UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Dottorato di Ricerca in Fisica: V ciclo

# Alcuni aspetti di dinamica non lineare con applicazioni in dinamica dei fasci

Tesi di Dottorato

di Massimo Giovannozzi

Relatore:

Prof. G. Turchetti

Correlatori:

Dott. W. Scandale

Dott. F. Schmidt

Bologna 1993

# Introduzione

Con la progettazione della nuova generazione di macchine acceleratrici adroniche quali LHC o SSC, la branca della fisica che si occupa dello studio della dinamica dei fasci si é dovuta confrontare con tutta una serie di nuovi fenomeni. L'uso di magneti superconduttori , necessari per raggiungere energie comprese nell'intervallo $1 - 10$ TeV, ha comportato, oltre a notevoli problemi di carattere tecnologico inerenti al fenomeno stesso della superconduttività, l'introduzione di forti effetti non lineari nella dinamica dei fasci che circolano nella macchina. Questo é causato principalmente dal fatto che la qualità del campo prodotto da un magnete superconduttore é decisamente inferiore a quella di un magnete convenzionale. In questa situazione la teoria lineare sviluppata da Courant e Snyder [1] alla fine degli anni cinquanta, che aveva rappresentato uno dei capisaldi della fisica degli acceleratori, non é più sufficiente per interpretare i fenomeni non lineari che si riscontrano nella dinamica delle particelle.
Per contro si tenga presente che lo studio dei fenomeni connessi con una dinamica non lineare é da più di cento anni il punto focale della cosiddetta teoria dei sistemi dinamici. Gli strumenti di indagine messi a punto in questo campo, hanno ormai raggiunto un notevole livello di maturità e sembra dunque ovvio adoperare queste tecniche nell'ambito della fisica dei fasci per tentare di gettare luce sui numerosi problemi che si incontrano in fase di progettazione delle nuove macchine acceleratrici.
In questo ambito si inserisce la ricerca presentata in questa dissertazione, in cui si sono considerate alcune questioni di dinamica non lineare che, direttamente o indirettamente, hanno collegamenti con la fisica degli acceleratori. Detti problemi sono stati affrontati utilizzando alcuni strumenti matematici mutuati dallo studio dei sistemi dinamici.
In questa dissertazione ci occuperemo fondamentalmente di tre temi

1. Determinazione del bacino di stabilità per mappe hamiltoniane del piano.

2. Riduzione degli effetti non lineari nel moto betatronico di una carica

in una macchina acceleratrice circolare.

3. Analisi dei fenomeni di trasporto indotti nei fasci da una lenta variazione dei parametri lineari dell'acceleratore.

Nella trattazione del primo e secondo punto si é fatto un uso estensivo della teoria delle forme normali.
Il problema affrontato dalla teoria delle forme normali per i diffeomorfismi analitici si schematizza come segue: siano $f_1(X), ..., f_n(X)$ con $X \in \mathbb{C}^n$, funzioni analitiche in un intorno dell'origine che si annullano sull'origine stessa; consideriamo la mappa $\mathbf{M}$ definita da

$$x'_i = f_i(X) \quad i = 1, .., n$$

1. Si trovi la forma più semplice (o forma normale) a cui la mappa precedente può essere ridotta mediante un cambiamento formale di coordinate $\mathbf{\Phi}$.

2. Si caratterizzi le proprietà di convergenza o divergenza delle serie che definiscono la trasformazione di variabili $\mathbf{\Phi}$ e la forma normale $\mathbf{U}$.

Accanto ai precedenti quesiti di ordine generale si possono considerare anche altri problemi più specifici. Ad esempio, supponendo che le condizioni per l'esistenza delle serie formali che definiscono $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{U}$ siano soddisfatte, si può considerare la possibilità di soluzioni non analitiche o addirittura solamente continue [2, 3]; oppure un altro problema estremamente interessante é quello della relazione tra le orbite della mappa di partenza $\mathbf{M}$ e quelle della forma normale $\mathbf{U}$. L'importanza di ciò risiede nelle implicazioni fisiche della questione: si tratta di dimostrare che le orbite dei due sistemi sono vicine per un tempo finito ma sufficientemente lungo da poter rendere le forme normali applicabili a problemi pratici [4, 5, 6, 7].
La teoria delle forme normali é stata sviluppata da Poincarè nella sua tesi, per studiare i punti critici dei campi vettoriali in $\mathbb{C}^n$; in particolare Poincarè dimostrò il seguente teorema: dato un campo vettoriale in $\mathbb{C}^n$

$$\dot{x}_i = f_i(X) \quad i = 1, .., n$$

dove l'origine é un punto di singolare, allora esiste un cambiamento di variabili

$$x_i = \Phi_i(Y), \quad \Phi_i(0) = 0, \quad i = 1, ..., n$$

analitico in un intorno dell'origine tale che riduca la mappa alla forma

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i \quad i = 1, .., n$$

dove $\lambda_i$ $i = 1, .., n$ sono gli autovalori della matrice $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$ del sistema linearizzato purchè siano soddisfatti i seguenti requisiti

**1)** tutti gli autovalori sono distinti

**2)** esiste una retta nel piano complesso passante per l'origine che lascia tutti gli autovalori dalla stessa parte

**3)** $\lambda_i \neq p_1\lambda_1 + ....p_n\lambda_n$ per una $n$-nupla arbitraria di interi con $\sum_{i=1}^n p_i > 1$.

Successivamente Dulac [8] generalizzò il risultato di Poincarè indebolendo la condizione 3) e dimostrando l'esistenza di una coniugazione analitica della mappa con la forma normale

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum c_{i,p_1,..,p_n} y_1^{p_1}...y_n^{p_n} \quad i = 1, .., n$$

dova la somma é estesa agli esponenti $p_i$ che soddisfano ad una relazione di risonanza $\lambda_i = p_1\lambda_1 + ....p_n\lambda_n$. Il teorema di Poincarè-Dulac può essere riformulato per i diffeomorfismi nel modo seguente [9]: dato un diffeomorfismo analitico con un punto fisso nell'origine, esiste un cambiamento di variabili analitico che coniuga la mappa con la forma normale

$$y_i' = \lambda_i y_i \quad i = 1, .., n$$

dove $\lambda_i$ sono ancora gli autovalori della matrice $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$ purchè siano soddisfatte le condizioni

**1')** tutti gli autovalori sono distinti e non nulli

**2')** il modulo degli autovalori é sempre diverso da 1

**3')** non é soddisfatta nessuna condizione di risonanza $\lambda_i = \lambda_1^{p_1}...\lambda_n^{p_n}$ per ogni $n$-nupla di interi positivi $p_i$ con $\sum_{i=1}^n p_i > 1$.

Tipicamente la dimostrazione di questi teoremi si divide in due passi: prima si deve dimostrare l'esistenza formale della trasformazione $\mathbf{\Phi}$, ovvero costruire tale trasformazione mediante una serie formale sviluppando ogni funzione secondo Taylor nell'intorno del punto fisso; poi bisogna provare la convergenza di tale trasformazione. Questo approccio é rimasto sostanzialmente inalterato anche nei successivi risultati della teoria delle forme normali. La dimostrazione della convergenza é basata sul metodo delle serie maggioranti e non si riesce a generalizzare quando la condizione 2) non é verificata. Questo fatto é in relazione con la presenza dei ben noti piccoli divisori: infatti nella costruzione formale della trasformazione $\mathbf{\Phi}$ compaiono a denominatore le quantità

$$|\lambda_1^{p_1}...\lambda_n^{p_n} - \lambda_i| \quad (p_1, .., p_n) \in \mathbb{N}^n \quad \sum_{i=1}^{n} p_i > 1$$

e la condizione 2') garantisce che tali quantità non possano diventare arbitrariamente piccole. Purtroppo la condizione 2') é troppo restrittiva per le applicazioni ai casi fisicamente interessanti in quanto é sicuramente falsa per punti fissi di tipo ellittico. In tal caso gli autovalori della mappa linearizzata hanno la forma $(e^{i\omega_1}, ..., e^{i\omega_n})$ ed anche se non soddisfano ad alcuna condizione di risonanza (requisito 3'), i piccoli divisori

$$\left| e^{i(p_1\omega_1+...+p_n\omega_n)} - e^{i\omega_i} \right|$$

possono diventare arbitrariamente piccoli quando si considerano $n$-nuple di interi con $\sum_{i=1}^{n} p_i$ sufficientemente grande. In questo caso il problema della convergenza della trasformazione in forma normale rimase aperto fino al 1942 quando Siegel [10] dimostrò nell'ipotesi che 1') e 3') siano verificate la convergenza della trasformazione normalizzante $x_i = \Phi_i(Y)$, purchè gli autovalori soddisfino ad una condizione diofantina

$$\left| e^{i(p_1\omega_1+...+p_n\omega_n)} - e^{i\omega_i} \right| \geq \Gamma^{-1} \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \right|^{-\mu}$$

con $\Gamma$ e $\mu$ opportune costanti. Il fatto rilevante é che nello spazio $\mathbb{C}^n$ le $n$-nuple che soddisfano ad una condizione diofantina costituiscono un insieme di misura piena e quindi il teorema di Siegel sembrerebbe avere il carattere di genericità. In seguito il teorema di Siegel fu generalizzato da vari autori [11, 12, 13, 14, 15] che indebolirono ulteriormente la condizione sugli autovalori e dimostrarono la convergenza della trasformazione normalizzante $\mathbf{\Phi}$, anche quando i $\lambda_i$ soddisfano a delle condizioni di risonanza, purchè però la forma normale sia lineare. Più recentemente Yoccoz [16] ha dimostrato che nel caso particolare di un diffeomorfismo in $\mathbb{C}$ la condizione di Brjuno [13] sulle proprietà aritmetiche degli autovalori é necessaria e sufficiente per la convergenza della trasformazione normalizzante.

