolución de la composición de la muestra en cada uno de los canales de producción de muones con el corte en P_μ mínimo:

P_μ^{min}	$b\mu + bc\mu$	$c\mu$	cont.
$2\ GeV/c$	$43.5 \pm 0.7\%$	$15.2 \pm 0.4\%$	$41.3 \pm 0.7\%$
$3\ GeV/c$	$46.4 \pm 0.8\%$	$16.1 \pm 0.4\%$	$37.5 \pm 0.7\%$
$4\ GeV/c$	$49.4 \pm 0.9\%$	$16.7 \pm 0.5\%$	$33.9 \pm 0.7\%$

Aplicados los cortes se obtiene una muestra de 16970 sucesos que cumplen nuestros criterios hadrónicos y muónicos. De ellos 16123 tienen un único μ identificado y 825 son sucesos con dos muones.

La fracción de sucesos 2μ calculada a partir de los valores medidos para las anchuras parciales de desintegración semileptónicas de los quarks pesados [24, 26] y suponiendo que la aceptancia geométrica del detector es similar para sucesos de 1μ y para sucesos de 2μ, resulta ser, para una muestra compuesta por quarks pesados en la proporción predicha por el Modelo Standard: $\#\mu\mu X / \#\mu X \simeq 0.13$, mientras que en la muestra seleccionada este factor es

$\simeq 0.05$. El motivo de esta aparente discordancia se encuentra principalmente en el corte en P_μ ya que aproximadamente el 50% de los muones que constituyen la señal y cuya dirección está en el interior del ángulo sólido cubierto por las cámaras de muones tienen un momento menor que 4 GeV/c (la correlación en la energía de los dos muones es despreciable). De hecho, en la figura 7.A puede observarse que más del 20% de los muones que constituyen la señal y que llegan a las cámaras tienen un momento inferior a 4 GeV/c.

El contenido en quarks pesados de la muestra enriquecida es del $80 \pm 1\%$.

Una variable que puede discriminar entre b y c es el momento transverso del muon respecto al hadrón del que procede, debido a que los mesones con *belleza* son más pesados que los mesones con *encanto*, con lo que sus productos de desintegración tendrán un mayor momento transverso respecto a la línea de vuelo del mesón. Experimentalmente se trabaja con el $p_\perp$ del muon respecto al jet asociado, con lo que se puede enriquecer más la muestra en quarks b imponiendo un $p_\perp$ mínimo del muon. Dado que para el estudio de QCD nos centraremos en la muestra enriquecida en quarks pesados (b y c), no aplicaremos este corte.

3.3 Obtención de la muestra de tres jets

Sobre la muestra preseleccionada podemos obtener una submuestra de sucesos de tres jets. Se realizará un estudio de tres algoritmos de identificación de jets de los expuestos en el apartado 1.3, optimizando sus parámetros libres con objeto de aplicar aquel que asegure mayor estadística de sucesos de tres jets junto una menor sensibilidad a los efectos que introducen el proceso de fragmentación y la detección experimental.

Con la finalidad de parametrizar los efectos de fragmentación y del detector, introduciremos la noción de <u>pureza</u> de la muestra de tres jets. Definimos:

$$f_3^d = \frac{\#3 - jet, d}{\sum_{i \geq 2} \#i - jet, d}$$

$$P_3 = \frac{\#3 - jet, gd}{\#3 - jet, d}$$

donde $\#i - jet, d$ es el número de sucesos reconstruidos como i-jet con la información recogida en el detector, mientras que $\#i - jet, gd$ se refiere a los sucesos Monte Carlo que han sido reconstruidos con i-jet tanto con la información recogida tras el paso por el detector como con la proveniente del generador del suceso antes de la fragmentación (partones). P_3 denota la pureza estimada para la muestra experimental de sucesos de 3 jets.

A continuación se detallan los resultados obtenidos mediante la aplicación de los algoritmos de separación de jets sobre la muestra de sucesos Monte Carlo que pasan los cortes descritos en el apartado 3.2:

- (ϵ,δ): consiste en una variante del algoritmo de Sterman-Weinberg adecuado para la resolución de sucesos con más de dos jets. Un suceso se dirá de n jets si hay n conos de semiabertura δ con vértice en el de interacción del suceso, que no se cortan y tales que cada uno de ellos encierra una fracción de energía mayor que ϵ [fig. 8].

fig. 8.- Algoritmo (ϵ,δ) sobre un suceso de 3 jets.

Fijado el parámetro δ ($\delta = 30^\circ$), se ha variado ϵ entre los valores $12GeV/E_{vis}$ y $2GeV/E_{vis}$, observándose un pogresivo aumento de f_3^d (del 17% al 34%) y disminución de la pureza (del 79% al 48%).

- *tipo JADE*: hemos tomado el algoritmo de masas invariantes con el esquema de recombinación E0.

  Se ha variado y_{min} entre 0.08 y 0.001 obteniéndose en la zona óptima (≈ 0.01) elevadas fracciones de sucesos de tres jets ($\simeq 50\%$) con una pureza aceptable ($\simeq 70\%$).

- *DURHAM*: es el más completo desde el punto de vista teórico. Se ha hecho un test de su comportamiento exigiendo alta estadística y pureza utilizando el esquema de recombinación E0.

  Se ha variado y_{min} entre 0.05 y 0.001 obteniéndose en la zona óptima (≈ 0.005) fracciones de sucesos de tres jets aceptables ($\simeq 35\%$) con una pureza también aceptable ($\simeq 70\%$).

Para aplicar los algoritmos sobre los sucesos a nivel de detector se ha utilizado la energía depositada en los calorímetros más la energía de las trazas detectadas en las cámaras de muones como energía visible, tomándose cada una de las asociaciones calorimétricas (*clusters*) con una energía mayor que 100 MeV. Las características descritas son generales y no dependen prácticamente del esquema de recombinación utilizado.

El algoritmo *tipo JADE* es el más eficiente ya que une, en una determinada región de y_{min}, elevada estadística y pureza. El algoritmo de *DURHAM* posee buenas propiedades en cuanto a la pureza, pero no es posible conseguir grandes muestras con pureza aceptable. Por último, el algoritmo (ϵ, δ) no responde a los requisitos deseables de elevada estadística y pureza.

Para el estudio del *string effect* deberemos trabajar sobre una muestra concreta, por ello, debemos escoger no sólo el algoritmo sino también el esquema de recombinación que utilizaremos. Con este objetivo, se exponen a continuación algunas de sus propiedades:

1. las correcciones radiativas están calculadas para estados finales sin masa. Los esquemas E0 y P nos proporcionan jets sin masa.

2. los jets deben aproximar las direcciones de los partones antes de la fragmentación. Los esquemas E y P suman vectorialmente los trimomentos de las partículas recombinadas.

En el análisis del *string effect* se expondrán los resultados obtenidos con el esquema de recombinación P, aunque se ha realizado el mismo estudio con los otros esquemas de recombinación con objeto de estimar su influencia.

fig. 9.- Suceso de tres jets recogido en L3 que pasa los cortes de selección.

4 Cálculo de α_s

En este capítulo se presenta la determinación del valor de la constante de acoplo de QCD, α_s, a partir de la fracción de sucesos de tres jets obtenida mediante la aplicación del algoritmo de masas invariantes *tipo JADE*.

Cualquier observable puede ser calculado mediante un desarrollo perturbativo en potencias de α_s más una parametrización del proceso de hadronización. A partir del valor experimental de la fracción de tres jets, corrigiendo por los efectos de fragmentación y del detector, y conocidos los coeficientes del desarrollo, se puede hallar el valor de α_s.

En la práctica, el cálculo completo de las contribuciones orden a orden es inviable. En el caso de los algoritmos tipo JADE se han calculado exactamente los dos primeros coeficientes del desarrollo [10], mientras que para el algoritmo de DURHAM se ha podido también resumar los términos dominantes y subdominantes del desarrollo de dos observables relacionados con la fracción de tres jets: la fracción de sucesos de dos jets y el número medio de jets [27].