Purtroppo nel caso di sistemi hamiltoniani (o mappe simplettiche) in $\mathbb{C}^{2n}$, la struttura hamiltoniana della dinamica implica automaticamente che gli autovalori $\lambda_i$ $i = 1, .., 2n$ soddisfano le condizioni di risonanza

$$\lambda_i^p \lambda_{i+n}^p = 1 \quad i = 1, .., n \quad p \in \mathbb{Z};$$

di conseguenza nel caso hamiltoniano la condizione 3') risulta genericamente violata e la forma normale stessa risulta in generale non lineare [17] e dunque non é possibile applicare il teorema di Siegel. In questo caso il problema della convergenza risulta essere estremamente complesso ed é connesso con la questione dell'integrabilità della dinamica ovvero dell'esistenza di integrali primi del moto analitici indipendenti ed in involuzione tra loro. In questo senso si possono riassumere i risultati ottenuti dicendo che ,nello spazio $\mathcal{H}$ delle serie di potenze convergenti

$$H = \sum_{P \in \mathbb{N}^{2n}} h_P x_1^{p_1} .... x_{2n}^{p_{2n}}$$

che rappresentano un sistema hamiltoniano in un intorno di un punto fisso ellittico dove si sia introdotta una opportuna topologia, in ogni intorno di un punto arbitrario di $\mathcal{H}$ esiste un hamiltoniano analitico, che non ammette nessun integrale primo del moto indipendente dall'hamiltoniano stesso [18]. In più si può dimostrare che l'insieme dei sistemi hamiltoniani con un punto fisso ellittico, per cui la trasformazione normalizzante converge, forma un insieme di prima categoria e dunque il complementare ha misura piena [19, 20]. Da questi risultati si desume che la divergenza della trasformazione normalizzante nel caso hamiltoniano non é il semplice risultato della presenza dei piccoli divisori, ma anche l'effetto della struttura non lineare delle equazioni funzionali che si devono risolvere.
La divergenza delle serie utilizzate dalla teoria delle forme normali sembra quindi essere la situazione generica nel caso di punti fissi ellittici. Diverso é il discorso per i punti fissi iperbolici, dato che, almeno nel caso bidimensionale, é possibile provare la convergenza di $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{U}$ [21, 22]. In questa situazione ha un particolare interesse l'analisi del dominio di analiticità di $\mathbf{\Phi}$. In questa dissertazione si é mostrato come sia possibile stimare i poli della trasformazione normalizzante avvalendosi della tecnica utilizzata da Moser per dimostrarne la convergenza.
Uno dei risultati principali di questo lavoro riguarda la determinazione del bacino di stabilità per mappe hamiltoniane del piano. Con il termine bacino di stabilità si intende la regione dello spazio delle fasi in cui si hanno moti confinati. Il problema descritto rappresenta uno dei quesiti principali della teoria dei sistemi dinamici e, a parte casi particolari, una risposta generale al problema non é nota. Il sistema studiato é rappresentato dalla mappa di Hénon [23]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + x^2 \end{pmatrix},$$

dove $R(\omega)$ é una matrice di rotazione. L'interesse per questa mappa risulta nel fatto che nonostante la semplicità ha un carattere di genericità e, in aggiunta, é uno dei più semplici modelli rappresentanti un sistema non integrabile. Da un punto di vista fisico, inoltre, questa mappa é rilevante per le sue connessioni con la fisica degli acceleratori. Si può infatti mostrare che essa rappresenta la mappa di trasferimento di una cella FODO con in aggiunta un elemento sestupolare. Una cella FODO é la struttura fondamentale di una macchina acceleratrice. Rappresenta l'elemento periodico della macchina. In essa sono compresi gli elementi magnetici lineari che hanno il compito di mantenere il fascio sull'orbita chiusa, dipoli, e di focalizzarlo, quadrupoli. Il sestupolo é un elemento non lineare la cui funzione può essere sia quella di ridurre gli effetti cromatici dovuti ai quadrupoli o di correggere gli errori sestupolari nei magneti. Il risultato principale della nostra analisi é che il bacino di stabilità della mappa di Hénon é dato dall'inviluppo interno delle varietà invarianti relative al punto fisso iperbolico della mappa di Hénon.
Le varietà invarianti sono l'analogo della separatrice per un sistema hamiltoniano. Rappresentano l'insieme di punti nello spazio delle fasi che tendono al punto fisso iperbolico per l'azione generata dalla mappa o dalla sua inversa. Il fatto interessante é che questo risultato vale in generale, indipendentemente dal valore del parametro $\omega$ che compare nell'espressione della mappa di Hénon. Il fenomeno delle intersezioni omocliniche ed eterocliniche risulta essere la ragione di questo risultato.
La conoscenza delle varietà invarianti é dunque fondamentale per la determinazione delle proprietà di stabilità del sistema precedente. Le varietà in questione possono essere determinate in vari modi: o con metodi numerici, o utilizzando le forme normali iperboliche che permettono di ottenere una rappresentazione delle varietà invarianti tramite uno sviluppo in serie.
L'analisi portata a termine non ha però riguardato solamente la mappa di Hénon. Al contrario, partendo da questo sistema, si é tentato di generalizzare il risultato ottenuto al caso di mappe del tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + P_n(x) \end{pmatrix},$$

dove $P_n(x) = \sum_{j=2}^{n} p_j x^j$. Anche in questo caso si é potuto stabilire un risultato analogo al precedente: il bacino di stabilità per una mappa del tipo precedente é sempre dato dall'inviluppo interno delle varietà invarianti relative ai punti fissi iperbolici di periodo uno o due. La distinzione avviene a seconda della parità di $n$ e del segno del termine di ordine massimo $p_n$.
Sempre per mantenere il collegamento con la fisica degli acceleratori, si é proceduto ad analizzare un modello bidimensionale realistico per SPS utilizzando il metodo proposto in questa dissertazione, ottenendo un accordo

eccellente con i normali metodi numerici utilizzati per determinare il bacino di stabilità per un sistema dinamico.
Per quanto riguarda il secondo problema trattato in questa dissertazione, questo trae origine direttamente dalle problematiche connesse con la dinamica di una particella in una macchina acceleratrice. Anche in questo caso le forme normali si sono dimostrate un valido strumento di indagine per risolvere problemi di dinamica non lineare. La possibilità di applicare le forme normali alla dinamica in un acceleratore si fonda sull'idea di modellizzare il moto trasversale al piano della macchina (o moto betatronico) di una particella nella rete magnetica di un acceleratore circolare mediante una mappa simplettica. Questa idea é dovuta essenzialmente a Dragt [24]: la rete magnetica di un acceleratore si suddivide, per costruzione, in una successione di magneti ciascuno dei quali é caratterizzato da un certo tipo di campo magnetico (campo di dipolo, quadrupolo, sestupolo, ottupolo, etc...) che può essere pensato con ottima approssimazione, costante all'interno del magnete con una brusca discontinuità ai suoi estremi. I valori dei campi sono scelti in modo che esista, per un fissato valore dell'energia, un'orbita chiusa di riferimento e la stabilità lineare di tale orbita sia di tipo ellittico [1] dal momento che l'orbita di riferimento viene percorsa sempre nello stesso verso a velocità vicine a quelle della luce é naturale prendere come parametro per descrivere il moto betatronico la lunghezza d'arco $s$ lungo tale curva. Le equazioni del moto in un piano trasversale al piano della macchina stessa, sono periodiche di periodo $L$ pari alla lunghezza dell'orbita di riferimento nel parametro $s$ ed é possibile avere un formalismo hamiltoniano [25] dal momento che l'irraggiamento di un protone (ed in generale delle particelle adroniche) dovuto all'accelerazione ed alla curvatura dell'orbita é trascurabile, almeno per gli attuali progetti. Tuttavia la dipendenza da $s$ non é affatto analitica in quanto i campi magnetici sono discontinui al bordo di ogni magnete; questo fatto rende problematico applicare la teoria perturbativa direttamente sull'hamiltoniano. Se invece consideriamo la mappa di Poincarè del sistema, ovvero la mappa che descrive il moto su una sezione di riferimento dell'anello della macchina, é possibile ottenere una mappa simplettica analitica a due gradi di libertà con un punto fisso ellittico corrispondente all'orbita di riferimento; la stabilità del punto fisso della mappa di Poincarè implica la stabilità dell'orbita di riferimento del sistema iniziale. In effetti in questo caso la mappa di Poincarè si può costruire in modo esplicito per composizione delle mappe di trasferimento di ogni singolo magnete, ovvero le mappe che associano alle coordinate dinamiche di una particella all'ingresso di un magnete le coordinate dinamiche della stessa particella all'uscita del magnete. Dal momento che i campi magnetici sono analitici all'interno del magnete anche la mappa di trasferimento sarà analitica e così la mappa di Poincarè.

Il calcolo della mappa di Poincarè può essere ulteriormente semplificato utilizzando la cosiddetta approssimazione di lente sottile per le mappe di trasferimento dei singoli magneti: dato che il rapporto tra la lunghezza del magnete e la lunghezza della macchina risulta molto piccolo é possibile considerare il limite verso zero di tale rapporto e contemporaneamente far tendere verso $\infty$ le forze indotte dai campi magnetici in modo da mantenere costante l'impulso. In tal caso la mappa di trasferimento associata ad un elemento magnetico diventa polinomiale se i campi stessi erano polinomiali. Le mappe di trasferimento così ottenute sono comunemente utilizzate nei programmi di tracking per integrare direttamente le soluzioni del moto a partire da una fissata condizione iniziale; tali programmi risultano tuttavia non sufficienti per dare una esauriente risposta al problema della stabilità in quanto da una parte non riescono a raggiungere i tempi dell'ordine di $10^6 - 10^8$ giri di macchina, che corrispondono ai tipici tempi di permanenza di un fascio nell'acceleratore, dall'altra non permettono un'analisi parametrica degli effetti non lineari.
Il calcolo della mappa di Poincarè componendo le mappe di trasferimento dei singoli magneti, anche se in linea di principio permetterebbe di avere una mappa polinomiale che in una sola iterazione descrive un giro completo della macchina, risulta però impraticabile poichè il numero di magneti rende il grado della mappa finale estremamente elevato. D'altra parte si verifica rapidamente che una mappa di Poincarè troncata ad un certo ordine nel suo sviluppo di Taylor sull'origine non può essere usato direttamente per studiare il moto betatronico, poichè gli effetti di non simpletticità introdotti dal troncamento invaliderebbero i risultati stessi. Ci si trova dunque davanti al problema di come estrarre delle informazioni fisicamente corrette per un sistema, di cui é noto lo sviluppo di Taylor attorno ad un punto fisso della mappa di Poincarè fino ad un certo ordine.
Per risolvere questa importante questione sono state proposte essenzialmente due possibili soluzioni: da una parte Dragt [26] propose di rappresentare la mappa di Poincarè mediante una trasformazione di Lie associata ad un sistema hamiltoniano indipendente dal tempo, dall'altra M. Pusterla e G. Turchetti [27] proposero di utilizzare la teoria delle forme normali di Birkhoff per studiare le proprietà della dinamica della mappa. Nonostante il carattere divergente delle serie perturbative che entrano in gioco nella teoria delle forme normali, questa soluzione si é rilevata subito la più promettente sia perchè consente un'analisi globale dello spazio delle fasi in un intorno del punto fisso, in quanto costruisce delle variabili Azione-Angolo approssimate con un errore che risulta scalare in modo esponenziale rispetto all'inverso della distanza dall'origine, sia perchè consente un controllo parametrico su delle quantità quali il *tune* e lo *smear* che hanno particolare importanza in campo acceleratoristico [25, 28, 29]. Il *tune* (orizzontale o verticale), definito

come il numero di oscillazioni lungo l'asse radiale o verticale che una particella compie mediamente in un giro di macchina in funzione della posizione iniziale, coincide con l'angolo di rotazione medio nei piani coordinati radiale e verticale dell'orbita della particella nello spazio delle fasi. Le forme normali costruiscono esplicitamente il tune in funzione della posizione iniziale attraverso le variabili di Azione approssimate consentendo una precisa localizzazione nello spazio delle fasi delle risonanze nonlineari: ovvero il luogo dei punti a cui corrispondono due angoli di rotazione $\omega_1$ ed $\omega_2$ che soddisfano ad una relazione del tipo

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + 2k_3\pi = 0$$

con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. In base ad un teorema di Birkhoff [30], le orbite di una mappa area-preserving nelle vicinanze di una risonanza formano delle strutture ad isole per la presenza di punti fissi ellittici ed iperbolici e delle relative separatrici. Il meccanismo della diffusione di Arnol'd [31] per i sistemi a più di due gradi di libertà ed alcuni criteri non completamente rigorosi, ma efficaci, hanno messo in evidenza la stretta relazione tra la presenza delle risonanze non lineari e l'instabilità delle orbite in un intorno dell'origine; per questo motivo la conoscenza del tune e quindi delle posizioni delle risonanze non lineari risulta molto utile per lo studio del comportamento delle orbite. In una macchina acceleratrice le risonanze non lineari sono eccitate dai termini non lineari che sono presenti nelle equazioni del moto; a loro volta questi termini sono dovuti ai termini multipolari che sono presenti nel campo magnetico generato dai vari elementi della macchina. Ancora una volta questi effetti non lineari sono particolarmente rilevanti nel caso di magneti superconduttori. Risulta dunque in molti casi inevitabile la correzione di questi effetti non voluti. Ciò si ottiene inserendo un insieme di magneti correttori nel reticolo magnetico della macchina, con lo scopo di compensare gli effetti dovuti agli errori. Si pone dunque il problema di determinare una strategia per fissare il valore dei correttori noti a priori i valori degli errori. Nel caso in cui i correttori siano posti in prossimità delle sorgenti degli errori la soluzione del problema é banale in quanto basterà fissare i correttori uguali agli errori, ma col segno opposto, affinchè si abbia una compensazione esatta. Qualora però i correttori non siano posti esattamente vicino alle sorgenti di errore o non tutte queste sorgenti siano provviste di correttori, non é più ovvio come minimizzare gli effetti non lineari. In questo caso sono stati proposti differenti approcci. Il più in auge é quello proposto da Neuffer [32]. Detto criterio si fonda sulla cosiddetta regola di Simpson per determinare in maniera approssimata l'integrale di una funzione utilizzando tre punti. Detta regola, ben nota nel campo dell'analisi numerica, risulta essere una regola di integrazione esatta per funzioni polinomiali di ordine non maggiore del terzo,

mentre in caso diverso fornisce dei risultati approssimati. Da ciò risulta immediato che l'ambito di applicazione dello schema di Neuffer é relativamente ristretto e circoscritto a casi ben specifici. In questo caso le forme normali permettono di determinare una procedura generale per correggere gli errori senza applicare alcuna approssimazione.
Ultimamente é stata fatta un'analisi della dipendenza del tune dai parametri che definiscono le componenti multipolari dei campi magnetici, offerta dalla teoria delle forme normali. Utilizzando i risultati di questa analisi é stato possibile applicare per la prima volta le forme normali per determinare i valori dei correttori da utilizzare in LHC per compensare gli effetti degli errori nei magneti superconduttori [33, 34].
Un simile approccio é stato applicato dall'autore sempre per determinare il valore dei correttori nel nuovo reticolo magnetico di LHC. In questo caso si sono compensati non solo gli effetti non lineari nel tune come funzione dell'ampiezza, ma si sono anche inclusi quegli effetti cosiddetti cromatici, che dipendono dalle differenze in momento delle varie particelle che compongono il fascio. Questo programma ha comportato lo sviluppo di software per effettuare, in modo del tutto generale, il processo di compensazione degli errori. La procedura sviluppata ha permesso di ottenere dei buoni risultati, ampliando notevolmente la regione nello spazio delle fasi in cui il moto delle particelle é approssimativamente lineare.
Inoltre si consideri che in questa dissertazione i risultati relativi all'analisi della dipendenza del tune dalle componenti multipolari sono stati generalizzati: una simile analisi é stata compiuta per i cosiddetti parametri di Twiss, quantità introdotte nell'ambito della teoria lineare di Courant e Snyder.
Il terzo argomento trattato in questa dissertazione riguarda, come già accennato, i fenomeni di trasporto dovuti a lente variazioni dei parametri lineari nelle macchine acceleratrici. Come ben noto la corrente che alimenta i magneti di una macchina acceleratrice é sottoposta ad un processo di raddrizzamento. Questo non può certamente escludere la presenza di lievi fluttazioni nel livello della corrente o la persistenza della componente a 50 Hz e delle sue armoniche principali. Ciò implica che anche il campo magnetico prodotto varierà di conseguenza. Questo inevitabile fenomeno produce, dunque, un lento cambiamento del tune lineare della macchina. Il fenomeno di per sé non sarebbe preoccupante, il problema sorge quando il moto delle particelle é fortemente non lineare. In questo caso l'azione combinata di non linearità e di fluttuazioni nei parametri lineari può introdurre delle instabilità, che, a loro volta, possono portare alla perdita di parte del fascio in tempi relativamente brevi. Un fenomeno di questo genere interessa in maniera particolare le macchine superconduttrici, in cui, come é stato già sottolineato, il moto delle particelle é fortemente non lineare e, in aggiunta, anche le più piccole

fluttuazioni nel livello di corrente non vengono smorzate in tempi rapidi. Nell'ambito del progetto LHC é dunque importante giungere a stabilire le specifiche cui devono rispondere i circuiti di alimentazione dei magneti in modo da evitare i fenomeni descritti. Per arrivare a determinare dei criteri pratici da applicare in fase di progettazione, al CERN si sono portati a termine, dal 1986 ad oggi, una serie di esperimenti utilizzando SPS [35, 36, 37, 38]. La filosofia su cui si fondano questi esperimenti é la seguente: SPS é una macchina estremamente lineare a energie attorno ai 120 GeV; in più sono presenti una serie di sestupoli che possono essere introdotti in maniera controllata. Esiste, poi, la possibilità di introdurre in maniera artificiale una modulazione nell'alimentazione di alcuni magneti quadrupolari speciali. Ciò rende fattibile lo studio quantitativo della dipendenza dei fenomeni di trasporto dai parametri della modulazione di corrente introdotta. Le misure effettuate durante queste sessioni sperimentali sono poi analizzate utilizzando simulazioni numeriche [38]. Allo stato attuale degli studi l'accordo tra queste simulazioni e i dati sperimentali non é troppo incoraggiante. Le ragioni di questo disaccordo non sono del tutto chiare e richiedono ulteriori approfondimenti. D'altronde la problematica connessa con questi fenomeni di trasporto é recente e, anche da un punto di vista teorico, le indagini sono ad uno stato altamente preliminare (vedi ad esempio [39] per quanto riguarda la trattazione statistica di un semplice modello unidimensionale). Uno dei pochi risultati disponibili al proposito permette di affermare che i fenomeni osservati non possono essere catalogati sotto l'etichetta di diffusione in senso matematico [40]. Con ciò si intende che il fenomeno di trasporto non é governato da una equazione di Fokker-Planck.

# Ringraziamenti

L'autore desidera esprimere la sua gratitudine al Prof. G. Turchetti per aver suggerito gli argomenti di studio trattati in questa dissertazione nonchè per il suo prezioso aiuto e costante incoraggiamento. Un particolare ringraziamento va al Prof. G. Servizi e al Dott. Bazzani per il puntuale e amichevole aiuto fornito durante tutto il periodo di ricerca. Si ringraziano anche tutti i colleghi della "Brigata Meccanica" dell'Università di Bologna per l'amicizia mostrata e per le utili discussioni.

Durante la preparazione di questa dissertazione l'autore ha passato lunghi periodi presso il **CERN** di Ginevra nel gruppo di Fisica degli Acceleratori della Divisione **SL**. Oltre a ringraziare tutti i componenti del gruppo per la cordiale ospitalità e per i numerosi aiuti, l'autore vorrebbe esprimere la sua particolare gratitudine ai Dott. J. Gareyte, W. Scandale e F. Schmidt per l'amicizia, la pazienza e l'aiuto fornito che é stato determinante per il completamento di questo studio. Infine desidero esprimere la mia profonda gratitudine e riconoscenza a mia Moglie e a tutti coloro che, con il loro affetto, hanno contribuito al sostegno morale e spirituale nei periodi più difficili di questo lavoro di ricerca.

# Indice

# Capitolo 1

# Forme Normali Iperboliche nel Piano

In questo capitolo si tratta il problema di ridurre a forma normale un diffeomorfismo analitico del piano in un intorno di un punto fisso. Come già detto nell'introduzione, indicato con $\mathbf{F}$ il suddetto diffeomorfismo, si cerca di determinare una trasformazione di coordinate $\mathbf{\Phi}$, tale che la mappa $\mathbf{U}$ definita dall'equazione:

$$\mathbf{\Phi}^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \tag{1.1}$$

abbia la forma più semplice possibile. é chiaro che la forma di $\mathbf{U}$ dipende dal tipo di punto fisso che si intende considerare. Nel seguito analizzeremo il caso particolare in cui $\mathbf{F}$ é un diffeomorfismo che preserva le aree nel piano, ma analoghi risultati possono essere stabiliti anche in casi più generali (ad esempio per mappe che preservano i volumi o per diffeomorfismi analitici di $\mathbb{C}^n$.
Dopo avere dato la classificazione e alcune proprietà generali dei diversi tipi di forme normali, a seconda che detto punto fisso sia ellittico, parabolico o iperbolico, ci specializzeremo al caso iperbolico trattando il problema della convergenza di $\mathbf{\Phi}$ considerando differenti approcci per la soluzione dell'equazione funzionale (1.1). In connessione con detto problema si presenterà una analisi della struttura delle singolarità di tipo polare di $\mathbf{\Phi}$ in funzione del valore dell'integrale primo del moto. In ultimo si darà la definizione di varietà invariante (sempre nel caso di diffeomorfismi del piano nell'intorno di un punto fisso iperbolico), considerando il problema della analiticità dello sviluppo in serie che rappresenta tali varietà.