Trabajaremos con algoritmos tipo JADE debido a lo expuesto en la sección anterior. Perturbativamente, el cálculo hasta $O(\alpha_s^2)$ de la sección eficaz de producción de tres jets para una determinada masa invariante de corte reescalada (y_{min}) puede escribirse como:

$$\frac{\sigma_{3-jet}}{\sigma_0} = A(y_{min})\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} + \Big(A(y_{min})2\pi b_0 \ln(\mu^2/S) + B_R(y_{min})\Big)\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\right)^2$$

donde σ_0 es la sección eficaz Born del proceso $e^+e^- \to q\bar{q}$; $A(y_{min})$ es el coeficiente de la contribución en primer orden del proceso $e^+e^- \to q\bar{q}g$ a la sección eficaz de tres jets; $B_R(y_{min})$ es el de la contribución calculada a segundo orden de la teoría de perturbaciones (el subíndice R indica la dependencia de este coeficiente con el esquema de recombinación utilizado: E,$E0$ o P); $b_0 = \frac{33-2N_f}{12\pi}$ con N_f el número de quarks activos (5 por encima del umbral del Υ) y μ la escala de renormalización.

La constante de acoplo $\alpha_s(\mu)$ puede escribirse como:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln(\mu/\Lambda_{\overline{MS}})^2}\left(1 - 6\frac{153-19N_f}{(33-2N_f)^2}\frac{\ln(\ln(\mu/\Lambda_{\overline{MS}})^2)}{\ln(\mu/\Lambda_{\overline{MS}})^2}\right)$$

donde $\Lambda_{\overline{MS}}^{(N_f)}$ es el denominado parámetro de escala de QCD en el esquema de renormalización de substracción mínima modificado ($\overline{MS}$)[28], que depende del número de quarks activos y que debe ser determinado experimentalmente.

Finalmente, dado que el valor medido experimentalmente es la fracción de sucesos de tres jets sobre el total, debemos utilizar la expresión de la sección eficaz total hadrónica a $O(\alpha_s^2)$:

$$\frac{\sigma_{tot}^{(2)}}{\sigma_0} = 1 + \delta_{QCD}^{(2)} = 1 + \alpha_s/\pi + C_2(\alpha_s/\pi)^2$$

donde $C_2 = 1.986 - 0.115N_f$ [29], con lo que la fracción de sucesos de tres jets podrá escribirse:

$$f_3^{(2)} = \frac{\sigma_{3-jet}}{\sigma_{tot}} = \frac{\sigma_{3-jet}}{\sigma_{2-jet} + \sigma_{3-jet} + \sigma_{4-jet}} = \frac{\sigma_{3-jet}}{\sigma_0}\frac{1}{1 + \delta_{QCD}^{(2)}}$$

4.1 Cálculo y corrección de f_3

Hemos descrito el modo de determinar α_s a partir de f_3. Sin embargo, experimentalmente no detectamos quarks y gluones, sino jets, con lo que deberemos estudiar cómo afecta la hadronización y el dispositivo experimental a la multiplicidad en jets de un suceso hadrónico.

En el primer capítulo se insistió en la necesidad de escoger observables sobre los que el proceso de hadronización influyese débilmente con objeto de realizar estudios de QCD perturbativa. Posteriormente, éste era uno de los requisitos que se imponían a una definición operativa de jets. Este efecto, que puede ser cuantificado, junto con las limitaciones experimentales (ineficiencias del detector, imposibilidad de detectar neutrinos...) serán modelados mediante el estudio de los sucesos Monte Carlo que, como se ha mostrado anteriormente, están en buen acuerdo con los datos.

Para la determinación de f_3 se ha aplicado el algoritmo de masas invariantes con distintos esquemas de recombinación e $y_{min} = 0.08$ sobre la muestra simulada suceso a suceso antes de la fragmentación[1] y a partir de los *clusters* calorimétricos a nivel de detector[2], con lo que se han calculado las matrices de convolución, M^R, donde M_{ij}^R es el número de sucesos reconstruidos como $(i+1)$-jet antes de la fragmentación y $(j+1)$-jet en el detector. A partir de estas matrices podemos formar las matrices de probabilidad P^R, definidas como:

$$P_{ij}^R = \frac{M_{ij}^R}{\sum_k M_{kj}^R}$$

---

[1] Sobre los partones asumimos $|\vec{p_q}| = E_q$, reescalando el momento para obtener partículas no masivas. El posible efecto de esta aproximación sobre una muestra de quarks pesados será estudiado en el apéndice 1.

[2] En este último caso, tanto para la muestra simulada como para la de datos reales, se sustituye $S = E_{CM}^2$ por la suma de la energía de los *clusters* y de las trazas en las cámaras de muones.

El elemento P_{ij}^R indica la probabilidad de que un suceso reconstruido como $(j+1)$-jet en el detector sea reconstruido como $(i+1)$-jet antes de la fragmentación. A través de estas matrices *unitarias*[1] podemos corregir los valores obtenidos experimentalmente y calcular f_3^c que ya tiene interpretación directa en QCD perturbativa. Los valores obtenidos para P_{ij}^{E0} son:

$$\begin{pmatrix} .939 \pm .017 & .134 \pm .012 & 0 \\ .061 \pm .003 & .859 \pm .039 & 1.0 \pm 1.0 \\ 0 & .007 \pm .003 & 0 \end{pmatrix}$$

Como puede apreciarse, la suma sobre columnas es la unidad y los elementos P_{i3}^{E0} y P_{3i}^{E0} tienen muy poco peso, lo que nos indica que hay muy pocos sucesos de más de 3 jets para el valor de y_{min} dado. En estas condiciones se puede considerar que los cálculos hasta $O(\alpha_s^2)$ son una buena aproximación. El elemento P_{22} indica la pureza de la muestra de tres jets obtenida en el detector, en este caso es del 86%. Los errores introducidos son estadísticos y se deben a la muestra limitada de Monte Carlo utilizada.

En la siguiente tabla se recogen los resultados sobre la muestra de 16970 sucesos seleccionados.

Esquema	# 2-jet	# 3-jet	# 4-jet	f_3^d	f_3^c
E	12859	4046	65	23.8±.4%	24.0±.8%
$E0$	14519	2439	12	14.4±.3%	17.6±.7%
P	15170	1796	4	10.6±.3%	13.9±.6%

4.2 Obtención de α_s

En esta sección nos centraremos en el cálculo de la constante de acoplo de QCD y en la evaluación de los errores experimentales y teóricos cometidos.

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos a partir de f_3^c para los distintos esquemas de recombinación utilizando las expresiones descritas en este capítulo con los valores $A(y_{min})$ y $B_R(y_{min})$ tabulados en [10].

Esquema	$\alpha_s(M_Z)$	$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}(MeV)$
E	$0.121^{+0.002}_{-0.003}$	260^{+35}_{-33}
$E0$	$0.111^{+0.003}_{-0.003}$	146^{+30}_{-27}
P	$0.104^{+0.004}_{-0.003}$	94^{+26}_{-23}

---

[1] Nos referimos a la unitariedad bajo la norma adaptada a $\mathbb{R}^+$: $||v|| = \sum v_i$. Con lo que, $\sum_j A_{ij} = 1$; $A_{ij} \geq 0$ es condición necesaria y suficiente de unitariedad. P^R lo cumple por definición.

Los errores expresados en la tabla anterior son estadísticos y se han calculado a partir de los valores extremos de f_3^c dentro del intervalo de error correspondiente.

La escala de renormalización, μ, se ha fijado en un valor $\mu^2 = y_{min} S$. Una vez obtenida $\alpha_s(\mu)$ se puede extrapolar a $q = M_Z$ mediante las ecuaciones del grupo de renormalización, o bien calcular $\Lambda_{\overline{MS}}$, que parametriza α_s a cualquier energía.

Se dará como valor central y como error estadístico los obtenidos para el esquema de recombinación $E0$. En la figura 10 se muestra la comparación de este resultado frente a medidas similares sobre sucesos hadrónicos en colisionadores e^+e^- a energías entre 14 y 60 GeV [30] y a 91 GeV [31, 32].

fig. 10.- Dependencia con la energía de la fracción de sucesos de tres jets en la aniquilación e^+e^-. Las curvas corresponden a la predicción de QCD para $\alpha_s(M_Z) = 0.111 \pm 0.003$. Las barras de error son de origen estadístico. El resultado obtenido en este análisis se denota por L3#.

4.2.1 Cálculo de errores sistemáticos

Hemos calculado a partir de la muestra obtenida las posibles contribuciones sistemáticas al error en la medida de α_s:

- *dependencia en el esquema de recombinación*: proviene de los distintos valores obtenidos para α_s utilizando los tres sistemas de recombinación. Se ha evaluado como la mitad de la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de α_s, obteniéndose:

  $$\alpha_s(M_Z) = 0.111 \pm 0.008(esq.) \qquad \Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 150^{+90}_{-60}\ MeV(esq.)$$

- *dependencia en la escala de renormalización*: La dependencia en este parámetro aparece al truncar el desarrollo perturbativo de $f_3(\alpha_s)$ tomando sólo los términos hasta $O(\alpha_s^2)$. El valor $\mu^2 = y_{min}S$ es arbitrario y potencialmente tan correcto como cualquier otro físicamente aceptable. Con objeto de evaluar el posible error sistemático, se ha variado μ entre un valor mínimo, correspondiente aproximadamente al umbral de producción de la Υ, y un valor máximo, correspondiente a la energía total en el centro de masas, a partir de la fracción de tres jets corregida obtenida mediante el esquema de recombinación $E0$:

  $$\mu^2 = 0.12S: \quad \alpha_s(M_Z) = 0.106 \quad \Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 110\ MeV$$
  $$\mu^2 = S: \quad \alpha_s(M_Z) = 0.120 \quad \Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 250\ MeV$$

  Con lo que se obtiene

  $$\alpha_s(M_Z) = 0.111^{+0.009}_{-0.005}(esc.) \qquad \Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 150^{+100}_{-40}\ MeV(esc.)$$

- *dependencia en el modelo de hadronización*: El Monte Carlo utilizado para calcular las matrices de convolución utiliza el modelo de fragmentación de Lund, que es un ejemplo de fragmentación por cuerdas. Mediante un estudio de las predicciones obtenidas utilizando otros modelos se ha estimado el posible error sistemático en $\Delta\alpha_s(M_Z) = \pm 0.003$ [31].

Los dos errores sistemáticos calculados en primer lugar son debidos al desconocimiento de la serie perturbativa completa, mientras que el debido a los efectos de hadronización tiene su origen en QCD no perturbativa. Los consideraremos como errores independientes y los sumaremos en cuadratura bajo la denominación de errores teóricos.

El valor obtenido, separando las contribuciones experimentales y teóricas es:

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha_s(M_Z) = 0.111\ \pm 0.003(exp.)\,^{+0.012}_{-0.010}(teó.) \\[1em] \Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 150\ \pm 30(exp.)\,^{+130}_{-80}(teó.)\ MeV \end{array}}$$

5 Estudio del string effect

El denominado *string effect* es la asimetría de población observada en el flujo de partículas y energía en los sucesos de tres jets. La población de las zonas situadas entre los jets asociados a los quarks y el asociado al gluon es sensiblemente mayor que la de la zona localizada entre los jets asociados a los quarks. Este efecto tiene interpretación directa dentro del marco de la fragmentación por cuerdas ya que, al ser éstas singletes de color, se forman sólo entre los quarks y el gluon en los sucesos $q\bar{q}g$ [1]. Es la fragmentación de estas cuerdas lo que produce los hadrones detectados experimentalmente, con lo que la asimetría de población aparece de un modo natural.

Para realizar un estudio cualitativo y cuantitativo del *string effect* hay que poner especial énfasis en tener bajo control los siguientes parámetros:

1. Pureza de la muestra de sucesos de 3 jets:
   Dado que el efecto se supone característico de los sucesos de tres jets, es deseable que un suceso identificado experimentalmente como de tres jets se haya desarrollado a partir de dos quarks y de un gluon diferenciado espacialmente de éstos y de energía elevada.

2. Eficiencia en la determinación del jet asociado al gluon:
   En una muestra de sucesos de 3 jets, es necesaria una buena identificación del jet asociado al gluon para etiquetar las zonas situadas entre los jets con objeto de evaluar el *string effect.*

Una identificación poco eficiente del jet asociado al gluon o una gran contaminación de sucesos con otra multiplicidad en jets contribuye a una disminución del efecto observado, con lo que, aun cuando para evaluar la eficiencia del procedimiento de identificación de los jets mediante muones y la pureza de la muestra de tres jets se han utilizado los sucesos Monte Carlo, el efecto observado puede considerarse independiente de la simulación y, concretamente, del modelo de fragmentación incluido.

Se aplicará básicamente el mismo algoritmo cuyo comportamiento se ha comprobado mediante la medida de α_s sobre la muestra de 16970 sucesos hadrónicos seleccionados. Con la finalidad de aumentar la estadística en sucesos 3-jet se ha rebajado y_{min}. Se presentarán los resultados obtenidos mediante el esquema P con $y_{min} = 0.015$, habiéndose realizado el mismo análisis con el esquema $E0$ e $y_{min} = 0.02$ con objeto de estudiar la dependencia del resultado con el esquema de recombinación.

---

[1] La interpretación para sucesos qqg es análoga a la dada en la definición de SF en la sección 1.2.1 si consideramos que existe una única cuerda con extremos en el quark y el antiquark y un vértice (*kink*) en el gluon.

5.1 Estudio de la selección sobre la muestra de 3 jets

La finalidad de esta selección es obtener muestras de sucesos de tres jets con el jet asociado al gluon identificado eficientemente, con elevada correlación angular entre las direcciones de los partones (jets) antes de fragmentar y los jets obtenidos experimentalmente y con elevada pureza. Se espera que el efecto estudiado será máximo cuando se optimicen estas tres condiciones.

Los algoritmos de clusterización tienen en principio menor resolución angular que un algoritmo tipo Sterman-Weinberg ya que la dirección de los jets viene afectada por contribuciones de partículas (*clusters*) muy alejadas de la dirección sobre la que la energía está colimada[1]. Para resolverlo, se ha introducido un procedimiento, aplicado después del algoritmo de masas invariantes, que consiste en recalcular la energía y dirección de los jets imponiendo que los *clusters* calorimétricos se encuentren en el interior de un cono de semiabertura $\delta = 30^\circ$, iterándose hasta que converge.

En la tabla se observan las fracciones de sucesos de 3 jets sobre los datos y Monte Carlo y la estimación las purezas obtenidas utilizando los esquemas $E0$ y P:

Esquema	y_{cut}	f_3^d(dat)	f_3^d(MC)	$\#3 - jet, gd/\#3 - jet, d$
$E0$	0.02	$42.4 \pm 0.6\%$	$41.1 \pm 0.8\%$	$77 \pm 2\%$
P	0.015	$41.8 \pm 0.6\%$	$41.1 \pm 0.8\%$	$77 \pm 2\%$

5.1.1 Condiciones de identificación de los jets

En [21] se indica la posibilidad de usar las desintegraciones semileptónicas de los quarks pesados para identificarlos. Hasta ahora hemos usado los muones para enriquecer la muestra en b y c; sin embargo, podemos utilizar este indicador no sólo global sino localmente, es decir, como etiquetador de un jet asociado a $q(\bar{q})$ [2].