## 1.1 Forme Normali in $\mathbb{R}^2$

In primo luogo considereremo il problema di ridurre a forma normale una mappa lineare simplettica del piano. Si tenga presente che nel seguito useremo i termini mappa o diffeomorfismo come sinonimi. Una mappa simplettica lineare $L(x)$ é una trasformazione lineare la cui matrice soddisfa la condizione:

$$LJL^T = J \tag{1.2}$$

dove $J$ é la matrice simplettica fondamentale definita

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Se consideriamo gli autovalori della matrice $L$ é immediato vedere che sono possibili solo tre differenti casi:

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} & \lambda_1 = \lambda_2^* & \text{caso ellittico} \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} & \lambda_1 \neq \lambda_2 & \text{caso iperbolico} \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} & \lambda_1 = \lambda_2 = 1 & \text{caso parabolico} \end{array} \tag{1.4}$$

A seconda delle diverse situazioni contemplate in (1.4), $L$ sarà coniugata con tipi differenti di matrici. Si ha infatti la seguente situazione

*Caso ellittico*
Nel caso ellittico una matrice unimodulare é coniugata con una rotazione:

$$L = TR(\omega)T^{-1} \qquad L_{11} + L_{22} = 2\cos\omega, \tag{1.5}$$

dove

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2L_{12} & 0 \\ 2(\cos\omega - L_{11}) & 2\sin\omega \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Indichiamo con $\hat{\mathbf{x}}$ le coordinate rispetto alle quali la mappa $L$ é una rotazione

$$\hat{\mathbf{x}} = T^{-1}\mathbf{x}, \qquad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p}_x \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

La trasformazione di similitudine $T$ é definita a meno del gruppo di matrici che commutano con $R$, vale a dire il gruppo abeliano a due parametri delle dilatazioni e delle rotazioni: $G(\mu, \xi) = \mu I \cdot R(\xi)$. Tale arbitrarietà può essere sfruttata per scegliere il segno degli elementi diagonali e il valore del determinante di $T$. Usando la condizione di gauge $\xi \neq 0$ si perde il vincolo

$T_{12} = 0$. Per questo motivo é consuetudine scegliere $\xi = 0$ e mantenere solo il grado di libertà in $\mu$. La condizione di gauge usata nella teoria degli acceleratori corrisponde a scegliere anche $T$ unimodulare e $T_{11} > 0, T_{22} > 0$. Ciò fissa il segno di $\omega$ che deve essere lo stesso di $L_{21}$. La matrice $T$ diventa

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{L_{12}}{\sin\omega}} & 0 \\ \dfrac{\cos\omega - L_{11}}{\sqrt{L_{12}\sin\omega}} & \sqrt{\dfrac{\sin\omega}{L_{12}}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ \eta & \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

dove si é definito

$$\beta = \frac{L_{12}}{\sin\omega} \qquad \eta = -\frac{(L_{11} - \cos\omega)}{\sqrt{\beta}\sin\omega}. \tag{1.9}$$

Si usa anche la rappresentazione diagonale di $L$, in particolare quando consideriamo le forme normali non lineari. In tal caso le coordinate diventano complesse coniugate:

$$L = V\Lambda(\omega)V^{-1}, \qquad V = TK, \qquad R(\omega) = K\Lambda(\omega)K^{-1}, \tag{1.10}$$

ove

$$\Lambda(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

e $V$ é definita come

$$V = \begin{pmatrix} L_{12} & L_{12} \\ e^{i\omega} - L_{11} & e^{-i\omega} - L_{11} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Le coordinate rispetto alle quali $\Lambda$ é diagonale sono indicate con $\tilde{\mathbf{x}}$ e sono complesse coniugate:

$$\tilde{\mathbf{x}} = K^{-1}\hat{\mathbf{x}} = V^{-1}\mathbf{x}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}, \qquad z = \hat{x} - i\hat{p}_x. \tag{1.13}$$

La mappa che, nei diversi sistemi di coordinate, assume la forma

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}' = R(\omega)\tilde{\mathbf{x}}, \qquad z' = e^{i\omega}z \tag{1.14}$$

possiede un invariante dato da

$$\epsilon = ||T^{-1}\mathbf{x}||^2 = \hat{x}^2 + \hat{p}_x^2 = zz^*. \tag{1.15}$$

*Caso parabolico*
Nel caso parabolico la matrice $L$, che dipende da due parametri, assume la forma

$$L = TDT^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

ove $T$ é definita a meno di un gruppo a due parametri di matrici commutative con $D$, ovvero $G(\mu, \xi) = \begin{pmatrix} \mu & \xi \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Se scegliamo $T$ unimodulare e con elementi diagonali positivi, allora possiamo scrivere

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ \eta & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 - \eta\sqrt{\beta} & \beta \\ & \\ -\eta^2 & 1 + \eta\sqrt{\beta} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

*Caso Iperbolico*
Nel caso iperbolico abbiamo

$$L = TR_H(\alpha)T^{-1} \qquad 2\cosh\alpha = L_{11} + L_{22} \tag{1.18}$$

dove

$$R_H(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2L_{12} & 0 \\ 2(\cosh\alpha - L_{11}) & 2\sinh\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

La matrice $T$ é definita a meno del gruppo a due parametri di matrici commutative con $R_H(\alpha)$, ovvero $G(\mu, \xi) = \mu I \cdot R_H(\xi)$. Possiamo sfruttare il grado di libertà in $\mu$ per imporre che $U$ sia unimodulare e con elementi diagonali positivi. Ciò fissa il segno di $\alpha$ imponendogli di coincidere con quello di $L_{12}$, come nel caso ellittico, e si ottiene

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L_{12}}{\sinh\alpha}} & 0 \\ \frac{\cosh\alpha - L_{11}}{\sqrt{L_{12}\sinh\alpha}} & \sqrt{\frac{\sinh\alpha}{L_{12}}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ \eta & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

dove abbiamo definito

$$\beta = \frac{L_{12}}{\sinh\alpha} \qquad \eta = -\frac{(L_{11} - \cosh\alpha)}{\sqrt{\beta}\sinh\alpha}. \tag{1.21}$$

Di conseguenza la matrice $L$ può essere rappresentata come

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha - \eta\sqrt{\beta}\sinh\alpha & \beta\sinh\alpha \\ \\ \left(\frac{1}{\beta} - \eta^2\right)\sinh\alpha & \cosh\alpha + \eta\sqrt{\beta}\sinh\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

La rappresentazione diagonale, in questo caso, si ottiene in una base ancora reale. Proprio come in (1.10) si trova

$$L = V\Lambda V^{-1}, \qquad V = TK, \qquad R_H(\alpha) = K\Lambda K^{-1} \tag{1.23}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

e $V$ risulta definita come

$$V = \begin{pmatrix} L_{12} & L_{12} \\ e^{\alpha} - L_{11} & e^{-\alpha} - L_{11} \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

Le coordinate in cui $\Lambda$ é diagonale, indicate ancora con $\tilde{\mathbf{x}}$, sono reali

$$\tilde{\mathbf{x}} = K^{-1}\hat{\mathbf{x}} = V^{-1}\mathbf{x}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{p}_x \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \tilde{x} = \hat{x} + \hat{p}_x \\ \tilde{p}_x = \hat{x} - \hat{p}_x. \end{matrix} \tag{1.26}$$

L'invariante per la mappa si scrive, in questo caso, come

$$\epsilon = ||T^{-1}bfx||^2 = \hat{x}^2 - \hat{p}_x^2 = \tilde{x}\tilde{p}_x. \tag{1.27}$$

Nel semplice caso lineare l'unico punto fisso é l'origine che verrà indicato con il termine *ellittico, parabolico o iperbolico* a seconda degli autovalori $\lambda_1$,$\lambda_2$. Nel caso generale in cui si consideri una trasformazione non lineare $\mathbf{F}$, la classificazione precedente si estende considerando gli autovalori dello jacobiano $\mathbf{J}_F$ di $\mathbf{F}$. Inoltre, sotto queste ipotesi il punto fisso non sarà più necessariamente nell'origine del sistema di coordinate. é sempre possibile, però, con una semplice traslazione riportarci alla situazione in cui l'origine é un punto fisso. Definiamo, ora, alcuni concetti che saranno utili nel seguito.

*Definizione* Una mappa $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ si dice in *forma normale* rispetto al gruppo $\mathcal{G}_\Lambda$ generato dalla mappa lineare $\Lambda$, se commuta con $\Lambda$

$$\mathbf{F} \circ \Lambda = \Lambda \circ \mathbf{F}. \tag{1.28}$$

Analogamente una variabile dinamica $A$, definita come funzione scalare, é in forma normale se é invariante rispetto a $\Lambda$

$$A \circ \Lambda = A. \tag{1.29}$$

Ponendo $\Lambda = Diag\,(\lambda_1, \lambda_2)$ e considerando il generico monomio $\xi_1^n \xi_2^m$, si ha che la condizione espressa dalle equazioni (1.28,1.29) si riduce a

$$\lambda_1^{n-\delta_1} \lambda_2^{m-\delta_2} = 1, \tag{1.30}$$

dove, per tener conto delle differenze dovute al fatto che si consideri una variabile dinamica o una componente di $\mathbf{F}$, si é definita la quantità $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$ come:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{cases} (1,0) & \text{nel caso di} F_1 \\ (0,1) & \text{nel caso di} F_2 \\ (0,0) & \text{nel caso di} A \end{cases} \tag{1.31}$$

Dalla condizione (1.30) discende la seguente classificazione:

*Forme Normali Ellittiche Non Risonanti.*

In questo caso si ha che $\lambda_1 = \lambda_2^* = e^{i\omega}$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e dunque si deve avere che $A$ può essere espressa come $A = A(\xi_1 \xi_2)$, mentre per $\mathbf{F}$ vale la seguente proprietà $F_i(\xi_1, \xi_2) = \xi_i \hat{F}(\xi_1 \xi_2)$.

*Forme Normali Ellittiche Risonanti.*

In questo caso si ha che vale una condizione di risonanza del tipo $\lambda_1 = e^{i2\pi \frac{p}{q}}$ e dunque nello sviluppo di $A$ saranno presenti monomi del tipo $\xi_1^n \xi_2^m$ con $n = m + \ell q$ con $\ell$ un intero generico. Per quanto riguarda $\mathbf{F}$ si ha che i monomi costituenti soddisfano alla condizione $n = m + \ell q \pm 1$.

*Forme Normali Iperboliche.*

La condizione da soddisfare é analoga a quella che si ha nel caso ellittico non risonante, dove $A = A(\xi_1 \xi_2)$ e $F_i(\xi_1, \xi_2) = \xi_i \hat{F}(\xi_1 \xi_2)$.