En un suceso de tres jets sólo necesitamos identificar uno de ellos como el asociado al gluon. El procedimiento mediante muones nos permite etiquetar con gran probabilidad los jets asociados a quarks, luego sólo necesitamos sucesos de tres jets en los que haya dos muones en jets distintos. Este es básicamente el proceso de identificación.

La probabilidad de que un quark pesado se desintegre débilmente dando lugar a muones es relativamente baja ($\approx 10\%$) y la aceptancia de sucesos de este tipo con dos muones es menor que la de los sucesos con un único muon por las causas comentadas en la sección 3.2.2. La necesidad de contar

---

[1] De hecho, al aplicar un algoritmo de clusterización a nivel de detector, todos los *clusters* calorimétricos resultan finalmente asociados a un jet, lo que contradice a la noción de jet como colimación de energía en una cierta dirección.

[2] En el análisis no distinguiremos entre quark y antiquark.

con una muestra suficientemente amplia de sucesos con jets identificados nos lleva a proponer un método de identificación para sucesos con un sólo muon (o con todos los muones asociados a un mismo jet): dada la naturaleza *bremsstrahlung* de la emisión de gluones, podemos considerar que el jet más energético estará siempre asociado a un quark. Seleccionando los sucesos en los que el jet con muon (o muones) no sea el más energético y asumiendo que está asociado al quark, se habrá identificado con gran probabilidad el jet asociado al gluon.

Los dos tipos de identificación que se utilizarán son pues:

- identificación (*tag*) doble: sobre los sucesos en los que se ha seleccionado más de un muon (tres a lo sumo) que posteriormente han sido asignados a dos jets. En este caso supondremos que ambos nos identifican los jets asociados a q y $\bar{q}$, con lo que el restante es el asociado al gluon.
- identificación (*tag*) simple: sobre los sucesos en los que un solo jet tiene muon o muones asociados, seleccionamos aquellos en los que no sea el jet más energético (que se supondrá asociado a $q(\bar{q})$) y asumiremos que el restante es el asociado al gluon.

Con este tipo de identificación no se presupone que el jet asociado al gluon es el menos energético, aunque en la mayor parte de los sucesos será éste el caso. De este modo se evita el sesgo sistemático que esta suposición introduce en los estudios de las zonas situadas entre los jets[1].

El esquema de recombinación P preserva los trimomentos (en consecuencia los ángulos) y da lugar a jets no masivos (reescalando las energías en cada recombinación). Basándonos en estas características recalculamos la energía de los jets a partir de las direcciones de los jets obtenidos:

$$x_i = \frac{2E_i^c}{E_{CM}} = \frac{2\sin\psi_i}{\sum_{j=1}^{3}\sin\psi_j}$$

donde $\sin\psi_i = \sin(\widehat{j,k})$; $i \neq j \neq k = 1,2,3$.

La ventaja de este procedimiento es que obtenemos una cinemática correcta para tres partículas no masivas.

Con el esquema P obtenemos 7096 sucesos de tres jets. De ellos, 246 tienen dos jets con muones asociados (condición de identificación doble) y 3227 tienen un sólo jet con muones asociados y no es el más energético (condición de identificación simple).

Podemos evaluar la eficiencia de esta identificación mediante el estudio de los sucesos simulados que constituyen el elemento M_{22}^P de la matriz de

---

[1] En el apéndice B se exponen los resultados obtenidos asumiendo que el jet menos energético es el asociado al gluon.

convolución: el etiquetado simple es correcto en un $87 \pm 4\%$ de los casos y el doble en un $91 \pm 14\%$.

Dado que las eficiencias de ambos procesos de identificación son estadísticamente compatibles y que la muestra de sucesos en condiciones de *tag* doble es muy reducida, se realizará el estudio sobre los 3473 sucesos que cumplen alguna de las dos condiciones de etiquetado, sobre los que la eficiencia estimada es del $87 \pm 4\%$.

La pureza de la muestra de 3473 sucesos en condiciones de *tag* es del $77 \pm 3\%$, idéntica a la obtenida sobre la muestra total de sucesos de tres jets.

5.1.2 Optimización de la muestra

Con objeto de que la sensibilidad del análisis al *string effect* sea más elevada, es necesario que las direcciones de los jets se correspondan con las de los partones iniciales ($q\bar{q}g$). Esto es lo que hemos definido anteriormente como elevada correlación angular.

Por otro lado, la pureza de la muestra, definida como la fracción de sucesos reconstruidos como 3-jet a nivel de detector que también lo son a nivel de partones, debe ser elevada para que el efecto sea significativo.

Es de esperar que los sucesos con multiplicidad en jets distinta de 3 a nivel de partones y que son reconstruidos como 3-jet a nivel de detector estén caracterizados por:

1. Poseer un jet muy poco energético. Se aprecia claramente en sucesos de dos jets que son reconstruidos como tres jets debido principalmente a ruido del detector e ineficiencias del algoritmo de clusterización.

2. No ser planos. El caso más claro son los sucesos de cuatro jets que son reconstruidos como tres jets a nivel de detector: el jet menos energético estará en general fuera del plano del suceso.

La planitud del suceso es además un requerimiento cinemático para los sucesos de tres jets.

Mediante un estudio Monte Carlo se han optimizado los cortes que a continuación se detallan:

- $E_3^c/E_{tot} > 0.04$
- $\sum \psi_i > 358^\circ$

donde E_3^c es la energía del jet menos energético y E_{tot} es la suma de la energía depositada en los calorímetros y la de la traza o trazas en las cámaras de muones. La energía de corte correspondiente es $E_3^c \approx 3.6\ GeV$. Los ángulos ψ_i son los definidos en la sección anterior. La suma de los tres ángulos formados fig. 11.- Cortes sobre la muestra de 3-jets. En la muestra Monte Carlo se distinguen las distribuciones de los sucesos diagonales (3-jet a nivel de generador y 3-jet a nivel de detector) de los no diagonales:

fig. 11.A: Energía recalculada angularmente del jet menos energético.

fig. 11.B: Planitud de los sucesos.

por los jets entre sí está claramente relacionada con la planitud del suceso. Las distribuciones respectivas pueden verse en la figura 11.

Mediante estos cortes esperamos mejorar tanto la pureza de la muestra como la correlación angular entre los jets antes de la fragmentación y a nivel de detector.

Con objeto de cuantificar la correlación angular $\mathcal{C}$, hemos definido una medida de esta variable:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \cos\theta_i$$

Donde θ_i es el ángulo formado entre el jet i (ordenado energéticamente) a nivel de detector y su asociado por proximidad angular a nivel de partones.

Antes de aplicar estos cortes, la correlación angular media, estimada mediante la simulación Monte Carlo, para la muestra de 3473 sucesos en condiciones de *tag* es $0.97^{+0.03}_{-0.07}$ o, equivalentemente $14^\circ{}^{+12^\circ}_{-14^\circ}$, mientras que para los 2600 sucesos que pasan además estos cortes es $0.98^{+0.02}_{-0.05}$, correspondiente a $11^\circ \pm 11^\circ$.

La pureza de la muestra obtenida es del $85 \pm 4\%$ y la eficiencia de la identificación del gluon es del $88 \pm 4\%$.

La composición en quarks primarios estimada para la muestra de 2600 sucesos es: $56 \pm 3\%$ $b\bar{b}$, $24 \pm 2\%$ $c\bar{c}$, $9 \pm 1\%$ $s\bar{s}$, $4 \pm 1\%$ $u\bar{u}$ y $7 \pm 1\%$ $d\bar{d}$, con lo que el contenido en quarks pesados es del $80 \pm 4\%$, consistente con la obtenida antes de la selección de sucesos de tres jets que están en condiciones de *tag* y pasan los cortes en planitud y energía de tercer jet.

5.2 El String effect sobre la muestra seleccionada

Dentro de la muestra seleccionada podemos distinguir configuraciones en función de los ángulos que forman las direcciones de los jets. Una división genérica es:

- **configuraciones simétricas**: son aquellas en las que el jet más energético forma un ángulo aproximadamente igual con los otros dos. Equivalentemente, la energía del jet asociado al gluon es aproximadamente igual que la del jet menos energético de los dos restantes[1].