é possibile a questo punto studiare in dettaglio il problema della soluzione dell'equazione (1.1). L'idea che sta alla base di questa equazione é quella di cercare un nuovo sistema di coordinate, definito tramite la funzione $\mathbf{\Phi}$, tale che la mappa risulti semplificata e dunque la sua dinamica sia di più facile interpretazione che nelle coordinate originali. In questo senso la (1.1) può essere rappresentata dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{z} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{z}' \\ {\scriptstyle \boldsymbol{\Phi}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \boldsymbol{\Phi}} \\ \boldsymbol{\xi} & \xrightarrow[\mathbf{U}]{} & \boldsymbol{\xi}' \end{array} \tag{1.32}$$

é possibile specificare in termini più precisi cosa si intenda dicendo che $\mathbf{U}$ ha una forma semplificata rispetto a $\mathbf{F}$. La condizione che si vuole imporre su $\mathbf{U}$ é che sia in forma normale rispetto al gruppo lineare $\mathcal{G}_{\mathbf{J}_F}$ generato dallo jacobiano di $\mathbf{F}$. Si tenga presente che é anche possibile utilizzare tipi diversi di forme normali (scegliendo, ad esempio, un sottogruppo $\mathcal{G}_{\mathbf{J}_1}$ di $\mathcal{G}_{\mathbf{J}_F}$) che risultano essere particolarmente utili nel caso ellittico quasi risonante. Nel seguito, però, faremo sempre riferimento alla prima definizione.
In primo luogo introduciamo le seguenti notazioni. Indicheremo con

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \qquad z = (z_1, z_2) \tag{1.33}$$

rispettivamente le nuove e le vecchie coordinate. Per ciò che concerne le funzioni

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi) = (\Phi_1(\boldsymbol{\xi}), \Phi_2(\boldsymbol{\xi}))\,, \quad \mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}) = (U_1(\boldsymbol{\xi}), U_2(\boldsymbol{\xi})) \quad \mathbf{F}(z) = (F_1(z), F_2(z))\,, \tag{1.34}$$

queste saranno considerate a livello di serie formali. I problemi di convergenza verranno considerati nel successivo paragrafo a proposito del caso iperbolico in quanto é noto che non esistono soluzioni analitiche di (1.1) in un intorno aperto dell'origine nel caso ellittico. Utilizzeremo sviluppi sulla base completa dei polinomi omogenei e indicheremo con $[\boldsymbol{\Phi}]_n$ il termine omogeneo di ordine $n$-esimo dello sviluppo di Taylor della $\boldsymbol{\Phi}$, mentre si userà $[\boldsymbol{\Phi}]_{\leq N}$ per il troncamento all'ordine $N$ definito da:

$$[\boldsymbol{\Phi}]_{\leq N}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} + \sum_{n=2}^{N} [\boldsymbol{\Phi}]_n(\boldsymbol{\xi}), \quad [\mathbf{U}]_{\leq N}(\boldsymbol{\xi}) = \Lambda\boldsymbol{\xi} + \sum_{n=2}^{N} [\mathbf{U}]_n(\boldsymbol{\xi}), \tag{1.35}$$

dove $[\mathbf{U}]_n(\boldsymbol{\xi})$ contiene solamente monomi in forma normale di ordine $n$. Come già visto in precedenza nel caso ellittico é conveniente usare coordinate complesse, mentre in quello iperbolico le coordinate sono reali. I vettori precedentemente definiti avranno dunque un significato diverso a seconda che si consideri un punto fisso ellittico o iperbolico: nel primo caso si hanno vettori in $\mathbb{C}^2$ in cui la seconda componente é la complessa coniugata della prima, mentre nel secondo caso si lavora con elementi di $\mathbb{R}^2$. Sostituendo in (1.1) i troncamenti all'ordine $N$, si otterrà

$$\mathbf{F} \circ [\mathbf{\Phi}]_{\leq N} = [\mathbf{\Phi}]_{\leq N} \circ [\mathbf{U}]_{\leq N} + \mathbf{E}_N, \tag{1.36}$$

dove $\mathbf{E}_N = \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{N+1}\right)$ rappresenta l'errore dovuto al fatto che risolviamo perturbativamente l'equazione sostituendo dei troncamenti alle soluzioni vere. Per ottenere delle equazioni che permettano di risolvere iterativamente (1.36) calcolando $[\mathbf{\Phi}]_n$ e $[\mathbf{U}]_n$ é utile introdurre il seguente operatore:

$$\Delta = \mathbf{\Phi} \circ \Lambda - \Lambda \circ \mathbf{\Phi}, \tag{1.37}$$

Si noti che il nucleo di $\Delta$ é costituito esattamente dalle forme normali (rispetto alla matrice $\Lambda$). Introduciamo anche un proiettore $\prod$ che agisce sullo spazio $\mathcal{P}$ dei polinomi omogenei e proietta sullo spazio $\mathcal{N}$ dei polinomi in forma normale. Analogamente risulta definito $(1-\prod)$ che proietta sul complemento di $\mathcal{N}$. Con queste convenzioni é facile vedere che la (1.36) può essere riscritta come

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\Delta[\mathbf{\Phi}]_n + [\mathbf{U}]_n\right) = \sum_{n\geq 2} [\mathbf{Q}]_n - \mathbf{E}_n, \tag{1.38}$$

dove $[\mathbf{Q}]_n(\boldsymbol{\xi})$ sono polinomi omogenei che dipendono solo da $[\mathbf{\Phi}]_i$ e $[\mathbf{U}]_i$ con $1 \leq i \leq n-1$ essendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} [\mathbf{Q}]_n(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=2}^{\infty} [\mathbf{F}]_n \circ \left(\boldsymbol{\xi} + \sum_{j=2}^{N} [\mathbf{\Phi}]_j(\boldsymbol{\xi})\right) + \\ \sum_{n=2}^{N} \left[ [\mathbf{\Phi}]_n (\Lambda\boldsymbol{\xi}) - [\mathbf{\Phi}]_n \circ \left(\Lambda\xi + \sum_{j=2}^{N} [\mathbf{U}]_j(\boldsymbol{\xi})\right)\right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

e quindi possono essere considerati come dei termini noti in (1.38). Ci siamo dunque ricondotti alla soluzione di un insieme di equazioni lineari in $[\mathbf{\Phi}]_n$ e $[\mathbf{U}]_n$ che hanno la stessa forma indipendentemente dall'ordine perturbativo. Queste equazioni sono dette *equazioni omologiche*. La loro soluzione può essere ottenuta proiettando la (1.38) sul sottospazio dei polinomi omogenei in forma normale e sul suo complemento. Si ottiene dunque:

$$[\mathbf{U}]_n = \prod [\mathbf{Q}]_n \tag{1.40a}$$

$$\left(1 - \prod\right) [\mathbf{\Phi}]_n = \Delta^{-1} \left(1 - \prod\right) [\mathbf{Q}]_n, \tag{1.40b}$$

per quanto riguarda il resto si ha

$$[\mathbf{E}_N]_n = [\mathbf{Q}]_n \quad n \geq N+1. \tag{1.41}$$

Dalle precedenti equazioni risulta chiaro che rimane una indeterminazione sulla forma di $[\mathbf{\Phi}]_n$, infatti la componente in forma normale $\prod[\mathbf{\Phi}]_n$ non viene fissata risolvendo le (1.40). D'altronde questa indeterminazione sui coefficienti di $\mathbf{\Phi}$ si ripercuote necessariamente anche su $\mathbf{U}$ e questo potrebbe portare a conseguenze indesiderate quali la perdita di simpletticità per la forma normale. é dunque importante stabilire quali sono le condizione che garantiscono la conservatività per $\mathbf{U}$. A tal scopo poniamo la seguente definizione.

*Definizione* Una mappa $\mathbf{\Phi}$ si dice *formalmente simplettica* se la matrice jacobiana $(M)_{i,k} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_k}$ é simplettica, nel caso di un troncamento $[\mathbf{\Phi}]_{\leq N}$, si dice *troncamento simplettico* se $(M_N)_{i,k} = \frac{\partial [\Phi_i]_{\leq N}}{\partial \xi_k}$ soddisfa

$$M_N J M_N^T = J + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^N\right). \tag{1.42}$$

Si può provare il seguente risultato [41].

**Teorema** *Nel caso di forme normali iperboliche o ellittiche non risonanti,* $\mathbf{U}$ *é formalmente simplettica e* $[\mathbf{U}]_{\leq N}$ *é un troncamento simplettico indipendentemente dalla scelta fatta per* $\mathbf{\Phi}$*.Di più lo jacobiano di* $\mathbf{\Phi}$ *é una forma normale.*
**Dim.**
La dimostrazione procede per induzione. In primo luogo facciamo vedere che lo jacobiano di una mappa in forma normale é esso stesso una forma normale. Sia $\mathbf{U}$ una mappa in forma normale rispetto a $\Lambda = Diag\,(\lambda_1, \lambda_2)$ e indichiamo con $[U_1(\boldsymbol{\xi}), U_2(\boldsymbol{\xi})] = \sigma(\xi)$ il suo jacobiano (dove [ ] rappresenta l'usuale parentesi di Poisson). Si ha che:

$$\begin{array}{rcccc} [U_1\,(\Lambda\boldsymbol{\xi})\,, U_2\,(\Lambda\boldsymbol{\xi})] & = & \sigma\,(\Lambda\boldsymbol{\xi}) & = & [(\Lambda\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}))_1\,, (\Lambda\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}))_2] \\ & = & \lambda_1\lambda_2\sigma(\boldsymbol{\xi}) & = & \sigma(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \tag{1.43}$$

Dall'equazione funzionale (1.38) si ottiene la seguente relazione che lega gli jacobiani

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = [(\mu \circ \mathbf{U})(\boldsymbol{\xi})]\sigma(\boldsymbol{\xi}), \tag{1.44}$$

dove si é usato $\mu = [\Phi_1, \Phi_2]$. Per quanto detto in precedenza si ha che $U_i$ possono essere scritte come

$$U_1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 u_1(\rho), \quad U_2(\boldsymbol{\xi}) = \xi_2 u_2(\rho), \quad \text{dove } \rho \equiv \xi_1\xi_2, \tag{1.45}$$

da cui si deduce che

$$\sigma(\rho) = [U_1, U_2] = \frac{d}{d\rho}(\rho u_1(\rho) u_2(\rho)). \tag{1.46}$$

Espandendo in serie $\sigma(\rho)$ e $\mu(\boldsymbol{\xi})$

$$\begin{cases} \sigma(\rho) &= 1 + \sigma_2\rho + \ldots + \sigma_{2n}\rho^n + \ldots \\ \mu(\boldsymbol{\xi}) &= 1 + [\mu]_1(\boldsymbol{\xi}) + \ldots + [\mu]_n(\boldsymbol{\xi}) + \ldots \end{cases} \tag{1.47}$$

e sostituendo in (1.44) si ottiene la seguente relazione

$$1 + [\mu]_1(\boldsymbol{\xi}) + [\mu]_2(\boldsymbol{\xi}) + \ldots = (1 + [\mu]_1(\Lambda\boldsymbol{\xi}) + [\mu]_2(\Lambda\boldsymbol{\xi}) + \ldots)(1 + \sigma_2\rho + \ldots).$$

Dopo aver decomposto $[\mu]_k(\boldsymbol{\xi})$ utilizzando $\prod$ e $(1 - \prod)$ si ottiene che

$$\Delta[\mu]_1 = 0, \quad \Delta[\mu]_2 = 0, \quad \sigma_2 = 0 \Longrightarrow [\mu]_1 = 0, \quad [\mu]_2 = \hat{\mu}_2\rho. \tag{1.48}$$

Procedendo per induzione su $n$, supponiamo che si abbia $\sigma_{2k} = 0$ per $k \leq n-1$ e che $(1 - \prod)[\mu]_k = 0$ per $k \leq 2n-1$ e dunque

$$\begin{cases} \sigma &= 1 + \sigma_{2n}\rho^n + \ldots \\ \mu &= 1 + \hat{\mu}_2\rho + \ldots + \hat{\mu}_{2(n-1)}\rho^{n-1} + [\mu]_{2n} + [\mu]_{2n+1} + \ldots \end{cases}. \tag{1.49}$$