- **configuraciones asimétricas**: engloban los sucesos en los que los ángulos antes descritos son claramente distintos.

En la figura 12 se muestran los dos tipos de configuraciones.

Dado lo limitado de la muestra obtenida (2600 sucesos), definiremos las configuraciones mediante una división del plano del suceso en sectores de 10°

---

[1] En este estudio no utilizaremos los 5 sucesos en los que el jet etiquetado como gluon es el más energético.

de semiabertura. Denominaremos, siguiendo la nomenclatura de la figura 12, ψ_q al ángulo entre el jet más energético y el asociado al gluon, y ψ_g al que forman los dos jets asociados a quark y antiquark.

En la siguiente tabla se da una relación de las configuraciones simétricas cinemáticamente permitidas:

$\psi_{q,g} = 170 \pm 10^\circ$	$\psi_{q,g} = 150 \pm 10^\circ$	$\psi_{q,g} = 130 \pm 10^\circ$

Sobre los asimétricos podemos definir las siguientes parejas de configuraciones permitidas:

$\psi_{g,q} = 170 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 150 \pm 10^\circ$	$\psi_{g,q} = 150 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 130 \pm 10^\circ$	$\psi_{g,q} = 130 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 110 \pm 10^\circ$
$\psi_{g,q} = 170 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 130 \pm 10^\circ$	$\psi_{g,q} = 150 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 110 \pm 10^\circ$	
$\psi_{g,q} = 170 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 110 \pm 10^\circ$		
$\psi_{g,q} = 170 \pm 10^\circ$ $\psi_{q,g} = 90 \pm 10^\circ$		

Como puede apreciarse, cada configuración asimétrica está constituida por dos muestras en las que los ángulos del jet asociado al gluon y del jet menos energético de los restantes están intercambiados [fig. 12]. Las muestras con mayor estadística son aquéllas en las que el jet asociado al gluon es el menos energético (las configuraciones en las que no lo sea las denominaremos *traspuestas*).

fig. 12.- Configuraciones de sucesos 3-jet:
simétrica, asimétrica y su traspuesta correspondiente.

El número de *clusters* calorimétricos reconstruidos en un suceso es una medida de la multiplicidad del mismo. Proyectándolos sobre el plano del suceso obtendremos el flujo angular de partículas para cada suceso. Utilizando la energía asociada a cada uno de los *clusters* podemos determinar también el flujo angular de energía. Promediando estos flujos sobre todos los sucesos correspondientes a una configuración dada y normalizando convenientemente obtendremos la distribución de partículas y energía asociada. Para la observación del *string effect* sobre estas distribuciones se siguen dos procedimientos distintos:

1. Sobre las configuraciones simétricas compararemos las distribuciones obtenidas sobre el plano del suceso en el sentido $q \rightarrow q' \rightarrow g \rightarrow q$ frente a las obtenidas en el sentido $q \rightarrow g \rightarrow q' \rightarrow q$, donde q es el jet más energético [fig. 13], debiéndose observar una sobrepoblación significativa de las segundas respecto a las primeras en la primera zona inter-jet y de las primeras respecto a las segundas en la tercera zona inter-jet.

2. Sobre las configuraciones asimétricas compararemos dichas distribuciones para cada configuración en el sentido $q \rightarrow q' \rightarrow g \rightarrow q$ frente a su traspuesta correspondiente en el sentido $q \rightarrow g \rightarrow q' \rightarrow q$ [fig. 13], con lo que se debe observar el mismo efecto que en el caso anterior.

fig. 13.- Construcción de distribuciones sensibles al *string effect.*

En el primero de los casos podemos utilizar una sola muestra para observar el efecto debido a la definición de configuración simétrica, siendo necesario utilizar dos muestras para observarlo en el caso de las configuraciones asimétricas. De este modo evitamos el sesgo que introduce la radiación de gluones.

fig. 14.- Distribuciones angulares de flujo sobre el plano del suceso. Se señalan las zonas inter-jet en las que la diferencia de flujos es debida al *string effect*:

figs. 14.A y 14.B: Configuración simétrica:
Flujo de partículas normalizado a $<N_{clus}>$ y flujo de energía normalizado a 1 respectivamente.

figs. 14.C y 14.D: Configuración asimétrica: *Idem.*

En la figura 14 pueden observarse las distribuciones de los flujos de partículas y energía sobre el plano del suceso para la configuración simétrica definida por $\psi_{q,g} = 150 \pm 10^\circ$ y la asimétrica caracterizada por $\psi_{g,q} = 170 \pm 10^\circ$ y $\psi_{q,g} = 150 \pm 10^\circ$. Se han señalado las zonas inter-jet (primera y trecera) en las que la diferencia de flujos es atribuible al *string effect*. El efecto es claro en todas las distribuciones.

5.3 Cuantificación del string effect

En la figura 14 se aprecia una diferencia de flujos en la zona predicha para el efecto. Sin embargo, debemos evaluar esta diferencia y decidir si es estadísticamente significativa. Para ello se ha acudido a distintos métodos estadísticos:

- **método directo:** consiste en evaluar el área encerrada por cada una de las distribuciones en la zona de estudio (zona inter-jet) fija y calcular el cociente $R_{qg,qq}$ entre el área encerrada por la distribución que identifica esa zona como $q - g$ y la encerrada por la que la asocia a $q - q$. Si el efecto es apreciable, $R_{qg,qq} > 1$. El alejamiento de la unidad constituye una medida del efecto y el número de desviaciones standard que esto suponga, una medida de su significación estadística. Un análisis similar puede encontrarse en [33].

- **test χ^2:** construimos el estadístico χ^2 que estimará la consistencia entre los dos histogramas de flujo del siguiente modo:

  $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_c} \frac{(n_{ij} - \hat{p}_{i\cdot} n_{\cdot j})^2}{\hat{p}_{i\cdot} n_{\cdot j}}$$

  Donde j es el índice del histograma, n_c es el número de canales (distinto en principio para cada cofiguración pero común para una configuración y su traspuesta), n_{ij} es el número de entradas en el canal i del histograma j, $\hat{p}_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}/n$ con $n = \sum_i \sum_j n_{ij}$ y $n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$. El estadístico así definido tiene una distribución aproximadamente χ^2 con $n_c - 1$ grados de libertad.

- **test de Kolmogorov-Smirnov:** es un método general que permite estudiar la compatibilidad entre dos distribuciones experimentales de una variable continua. Se construyen las funciones de distribución de probabilidad para las dos muestras, $S_m(x)$ y $S_n(x)$, donde m y n es el número de entradas en cada una de las dos muestras. El estimador que se utiliza es la máxima desviación entre estas dos funciones escalón en todo el dominio de la variable x. En nuestro caso m y n son la suma de los *clusters* calorimétricos de todos los sucesos de una determinada configuración y su traspuesta, respectivamente[1], y la variable continua es el ángulo ψ. Definimos

$$D_{mn} = \max_{\psi \in (0,2\pi)} |S_m(\psi) - S_n(\psi)|$$

- **test de Smirnov-Cramér-Von Mises:** el estadístico que evalúa la compatibilidad entre dos distribuciones experimentales viene definido por:

$$W^2 = \int_0^{2\pi} (S_m(\psi) - S_n(\psi))^2 \, d\left[\frac{nS_n(\psi) + mS_m(\psi)}{n+m}\right]$$

  Donde las definiciones de $n, m, S_n(\psi)$ y $S_m(\psi)$ son las utilizadas en el test de Kolmogorov-Smirnov. En este caso la incompatibilidad se evalúa a partir de la integral de la zona comprendida entre las dos distribuciones de probabilidad.