Dopo aver notato che

$$U_1U_2 = \rho u_1(\rho)u_2(\rho) = \int_0^\rho \sigma(\rho')d\rho' = \rho\left(1 + \frac{\sigma_{2n}}{n+1}\rho^n\right), \tag{1.50}$$

possiamo riscrivere (1.1) ottenendo per l'ordine $2n$ la seguente espressione

$$[\mu]_{2n}(\boldsymbol{\xi}) = \left[\hat{\mu}_2\rho\left(1 + \frac{\sigma_{2n}}{n+1}\rho^n\right) + \ldots + \hat{\mu}_{2(n-1)}\rho^{n-1}\left(1 + \frac{\sigma_{2n}}{n+1}\rho^n\right)^{n-1}\right]_{2n} + [\mu]_{2n}(\Lambda\boldsymbol{\xi}) + \sigma_{2n}\rho^n.$$

é immediato vedere che ciò implica

$$-\Delta[\mu]_{2n} = \sigma_{2n} \Longrightarrow \sigma_{2n} = 0, \quad [\mu]_{2n} = \hat{\mu}_{2n}\rho^n. \tag{1.51}$$

Analogamente all'ordine $2n+1$ si avrà

$$[\mu]_{2n+1}(\boldsymbol{\xi}) = [\mu]_{2n+1}(\Lambda\boldsymbol{\xi}) \Longrightarrow [\mu]_{2n+1}(\boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{1.52}$$

Questo completa la dimostrazione. $\square$

Da questo teorema é possibile dedurre ulteriori conseguenze sulla dinamica della forma normale. La condizione $\sigma = 1$ implica che

$$U_1 U_2 = \rho u_1(\rho) u_2(\rho) = \rho \Longrightarrow u_2(\rho) = u_1^{-1}(\rho). \tag{1.53}$$

L'equazione precedente mostra dunque che $\rho$ é un invariante del moto, in quanto si ha che

$$\rho' = \xi_1' \xi_2' = U_1(\boldsymbol{\xi}) U_2(\boldsymbol{\xi}) = \rho. \tag{1.54}$$

Nel caso ellittico, le coordinate sono complesse, in quanto questa é la base in cui la parte lineare della mappa risulta diagonale. In conseguenza di questo fatto e di (1.54) si ha che

$$U_2 = U_1^* \Longrightarrow u_1(\rho) = e^{-i\Omega(\rho)}. \tag{1.55}$$

La forma normale risulta dunque integrabile essendo una rotazione di un angolo dipendente dalla distanza dall'origine. In questo caso le curve invarianti sono semplicemente dei cerchi.
Per quanto riguarda il caso iperbolico, invece, le coordinate in cui la parte lineare é diagonale sono reali. Utilizzando la (1.54) si ottiene

$$U_2 = U_1^{-1} \Longrightarrow u_1(\rho) = e^{-\Omega(\rho)}, \tag{1.56}$$

dove nuovamente $\Omega(\rho)$ é una funzione reale di $\rho$. Anche in questo caso la mappa in forma normale é integrabile, ma le curve invarianti non sono più cerchi, bensì iperboli equilatere.
Tornando al problema dell'indeterminazione in $\boldsymbol{\Phi}$ possiamo dire che questa può essere parzialmente risolta imponendo una condizione di simpletticità. Nonostante tutto, però, rimangono sempre dei coefficienti indeterminati. Questo é riconducibile al fatto che se consideriamo un elemento $\mathbf{T} \in \mathcal{N}$ allora $\Phi \circ \mathbf{T}$ e $\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{T}$ sono ancora soluzioni dell'equazione funzionale (1.1). Si noti l'analogia di questo fatto con quanto discusso a proposito delle trasformazioni lineari. La più generale trasformazione $\mathbf{T}$ può anche non essere simplettica (per il teorema dimostrato $\mathbf{U}$ sarà comunque tale) e si scriverà

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) = \left(s(\rho) e^{G(\rho)} \xi_1, s(\rho) e^{G(\rho)} \xi_2\right), \quad s(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \mu(\rho') d\rho', \tag{1.57}$$

dove $\mu$ é lo jacobiano di $\mathbf{T}$ e $G(\rho)$ é una funzione reale o immaginaria pura a seconda che si considerino forme normali iperboliche o ellittiche non risonanti. Questo significa che l'ambiguità in $\mathbf{\Phi}$ é riconducibile ad un gauge nell'angolo di rotazione (ellittico o iperbolico) e ad un fattore di dilatazione, analogamente a quanto visto nel caso lineare. Nel caso in cui $\mathbf{T}$ é simplettica, essa commuta con $\mathbf{U}$, e dunque si ha che la nuova forma normale

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{T} \tag{1.58}$$

coincide con $\mathbf{U}$. Altrimenti si ha che le due differiscono, ma solo per un fattore di scala, avendosi

$$\hat{u}_i(\hat{\rho}) = u_i(s^2(\rho)\rho). \tag{1.59}$$

Come ultimo commento, si tenga presente che nel caso ellittico risonante l'arbitrarietà nella determinazione della $[\mathbf{\Phi}]_{\leq N}$ é minore rispetto alle situazioni trattate. Infatti si può provare che la forma normale $[\mathbf{U}]_{\leq N}$ é un troncamento simplettico solo se $\mathbf{\Phi}$ é stata scelta simplettica.

## 1.2 Proprietà di convergenza nel caso iperbolico

Fino ad ora abbiamo trattato l'equazione (1.1) in maniera formale senza preoccuparci di problemi di convergenza. In effetti si può mostrare che nel caso ellittico, non é possibile la convergenza degli sviluppi in serie di $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{U}$ in un intorno aperto dell'origine. I problemi sorgono quando si deve invertire l'operatore $\Delta$, in quanto si hanno i cosiddetti *piccoli divisori*: $e^{ik\omega} - 1$ diventa arbitrariamente piccolo se $k$ é sufficientemente grande, anche se $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nel caso iperbolico questa situazione non si presenta, in quanto gli autovalori sono reali e dunque per l'espressione $(\lambda^{n-1} - 1)^{-1}$ vale

$$\frac{1}{2\lambda^{n-1}} \leq \frac{1}{\lambda^{n-1} - 1} \leq \frac{1}{\lambda - 1}. \tag{1.60}$$

Uno dei risultati più importanti risale a Hartman e Grobman [2, 3], che hanno provato il seguente teorema valido per diffeomorfismi.

**Teorema** *Sia $f$ un diffeomorfismo in $\mathbb{R}^n$ con un punto fisso iperbolico $\mathbf{x}$. Sia inoltre $d\,f(\mathbf{x})$ la parte lineare di $f$.Allora nell'intorno di $\mathbf{x}$ é sempre possibile costruire un omeomorfismo $h$ tale che $f$ sia coniugata con la sua parte lineare, ossia tale che valga la seguente relazione*

$$f \circ h = h \circ d\,f. \tag{1.61}$$

La portata di questo teorema é notevole in quanto permette una classificazione dei diffeomorfismi iperbolici in $\mathbb{R}^n$. D'altronde la coniugazione che lega il diffeomorfismo con la sua parte lineare é solamente continua. Per avere una maggiore regolarità per la funzione di coniugazione é necessario restringersi a considerare il problema in due dimensioni. In questo caso si può provare che esiste una soluzione analitica all'equazione (1.1), come é stato fatto da Moser [21].

**Teorema** *Data una mappa simplettica analitica*

$$\begin{cases} z_1' &= f(z_1, z_2) &= \lambda z_1 + \dots \\ z_2' &= g(z_1, z_2) &= \lambda^{-1} z_2 + \dots \end{cases}$$

*nell'intorno di un punto fisso iperbolico (dunque $\lambda \in \mathbb{R}$), esiste una trasformazione simplettica analitica*

$$\begin{cases} z_1 &= \phi_1(\xi_1, \xi_2) \\ z_2 &= \phi_2(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

*convergente in un intorno dell'origine, tale che ( 1.2) é posta in forma normale*

$$\begin{cases} \xi_1' &= u(\xi_1 \xi_2)\xi_1 \\ \xi_2' &= u^{-1}(\xi_1 \xi_2)\xi_2 \end{cases}$$

*con $u(\xi_1\xi_2)$ convergente in un intorno dell'origine.*
Non riporteremo la dimostrazione del teorema. Solamente vorremmo aggiungere come la prova di questo risultato si fondi sull'assunto che la trasformazione (1.2) sia simplettica. Come é stato sottolineato nel precedente paragrafo, per risolvere l'equazione (1.1), non é necessario operare con una $\mathbf{\Phi}$ simplettica. Difatti lo stesso Moser [22] ha fornito una seconda dimostrazione in cui si abbandona la richiesta di simpletticità su $\mathbf{\Phi}$.
Prima di procedere con questa seconda dimostrazione é utile porre la seguente definizione.

*Definizione* Sia $G = G(\boldsymbol{\xi})$ una funzione il cui sviluppo in serie si legge

$$G(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} [G]_n(\boldsymbol{\xi}), \quad [G]_n(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k+l=n} g_{k,l} \xi_1^k \xi_2^l, \tag{1.62}$$

si definisce *componente di Fourier* di ordine $n$ $\{G\}_n(\boldsymbol{\xi})$ l'espressione

$$\{G\}_n(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k-l=n} g_{k,l} \xi_1^k \xi_2^l \tag{1.63}$$

Una proprietà interessante di $\{G\}_n(\boldsymbol{\xi})$ é la seguente

$$\{G\circ\mathbf{U}\}_n = U^n\{G\}_n\,,\quad \text{dove } \mathbf{U}\equiv\big(u(\xi_1,\xi_2)),u^{-1}(\xi_1,\xi_2)\big)\,. \tag{1.64}$$

Da questa discende che i $\{G\}_n$ sono gli autovettori dell'operatore $\Delta$ definito in (1.37). L'equazione (1.1) può essere riscritta utilizzando le componenti di Fourier nella seguente maniera

$$\left\{\begin{array}{lcl}(u^n-\lambda)\left\{\hat{\Phi}_1\right\}_n & = & \left\{\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi}+\hat{\boldsymbol{\Phi}})\right\}_n\\ & & \\ (u^n-\lambda^{-1})\left\{\hat{\Phi}_2\right\}_n & = & \left\{\hat{F}_2(\boldsymbol{\xi}+\hat{\boldsymbol{\Phi}})\right\}_n\end{array}\right.\,, \tag{1.65}$$

dove si é usata la convenzione di indicare con gli apici le componenti non lineari delle funzioni. Per quanto riguarda la $\boldsymbol{\Phi}$, l'unica condizione che si impone é di avere proiezione nulla sullo spazio delle forme normali, ovvero $\prod\boldsymbol{\Phi}=0$ che, usando lo sviluppo in componenti di Fourier, diventa

$$\{\Phi_1\}_1=\xi_1,\quad \{\Phi_2\}_{-1}=\xi_2. \tag{1.66}$$

Utilizzando la (1.66) e la (1.65) otteniamo le seguenti relazioni

$$\left\{\begin{array}{lcl}(u-\lambda)\,\xi_1 & = & \left\{\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi}+\hat{\boldsymbol{\Phi}})\right\}_1\\ & & \\ (u^{-1}-\lambda^{-1})\,\xi_2 & = & \left\{\hat{F}_2(\boldsymbol{\xi}+\hat{\boldsymbol{\Phi}})\right\}_{-1}\end{array}\right.\,, \tag{1.67}$$

In primo luogo mostriamo che si possono maggiorare $(u^n-\lambda)^{-1}$ e $(u^n-\lambda^{-1})^{-1}$ con $\frac{c}{1-cs}$, dove $c$ é una costante e $s$ é la più piccola maggiorante di $u^{-1}-\lambda^{-1}$, indicata come $s=\overline{u^{-1}-\lambda^{-1}}$. Supposto che $n\neq\pm1$ e considerando la prima (in quanto la seconda si tratta analogamente) si ha per $n\leq 0$

$$\begin{aligned}(u^n-\lambda)^{-1} &= -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}u^{-|n|})^{-1} \\ &\prec \lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\overline{u}^{-|n|}\lambda^{-1})^k \\ &\prec \frac{1}{1-\overline{u}^{-1}} \\ &\prec \frac{c}{1-cs}\end{aligned} \tag{1.68}$$

dove $c \geq \frac{1}{1-\lambda^{-1}}$. Se invece vale $n \geq 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(u^n - \lambda)^{-1} &= u^{-n}(1 - \lambda u^{-n})^{-1} \\
&= u^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (u^{-n}\lambda)^k \\
&\prec \overline{u}^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{u}^{-1}\lambda^{\frac{1}{n}})^{nk} \\
&\prec \frac{1}{1 - \lambda^{\frac{1}{n}}\overline{u}^{-1}} \\
&\prec \frac{c}{1 - cs}.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Osserviamo ora che la parte non lineare della mappa $\mathbf{F}$ verifica la seguente relazione

$$\hat{F}1(\boldsymbol{\xi}), \hat{F}_2(\boldsymbol{\xi}) \prec \frac{c_1(\xi_1 + \xi_2)^2}{1 - c_1(\xi_1 + \xi_2)} = G(\xi_1, \xi_2). \tag{1.70}$$

A questo punto la dimostrazione della convergenza é piuttosto semplice. Se consideriamo, infatti

$$\Phi_1 - \xi_1 = \sum_{n \neq 1} \{\Phi_1\}_n, \quad \Phi_2 - \xi_2 = \sum_{n \neq -1} \{\Phi_2\}_n \tag{1.71}$$

é immediato vedere che vale la seguente maggiorazione

$$\overline{\Phi}_1 - \xi_1, \ \overline{\Phi}_2 - \xi_2 \prec \frac{c}{1 - cs} G(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2). \tag{1.72}$$

Un simile risultato vale anche per $\xi_2 s$. Se ora poniamo $\xi_1 = \xi_2$ e introduciamo la serie

$$W(\xi_1) = \frac{1}{\xi_1}(\overline{\Phi}_1 - \xi_1 + \overline{\Phi}_2 - \xi_2) + s, \tag{1.73}$$

otteniamo, sfruttando la (1.72), la stima

$$\xi_1 W \prec \frac{c_2}{1 - c_1 W} G(\xi_1(W + 1), \xi_1(W + 1)) \tag{1.74}$$

da cui discende che

$$W \prec \frac{c_2}{1 - c_1 W} \frac{4c\xi_1(1 + W)^2}{1 - 2c\xi_1(1 + W)} \prec \frac{c_3\xi_1(1 + W)^2}{1 - c_1 W - 2c\xi_1(1 + W)}, \tag{1.75}$$

dove $c_2$ e $c_3$ sono opportune costanti. La natura stessa della relazione (1.75) implica la convergenza di $W$, e questa a sua volta quella di $\Phi_1$, $\Phi_2$ e $u$.
Rimane dunque provata l'esistenza di un disco di convergenza. La struttura particolare del problema, legata al carattere iperbolico del punto fisso, permette di rafforzare ulteriormente il risultato precedente [42], dimostrando la possibilità di costruire un prolungamento analitico per le soluzioni del problema di coniugazione al di fuori del cerchio di convergenza di Moser. Vale infatti il seguente risultato

**Teorema** *Siano* $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{F}$ *rispettivamente la funzione normalizzante, la forma normale e la mappa avente un punto fisso iperbolico nell'origine. Sia poi* $D_0$ *il disco di convergenza delle serie introdotte. Se definiamo la trasformazione*

$$\mathbf{\Phi}_m \colon D_{-m} \longmapsto \mathbb{R}^2, \quad m \in \mathbb{Z}$$

*tale che*

$$\mathbf{\Phi}_m = \mathbf{F}^{\circ -m} \circ \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{U}^{\circ m}, \quad D_m = \mathbf{U}^m(D_0),$$

*allora é possibile definire un prolungamento analitico di* $\Phi$

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Phi}_m$$

*che risulta analitico in* $\mathbf{D} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} D_m$.
**Dim.**
In primo luogo mostriamo che il prolungamento analitico é ben definito. é chiaro che

$$D_m \bigcap D_n \neq \emptyset \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dunque sull'intersezione si deve mostrare che $\mathbf{\Phi}_n$ e $\Phi_m$ coincidono indipendentemente dal valore di $n, m$. A tal scopo basta mostrare che $\mathbf{\Phi}_{-m}$ coincide con $\mathbf{\Phi}_0$, ma questo é banalmente vero in quanto

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{-m} &= \mathbf{F}^{\circ m} \circ \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{U}^{\circ -m} \\ &= \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{U}^{\circ m} \circ \mathbf{\Phi}^{-1} \circ \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{U}^{\circ -m} = \mathbf{\Phi}\text{'} \end{aligned} \tag{1.76}$$

dove si é fatto uso dell'equazione di coniugazione. Le serie che definiscono le $\mathbf{\Phi}_{-m}$ coincideranno con $\mathbf{\Phi}$ e convergeranno dunque in $D_0$. Si tratta ora di provare che in realtà convergono anche in $D_{-m} \setminus D_0$. Consideriamo ora un quadrato di lato $2X$ inscritto in $D_0$. Utilizzando la proprietà secondo cui se uno sviluppo di Taylor di una funzione di due variabili complesse $\mathbf{\Phi}(z_1, z_2)$ converge per $z_1 = z_{1,0}, z_2 = z_{2,0}$ allora converge assolutamente per $|z_1| \leq z_{1,0}, |z_2| \leq z_{2,0}$ e indicando con $D_{0c}$ il prodotto diretto dei due dischi $|z_1| \leq X, |z_2| \leq X$, si ha che $\Phi_0$ converge in $D_{0c}$. Questo a sua volta implica che non vi sono singolarità neppure in $D_{mc} = \mathbf{U}^{\circ m}(D_{0c})$ per $\mathbf{\Phi}_{-m}$. Considerando ora $D_{m'c}$ il prodotto diretto dei dischi più grandi che si adattano a $D_{mc}$ si ha la convergenza di $\mathbf{\Phi}_m$ in $D_{m'c}$ e dunque il risultato rimane provato. $\square$

Si tratta ora di risolvere l'equazione funzionale (1.65). A tale scopo é vantaggioso utilizzare un approccio di tipo Newton, risolvendo iterativamente le equazioni per $\{\Phi\}_n$ e $\mathbf{u}$ usando approssimazioni razionali, piuttosto che l'usuale metodo perturbativo. In questo modo risulta anche più trasparente la struttura delle singolarità per la funzione di coniugazione. é dunque possibile dimostrare il seguente teorema, adattamento di un simile risultato valido nel caso ellittico non risonante [29].

**Teorema** *Consideriamo le successioni* $\Lambda_n$ e $\Phi_{1,n}$, $\Phi_{2,n}$*definite dalle equazioni*

$$\begin{cases} (U_{1,n} - e^{\alpha})\xi_1 &= \left\{\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{\Phi}}_{n-1})\right\}_1 \\ e^{\Lambda_n}\xi_1 &= U_{1,n} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|\right) \\ \{\Phi_{1,n}\}_k &= \dfrac{\hat{F}_1(\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{\Phi}}_{n-1})}{e^{k\Lambda_n} - e^{\alpha}}\Bigg|_k \\ \{\Phi_{2,n}\}_k &= \dfrac{\hat{F}_2(\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{\Phi}}_{n-1})}{e^{k\Lambda_n} - e^{-\alpha}}\Bigg|_k \end{cases} \tag{1.77}$$

*inizializzate con* $\Lambda_0 = \alpha$ e $\Phi_{1,n} = 0, \Phi_{2,n} = 0$; *queste coincidono con le soluzioni perturbative all'ordine* $n$, *ossia vale*

$$\Phi_{i,n} \equiv \sum_k \{\Phi_{i,n}\}_k = \Phi_i + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+1}\right), \quad U_{1,n} = U_1 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+1}\right), \tag{1.78}$$

*in più si ha*

$$\Lambda_n = \Lambda + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|\right) \tag{1.79}$$

**Dim.**
In primo luogo sottolineiamo che in questa dimostrazione utilizzeremo la

seguente rappresentazione per la forma normale $U$

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}) \equiv (U_1(\boldsymbol{\xi}), U_2(\boldsymbol{\xi})) = \left(e^{\Lambda(\xi_1\xi_2)}\xi_1, e^{-\Lambda(\xi_1\xi_2)}\xi_2\right),$$

dove si é usata

$$\Lambda(\xi_1\xi_2) = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{2j} \left(\xi_1\xi_2\right)^j .$$

In questo caso, inoltre, l'autovalore $\lambda$ verrà espresso come $e^{\alpha}$. La prova procede per induzione. L'enunciato é sicuramente vero per $n = 0, 1$. Supposto che sia valido per un generico valore $n$, mostriamo che vale anche per $n+1$. In primo luogo notiamo che $\hat{F}_{1,2} = \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|\right)^2$. considerando ora l'equazione che definisce $u_n$, si ha che

$$\begin{aligned} U_{1,n+1} &= e^{\alpha} xi_1 + \prod \hat{F}_1(\boldsymbol{\Phi}_n) \\ &= e^{\alpha}\xi_1 + \prod \hat{F}_1(\boldsymbol{\Phi} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+1}\right)) \\ &= e^{\alpha}\xi_1 + \prod \hat{F}_1(\boldsymbol{\Phi}) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+2}\right) \\ &= U_1 + \mathcal{O}\left(\boldsymbol{\xi}|^{n+2}\right) \end{aligned} \tag{1.80}$$