El método directo y el test de χ^2 evalúan la compatibilidad entre dos distribuciones de un modo local, esto es, en un determinado intervalo en el caso del primer test y en un determinado número de canales en el segundo. Por el contrario, los test de Kolmogorov-Smirnov y de Smirnov-Cramér-Von Mises, son globales, es decir, evalúan la compatibiliad de las dos distribuciones sobre todo el dominio angular. Los dos primeros nos permiten aislar la información de las zonas inter-jet sobre las que se espera el efecto. Los dos últimos recogen también información de las zonas internas de los jets.

La cuantificación del *string effect* se ha realizado sobre todas las configuraciones cinemáticamente permitidas, exponiéndose a continuación los resultados obtenidos sobre dos configuraciones con alta estadística. El efecto es claro sobre las dos y, debido a los tamaños de las muestras, hay significación estadística clara.

Las dos muestras escogidas son: la simétrica con $\psi_{q,g} = 150 \pm 10^\circ$, constituida por 180 sucesos, y la asimétrica con $\psi_g = 170 \pm 10^\circ$ y $\psi_q = 150 \pm 10^\circ$, formada por 540 sucesos, y su traspuesta correspondiente, que incluye 79 sucesos.

El criterio seguido para elegirlas es que la primera es la que más sucesos contiene dentro de las simétricas, mientras que la segunda con su traspuesta constituyen la configuración asimétrica sobre la que los cálculos dan menor error conjunto.

Se ha realizado paralelamente el mismo estudio sobre la muestra de sucesos Monte Carlo que pasan todos los cortes y que se disponen en estas dos configuraciones. Los resultados son independientes de la simulación Monte

---

[1] En el caso de configuraciones simétricas este número coincide ya que la distribución asociada a una configuración y la asociada a la traspuesta están obtenidas a partir de la misma muestra.

Carlo, ya que se deducen de la comparación de datos frente a datos. La comparación datos-simulación permite una comprobación del modelo de fragmentación con el que han sido generados.

5.3.1 Método directo

En el caso de la configuración simétrica se ha integrado sobre la primera zona inter-jet. Para la asimétrica se han sumado las contribuciones de las zonas inter-jet 1 y 3. Para definir la zona inter-jet y evitar introducir información debida a la estructura interna de los jets, se ha tomado una semianchura fija de 35° para éstos. En la figura 14 pueden observarse los dominios de integración para ambas configuraciones.

Los valores del cociente $R_{qg,qq}$, el error estadístico asociado y el número de desviaciones standard que difiere de la unidad (efecto nulo) se incluyen en la siguiente tabla:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	$R_{qg,qq}$	1.96 ± 0.13	1.96 ± 0.22	1.99 ± 0.21	2.55 ± 0.42
	$\#\sigma$	7.1	4.5	4.8	3.7
configuración asimétrica	$R_{qg,qq}$	1.71 ± 0.09	1.66 ± 0.15	1.95 ± 0.17	2.04 ± 0.28
	$\#\sigma$	7.9	4.4	5.6	3.7

De los valores tabulados podemos concluir:

1. El efecto es claro tanto en datos como en Monte Carlo para ambas distribuciones y configuraciones (los valores de $R_{qg,qq}$ superan significativamente la unidad).

2. Existe gran acuerdo entre datos y Monte Carlo (los valores de $R_{qg,qq}$ son compatibles entre sí).

La menor significación de los resultados sobre la muestra Monte Carlo se debe a que contamos con menos estadística de sucesos simulados que datos reales.

Podemos observar que el error estadístico relativo es similar para la configuración asimétrica que para la simétrica, a pesar de que sólo 79 sucesos componen la configuración traspuesta. Esto es debido a que en la primera se integra sobre dos recintos independientes, mientras en la segunda sólo uno de ellos puede ser utilizado como recinto de integración, además de que la muestra asimétrica total posee mucha más estadística que la simétrica.

5.3.2 Test χ^2

La anchura de los canales de las distribuciones de flujo es variable con objeto de que en cada uno de ellos haya un número suficiente de entradas que nos permita la aplicabilidad del test ($n^{ij} \geq 5$).

Se han realizado dos análisis de compatibilidad mediante este test:

1. Compatibilidad completa de las distribuciones: se toman las entradas en todos los canales de las distribuciones de flujo. Se obtiene:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	χ^2	192.69	131.42	348.65	207.70
	χ^2/d.o.f.	8.8	6.0	15.8	9.4
configuración asimétrica	χ^2	312.00	182.45	1126.35	583.59
	χ^2/d.o.f.	7.3	4.2	26.2	13.6

2. Compatibilidad restringida de las distribuciones: el estudio sobre todo el dominio angular puede introducir informacion espúrea relacionada con la estructura interna de los jets. Nos centraremos en las zonas inter-jet definidas en 5.3.1., obteniéndose:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	χ^2	105.32	48.31	49.47	41.37
	χ^2/d.o.f.	15.0	6.9	7.1	5.9
configuración asimétrica	χ^2	142.94	70.08	95.09	57.81
	χ^2/d.o.f.	8.4	4.1	5.6	3.4

El χ^2 ha sido calculado utilizando solamente los canales del intervalo angular $(0^\circ, 180^\circ)$ en el caso de las configuraciones simétricas ya que son los únicos independientes.

Podemos observar el mismo efecto estudiado mediante el método directo. La menor significación estadística de la muestra simulada queda de nuevo patente en los valores tabulados. Sin embargo, el comportamiento cualitativo de datos y Monte Carlo es análogo.

5.3.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

Se han utilizado 8488 *clusters* para calcular las funciones de distribución de probabilidad en el caso simétrico, y 22235 y 3511 para la configuración asimétrica y su traspuesta respectivamente.

fig. 15.- Distribuciones de probabilidad angulares sobre el plano del suceso. Se señala la máxima diferencia entre ellas:

figs. 15.A y 15.B: Configuración simétrica:
Flujo de partículas y flujo de energía respectivamente.
figs. 15.C y 15.D: Configuración asimétrica: *Idem.*

La distribución de probabilidad del estimador de Kolmogorov-Smirnov puede ser parametrizada mediante una variable independiente del número de entradas de las distribuciones experimentales:

$$z = \frac{D_{mn}}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

Los resultados obtenidos para D_{mn} y el valor correspondiente de la variable reescalada z se incluyen en la siguiente tabla:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	D_{mn}	0.092	0.120	0.046	0.053
	z	5.99	5.35	2.97	2.34
configuración asimétrica	D_{mn}	0.083	0.103	0.098	0.075
	z	4.57	3.75	5.38	2.73

La probabilidad de compatibilidad entre dos distribuciones se calcula mediante la expresión [34]:

$$P(\hat{z} \geq z) = 2 \sum_{r=1} (-1)^{r-1} e^{-2r^2z^2}$$

Se obtienen en todos los casos probabilidades despreciables ($P_i \leq 3.5 \cdot 10^{-5}$).

En la figura 15 pueden verse las distintas funciones de distribución de probabilidad obtenidas y el ángulo para el que ambas difieren en un valor máximo (D_{mn}).

5.3.4 Test de Smirnov-Cramér-Von Mises

Aplicaremos este método sobre las funciones de distribución de probabilidad calculadas en el apartado anterior [fig. 15].

De un modo análogo al caso del estimador de Kolmogorov-Smirnov, la distribución de probabilidad de este estimador puede parametrizarse asintóticamente mediante una variable independiente del número de entradas de las distribuciones experimentales [35]:

$$x = \frac{mn}{m+n} W^2$$

Los resultados obtenidos para W^2 y los valores correspondientes de la variable reescalada x se incluyen en la siguiente tabla:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	W^2 ($\times 10^{-3}$)	3.86	6.01	0.32	0.70
	x	16.38	11.95	1.36	1.39
configuración asimétrica	W^2 ($\times 10^{-3}$)	2.23	3.63	1.91	1.32
	x	6.77	4.81	5.79	1.75

Hemos calculado la probabilidad de compatibilidad mediante una simulación Monte Carlo de la densidad de probabilidad del estadístico de Smirnov-Cramér-Von Mises obteniéndose en todos los casos probabilidades despreciables ($P_i \leq 3.0 \cdot 10^{-4}$).

Los tratamientos aquí expuestos son un análisis cuantitativo del *string effect* sobre las configuraciones definidas. El estudio de dos de ellas que presentan buenas características estadísticas nos ha permitido mostrar la significación del efecto. Una extensión a todas las configuraciones ratifica este resultado.

6 Conclusiones

Sobre una muestra de $13.1 pb^{-1}$ recogida en el detector L3 durante 1991, se ha realizado una selección de sucesos hadrónicos con muon inclusivo enriquecida en quarks pesados, determinándose una submuestra de sucesos de tres jets. Mediante esta selección se ha concluido:

- **Determinación de α_s** mediante la fracción de sucesos de tres jets, obteniéndose:

$$\alpha_s(M_Z) = 0.111 \ \pm 0.003(exp.)^{+0.012}_{-0.010}(teó.)$$

$$\Lambda^{(5)}_{\overline{MS}} = 150 \ \pm 30(exp.)^{+130}_{-80}(teó.) \ MeV$$

- **Análisis del string effect** tras la identificación mediante muones de los jets asociados a quarks. Se han aplicado diversos tests para cuantificar la significación estadística del efecto, confirmando todos ellos la existencia de un efecto dinámico claro, independiente de la simulación y con el que el modelo de Lund (fragmentación por cuerdas) está en buen acuerdo cualitativo y cuantitativo.

Apéndice A. Quarks masivos y fracción de tres jets

Los términos de la expansión de $f_3(\alpha_s)$ están calculados sin tener en cuenta correcciones de masa, tanto en las restricciones sobre el espacio de fases como en el propio elemento de matriz. Aun cuando estos efectos son pequeños, se maximizarán sobre quarks pesados y en particular, en la muestra analizada, compuesta en más del 50% por sucesos $b\bar{b}$.

El estudio de la posible influencia de los efectos de masa sobre la fracción de sucesos identificados como 3-jet se ha realizado siguiendo dos estrategias:

1. Comparación sobre una muestra $b\bar{b}$ y una $d\bar{d}$ generadas con elemento de matriz $O(\alpha_s^2)$ de la fracción de tres jets obtenida mediante la aplicación del algoritmo tipo JADE antes de la fragmentación con los tres esquemas de recombinación. Se observa:
    - compatibilidad dentro de la muestra utilizada (1000 sucesos) entre las fracciones obtenidas imponiendo en ambos casos $m_q = 0$, esto es, $|\vec{p}_q| = E_q$, aun cuando el espacio de fases está generado con $m_b = 5\ GeV$.
    - aumento significativo en f_3 en la muestra de $b\bar{b}$ (aproximadamente un 6% sobre los valores anteriores en todos los esquemas) cuando consideramos $E_q^2 = \vec{p}_q^{\,2} + m_q^2$. La razón es que $M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2 = p_i^2 + p_j^2 + 2p_ip_j$ y $p_{i,j}^2 = m_q^2$ con lo que aumenta el número de jets resueltos y la fracción de tres jets.

2. Reproducción del análisis introduciendo en el Monte Carlo, antes de la fragmentación, $(E_q, \vec{p}_q)$ con $E_q^2 = \vec{p}_q^{\,2} + m_q^2$. De este modo, la única variación sobre el análisis anterior estará en las matrices de probabilidad, P^R. La obtenida con el esquema $E0$ resulta ser:

$$\begin{pmatrix} .934 \pm .017 & .138 \pm .012 & 0 \\ .066 \pm .003 & .855 \pm .039 & 1.0 \pm 1.0 \\ 0 & .007 \pm .003 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de las matrices P^R podemos corregir las fracciones obtenidas a nivel de detector, obteniéndose los valores $f_3^{c,*}$ y $\alpha_s^*(M_Z)$ recogidos en la siguiente tabla:

Esquema	$f_3^{c,*}$	$(f_3^{c,*} - f_3^c)/f_3^c$	$\alpha_s(M_Z)$	$\alpha_s^*(M_Z)$
E	$25.3 \pm .8\%$	$5.4 \pm 4.8\%$	$0.121^{+0.002}_{-0.003}$	$0.124^{+0.003}_{-0.002}$
$E0$	$18.0 \pm .7\%$	$2.3 \pm 5.7\%$	$0.111^{+0.003}_{-0.003}$	$0.112^{+0.003}_{-0.003}$
P	$14.1 \pm .7\%$	$1.4 \pm 6.7\%$	$0.104^{+0.004}_{-0.003}$	$0.105^{+0.005}_{-0.004}$

Como puede apreciarse en la tabla, los valores son ligeramente superiores a los obtenidos en el análisis anteriormente expuesto en el que se imponía masa nula para los quarks, aun cuando la significación estadística de esta diferencia sea dudosa. Para los esquemas $E0$ y P las variaciones son inferiores en todo caso a las obtenidas en el análisis de las muestras $b\bar{b}$ y $d\bar{d}$ generadas independientemente, debido a que la muestra de sucesos Monte Carlo simulada a través del detector está generada con *parton shower* con lo que, dado que estos esquemas operan de modo no masivo, la influencia es menor que con el uso del esquema E, que acumula la masa invariante recombinación a recombinación[1]

Los resultados expuestos en este apéndice nos permiten considerar una buena aproximación el análisis realizado sobre la muestra enriquecida en quarks pesados. Forzando antes de la fragmentación que los quarks sean no masivos (reesacalando su trimomento) obtenemos resultados análogos a los obtenidos sobre una muestra de quarks ligeros, para los que las expresiones teóricas, en las que no se han introducido efectos de masa, son una muy buena aproximación. Por otro lado, la introducción de la masa de los quarks en el cálculo de las matrices de convolución y probabilidad sobre la muestra de sucesos simulados nos ofrece variaciones escasamente significativas, indicando una atenuación de los efectos de masa de los quarks en el caso de generación mediante *parton shower* y simulación a través del detector.

---

[1] De hecho, para este esquema se puede observar en la tabla que las desviaciones entre los valores centrales son las únicas relativamente significativas (más de una desviación standard).

Apéndice B. Identificación tradicional del jet gluónico

La identificación del jet asociado al gluon expuesta en el capítulo 5 es muy restrictiva, aunque la eficiencia del etiquetado es muy alta.

De los 2600 sucesos seleccionados, sólo en 383 es el segundo jet más energético el asociado al gluon (14.7 ± .8%), luego, aparentemente, una identificación tradicional etiquetando como gluónico el menos energético resulta ser también muy eficiente. Este es el procedimiento empleado en análisis anteriores a la entrada en funcionamiento de LEP [16, 17, 18, 19]. Tiene la ventaja de su elevada estadística ($\approx 50\%$ de la muestra de hadrónicos) pero el inconveniente es que introduce un sesgo cinemático en las zonas inter-jet debido a que, en general, la energía del jet menos energético asociado a un quark es muy superior que la del asociado al gluon, con lo que la asimetría puede tener motivaciones puramente geométricas.

Utilizando este método, solo las configuraciones simétricas son directamente comparables, con lo que hemos estudiado el efecto sobre la muestra de sucesos hadrónicos que tienen un muon que pasa los cortes y que cumplen los cortes de planitud y energía del tercer jet, sin que sea necesario que estén en condiciones de *tag*. 396 sucesos que pasan estos cortes se distribuyen según la configuración simétrica descrita en el capítulo 5.

Sobre esta muestra podemos cuantificar el efecto. Utilizaremos el método directo ya que nos proporciona información interpretable fácilmente. Los resultados obtenidos son:

		flujo de partículas		flujo de energía	
		datos	M.C.	datos	M.C.
configuración simétrica	$R^*_{qg,qq}$	1.30 ± 0.06	1.39 ± 0.10	1.40 ± 0.10	1.48 ± 0.16
	$\#\sigma$	5.2	3.9	4.2	3.1

Los valores $R^*_{qg,qq}$ obtenidos son sensiblemente menores que los $R_{qg,qq}$ tabulados en la sección 5.1. Sin embargo, dado que la muestra es más amplia, la significación estadística es comparable. Nada nos impide realizar este análisis sobre la muestra de hadrónicos con lo que se obtendrían errores mucho menores.

Del estudio de la muestra simétrica de datos reales identificada en el capítulo 5 obtenemos que en un $62 \pm 7\%$ de los sucesos el jet menos energético es el asociado al gluon. Análogamente, el valor obtenido sobre la misma muestra Monte Carlo es de un $60 \pm 10\%$[1]. Podemos entonces interpretar el

---

[1] Estos valores se aproximan a la verdadera eficiencia de la identificación tradicional. Calculadas estas fracciones sobre todas las configuraciones simétricas se obtiene un $59 \pm 5\%$ sobre datos, compatible con el $62 \pm 7\%$ obtenido para el Monte Carlo.

resultado tabulado anteriormente como:

$$R^*_{qg,qq} = \alpha R_{qg,qq} + (1-\alpha) R^{-1}_{qg,qq}$$

donde α es precisamente la fracción de sucesos de la muestra en los que el jet menos energético corresponde al gluon (hemos asumido que la eficiencia del *tag* anterior era del 100%).

A partir de los valores $R_{qg,qq}$ y $R^*_{qg,qq}$ podemos determinar el valor de α:

	Datos reales		Monte Carlo	
	f. de part.	f. de energ.	f. de part.	f. de energ.
α	$55 \pm 12\%$	$60 \pm 21\%$	$61 \pm 22\%$	$50 \pm 24\%$

Los valores obtenidos son compatibles con las fracciones calculadas mediante la muestra estudiada en la sección 5, lo que nos permite confirmar que el *string effect* es una asimetría inherente a todo suceso $q\bar{q}g$ cuyo valor sobre una muestra está directamente relacionado con la eficiencia de la determinación del jet asociado al gluon. La fragmentación de Lund es una muy buena aproximación a este fenómeno.

Bibliografia

[1] Weinberg, S., Phys. Rev. Lett. **19** 1264(1967); Salam, A., *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity*, ed. N. Svartholm (Almqvist & Wiksell, Stockholm,1968); Glashow, S.L., Iliopoulos, J., Maiani, L., Phys. Rev. **D2** 1285 (1970).

[2] Fritzsch, H., Gell-Mann, M., 16^{th} Intern. Conf. on High Energy Physics, Chicago-Batavia (1972); Fritzsch, H., Gell-Mann, M., Leutwyler, H., Phys. Lett. **B47** 365(1973); Gross, D.J., Wilczek, F., Phys. Rev. Lett. **30** 1343(1973); Politzer, H.D., Phys. Rev. Lett. **30** 1346(1973).

[3] Ellis, R.K., Ross, D.A., Terrano, A.E., Nucl. Phys. **B178** 421(1981).

[4] Altarelli, G., Parisi, G., Nucl. Phys. **B126** 298(1977).

[5] Field, R.D., Feynman, R.P., Nucl. Phys. **B136** 1(1978).

[6] Artru, X., Mennessier, G., Nucl. Phys. **B70** 93(1974).

[7] Fox, G.C., Wolfram, S., Nucl. Phys. **B168** 285(1980); Field, R.D., Wolfram, S., Nucl. Phys. **B213** 65(1983).

[8] Hanson, G., et al., Phys. Rev. Lett. **35** 1609(1975).

[9] Brandt, S., et al., Phys. Lett. **12** 57(1964); Farhi, E., Phys. Rev. Lett. **39** 1587(1977).

[10] Kunszt, Z., Nason, P., *Z Physics at LEP 1* (eds. G. Altarelli, R. Kleiss y C. Verzegnassi), CERN Report CERN-89-08, Vol. 1 373(1989).

[11] Sterman, G., Weinberg, S., Phys. Rev. Lett. **39** 1436(1977).

[12] JADE coll., Bartel, W., et al., Z. Phys. **C33** 23(1986).

[13] Dokshitzer, Y.L., *Workshop on jet studies at LEP and HERA*, Durham (1990).

[14] Brown, N., Stirling, W.J., Phys. Lett. **B252** 657(1990).

[15] Dokshitzer, Yu.L., Khoze, V.A., Troyan, S.I., *Perurbative Quantum Chromodynamics*, ed. A.H. Mueller (World Scientific, Singapore, 1989), p.241.

[16] JADE coll., Bartel, W., et al., Phys. Lett. **B101** 129(1981); Z. Phys. **C21** 37(1983).

[17] TPC/2γ coll., Aihara, H., et al., Phys. Rev. Lett. **54** 270(1985); Z. Phys. **C28** 31(1985); Phys. Rev. Lett. **57** 945(1986).

[18] TASSO coll., Althoff, M., et al., Z. Phys. **C29** 29(1985).

[19] MARK II coll., Sheldon, P.D., et al., Phys. Rev. Lett. **57** 1398(1986).

[20] L3 coll., Adeva, B., et al., Nucl. Inst. Meth. **A289** 35(1990).

[21] Nilles, H.P., Streng K.H., Phys. Rev. **D23** 1944(1981).

[22] Sjöstrand, T., Comp. Phys. Comm. **39** 347(1986); Sjöstrand, T., Bengtsson, M., Comp. Phys. Comm. **67** 465(1992).

[23] Brun R., et al.,"GEANT 3", CERN DD/EE/84-1 (Revisado), Septiembre 1987.

[24] L3 coll., Adeva, B., et al., CERN preprint, CERN-PPE/93-31.

[25] Arce, P., *Estudio de la producción y desintegración del quark b a las energías de LEP I.* Tesis U.A.M. (1993).

[26] JADE coll., Bartel, W., et al., Z. Phys. **C33** 339(1987).

[27] Catani, S., Dokshitzer, Y.L., Fiorani, F., Webber, B.R., Phys. Lett. **B269** 432(1991).

[28] Bardeen, W.A., et al., Phys. Rev. **D18**, 3998(1978).

[29] Cheterkyn, K.G., Kateev, A.L., Tkachov, F.V., Phys. Lett. **B85** 277(1979); Dine, M., Sarpinstein, J., Phys. Rev. Lett., **43** 668(1979); Celemaster, W., Gonsalves, R.J., Phys. Rev. Lett., **44** 560(1979); Phys. Rev. **D21** 3112(1980).

[30] JADE coll., Bethke, S., et al., Phys. Lett. **B213** 235(1988); TASSO coll., Braunschweig, W., et al., Phys. Lett. **214** 286(1988); MARK II coll., Bethke, S., et al., Z. Phys. **C43** 325(1989); AMY coll., Park, I.H., et al., Phys. Rev. Lett. **62** 1713(1989); VENUS coll., Abe, K., et al., Phys. Lett. **B240** 232(1990).

[31] L3 coll., Adeva, B., et al., Phys. Lett. **B248** 464(1990).

[32] DELPHI coll., Abreu, P., et al., Phys. Lett. **B247** 167(1990); OPAL coll. Acton, P.D., et al., Z. Phys. **C55** 1(1992); ALEPH coll., Buskulik, D., et al., Z. Phys. **C55** 209(1992).

[33] OPAL coll., Akrawy, M.Z., et al., Phys. Lett. **B261** 334(1991).

[34] Frodessen, A.G., Skjeggestad, O., Tøfte, H., *Probability and Statistics in Particle Physics* (Universitetsforlaget, Oslo, Norway, 1979).

[35] Eadie, W.T., Drijard, D., James, F.E., Roos, M., Sadoulet, B., *Statistical Methods in Experimental Physics* (North Holland, Amsterdam-London, 1971).