Procediamo ora a dimostrare la tesi per la funzione normalizzante. Considerando le equazioni che definiscono la successione $\Phi_{i,n}$ e l'ipotesi induttiva, si ottiene che all'ordine $n+1$ valgono le relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \textstyle\sum_{k\neq 1} \left(e^{k\Lambda_{n+1}} - e^{\alpha}\right)\{\Phi_{1,n+1}\} &= \left(1 - \prod\right) \hat{F}_1(\Phi_{1,n}, \Phi_{2,n}) \\ \textstyle\sum_{k\neq 1} \left(e^{k\Lambda_{n+1}} - e^{-\alpha}\right)\{\Phi_{2,n+1}\} &= \left(1 - \prod\right) \hat{F}_2(\Phi_{1,n}, \Phi_{2,n}) \end{aligned} \right. \tag{1.81}$$

D'altronde, utilizzando le proprietà delle componenti di Fourier si ottiene che

$$\begin{aligned} &\sum_{k\neq 1} \left(e^{k\Lambda_{n+1}} - e^{\alpha}\right)\{\Phi_{1,n+1}\} = \\ &\quad \left(1 - \prod\right)\left(\Phi_{1,n+1}\left(e^{\Lambda_{n+1}}\xi_1, e^{-\Lambda_{n+1}}\xi_2\right) - e^{\alpha}\Phi_{1,n+1}(\xi_1,\xi_2)\right) \end{aligned} \tag{1.82}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k\neq -1} \left(e^{k\Lambda_{n+1}} - e^{-\alpha}\right)\{\Phi_{2,n+1}\} = \\ &\quad \left(1 - \prod\right)\left(\Phi_{2,n+1}\left(e^{\Lambda_{n+1}}\xi_1, e^{-\Lambda_{n+1}}\xi_2\right) - e^{\alpha}\Phi_{2,n+1}(\xi_1,\xi_2)\right) \end{aligned} \tag{1.83}$$

A questo punto uguagliando i membri di sinistra delle precedenti relazioni ed aggiungendo la quantità $(1-\prod)\,\Phi_{i,n+1}(e^{\alpha}\xi_1, e^{-\alpha}\xi_2)$ si ricava l'espressione

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{1,n+1} = &\left(1-\prod\right)\hat{F}_1\left(\Phi_{1,n},\Phi_{2,n}\right) + \\ &\left(1-\prod\right)\left(\Phi_{1,n+1}\left(e^{\alpha}\xi_1, e^{-\alpha}\xi_2\right) - \Phi_{1,n+1}\left(e^{\Lambda_{n+1}}\xi_1, e^{-\Lambda_{n+1}}\xi_2\right)\right)\end{aligned} \tag{1.84}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{2,n+1} = &\left(1-\prod\right)\hat{F}_2\left(\Phi_{1,n},\Phi_{2,n}\right) + \\ &\left(1-\prod\right)\left(\Phi_{2,n+1}\left(e^{\alpha}\xi_1, e^{-\alpha}\xi_2\right) - \Phi_{2,n+1}\left(e^{\Lambda_{n+1}}\xi_1, e^{-\Lambda_{n+1}}\xi_2\right)\right)\end{aligned} \tag{1.85}$$

Osservando poi che valgono le seguenti relazioni (ottenute utilizzando direttamente le equazioni (1.77)

$$\Phi_{i,n+1} = \Phi_{i,n} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^n\right) \quad \Longrightarrow \Phi_{i,n+1} = [\Phi_i]_{\leq n} + \mathcal{O}\left(|\xi|^n\right)$$

e che $e^{\pm\Lambda_{n+1}}\xi_1 = e^{\pm\alpha}\xi_1 + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^3\right)$, otteniamo infine

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{1,n+1} = &\left(1-\prod\right)\hat{F}_1\left(\Phi_1,\Phi_2\right) + \\ &\left(1-\prod\right)\left(\Phi_1\left(e^{\alpha}\xi_1, e^{-\alpha}\xi_2\right) - \Phi_1\left(e^{\Lambda}\xi_1, e^{-\Lambda}\xi_2\right)\right) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+2}\right)\end{aligned} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{2,n+1} = &\left(1-\prod\right)\hat{F}_2\left(\Phi_1,\Phi_2\right) + \\ &\left(1-\prod\right)\left(\Phi_2\left(e^{\alpha}\xi_1, e^{-\alpha}\xi_2\right) - \Phi_2\left(e^{\Lambda}\xi_1, e^{-\Lambda}\xi_2\right)\right) + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^{n+2}\right),\end{aligned} \tag{1.87}$$

ma questo significa che le $\Phi_{i,n+1}$ soddisfano all'equazione omologica all'ordine $n+2$, coincidendo con la soluzione perturbativa fino a tale ordine. Rimane dunque dimostrato l'asserto. □

Come ultima considerazione, il teorema di Moser può essere generalizzato al caso in cui la mappa **F** abbia una dipendenza da un parametro. In questa situazione si dimostra che le forme normali dipendono in maniera uniforme da questo parametro. Si prova [43] infatti il seguente risultato

**Teorema** *Sia*

$$\mathbf{F}_\epsilon \colon U \subset \mathbb{C}^2 \longmapsto \mathbb{C}^2 \tag{1.88}$$

*un diffeomorfismo simplettico che dipende analiticamente dal parametro $\epsilon$ nell'intorno di $\epsilon = 0$ e avente la forma*

$$\mathbf{F}_\epsilon(\boldsymbol{\xi}) = \Lambda\boldsymbol{\xi} + \epsilon^\alpha f(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon^{\alpha+1} g(\boldsymbol{\xi}, \epsilon), \tag{1.89}$$

*dove $f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \epsilon) = 0, Df(\mathbf{0}) = Dg(\mathbf{0}, \epsilon) = 0$ e $\lambda = 1 + a\epsilon^\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+1})$ con $a$ e $\alpha$ costanti positive. Sotto queste condizioni é possibile determinare un $\epsilon_0$ e un $r_0$, indipendente da $\epsilon$, in modo che per $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ la funzione normalizzante $\boldsymbol{\Phi}_\epsilon$ e la forma normale $\mathbf{U}_\epsilon$ siano analitiche in un disco di raggio $r_0$.*

## 1.3 Singolarità della funzione di coniugazione

Come visto nel paragrafo precedente, nel caso iperbolico le serie che definiscono la funzione normalizzante e la forma normale sono convergenti in un intorno dell'origine. Questo significa che si avranno delle singolarità che limitano il dominio di analiticità delle funzioni considerate. Lo studio di queste singolarità può essere portato a termine in modo diretto considerando le equazioni (1.77). Prima di entrare in dettaglio vorremmo però sottolineare il tipo di relazione che si ha tra lo sviluppo in componenti di Fourier e l'usuale sviluppo sulla base costituita dai polinomi omogenei. Supponiamo di indicare con

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} [\Psi]_n(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \Psi_{n,j} \xi_1^j \xi_2^{n-j}. \tag{1.90}$$

In questo caso se utilizziamo coordinate polari del tipo

$$\begin{cases} \xi_1 &= \sqrt{\rho} e^{\theta} \\ \xi_2 &= \sqrt{\rho} e^{-\theta} \end{cases}$$

allora la relazione tra lo sviluppo (1.90) e le componenti di Fourier di $\Psi$ é data da

$$\{\Psi\}_k = e^{k\theta} \rho^{\frac{|k|}{2}} A_k(\rho) \quad \text{dove} \quad A_k(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \Psi_{|k|+2n, n+\frac{k+|k|}{2}}. \tag{1.91}$$

Il motivo per cui si sono introdotte coordinate di questo tipo é che risultano adattate alla particolare dinamica studiata. In questo caso, contrariamente alle usuali coordinate polari, $\theta$ rappresenta un angolo di rotazione iperbolica. La dipendenza dall'invariante del moto $\rho$ risulta dunque in evidenza. Per quanto visto nel precedente paragrafo, la funzione normalizzante può essere approssimata tramite funzioni razionali il cui denominatore é dato da $D(\rho) = e^{k[\Lambda]_{\leq n}(\rho)} - e^{\alpha}$, dove $e^{[\Lambda]_{\leq n}(\rho)}$ rappresenta la forma normale $\mathbf{U}$ e $k$ l'ordine della componente di Fourier di $\{\Phi_i\}_k$. Per evitare confusioni nel seguito, sottolineiamo che avendo rappresentato $\mathbf{U} \equiv \left(e^{\Lambda(\xi_1\xi_2)}\xi_1, e^{-\Lambda(\xi_1\xi_2)}\xi_2\right)$ con $\Lambda(\xi_1\xi_2) = \alpha\sum_{j=1}^{\infty}\Lambda_{2j}(\xi_1\xi_2)^j$, il termine $\Lambda_{2j}$ corrisponde ad un ordine perturbativo $2j+1$. Le singolarità di queste approssimazioni razionali saranno perciò date dalle soluzioni di

$$e^{k[\Lambda]_{\leq n}(\rho)} - e^{\alpha} = 0. \tag{1.92}$$

Osservazione che le due componenti di $\mathbf{\Phi}$ hanno le stesse singolarità, solo vengono scambiati i ruoli tra componenti di Fourier di ordine positivo e negativo. L'equazione (1.92) può essere riscritta nella seguente maniera

$$[\Lambda]_{\leq n}(\rho) = \frac{\alpha}{k} + \frac{2\pi mi}{k} \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.93}$$

dove si é tenuto conto della periodicità dell'esponenziale introducendo il termine immaginario. Ovviamente soluzioni reali di (1.93) si avranno solo nel caso $m = 0$. Una prima stima della posizione dei poli si ottiene considerando l'ordine perturbativo più basso. In questo caso si ha che

$$\Lambda_2\rho = \left(\frac{1-k}{k}\right)\alpha + \frac{2\pi mi}{k} \implies \rho = \left(\frac{1-k}{k}\right)\frac{\alpha}{\Lambda_2} + \frac{2\pi mi}{\Lambda_2 k}. \tag{1.94}$$

Dunque i poli giacciono su rette nel piano complesso. Queste rette verticali sono comprese nella striscia

$$-\frac{1}{2} \leq \Lambda_2\,\Im\rho \leq \frac{1}{2}$$

Incrementando il valore di $n$, le soluzioni di (1.93) possono essere calcolate solo con metodi numerici. Osserviamo un fatto rilevante. La posizione delle singolarità calcolate tramite la (1.93) dipende chiaramente sia da $n$ che dalla componente di Fourier $k$ considerata, ma questa relazione é di tipo diverso nei due casi. Infatti le soluzioni dipenderanno in maniera regolare da $k$, quindi, a partire da un certo ordine $\hat{k}$, le singolarità si sposteranno di poco per ulteriori incrementi di $k$. Il comportamento in funzione dell'ordine perturbativo considerato, invece, non é determinabile in maniera elementare.
Illustreremo i fatti descritti utilizzando un esempio specifico. Consideriamo una mappa $\mathbf{F}$ del tipo

$$\begin{cases} \xi_1' &= \lambda\left[\xi_1 - \frac{\nu}{2}(\xi_1+\xi_2)^2\right] \\ \\ \xi_2' &= \lambda^{-1}\left[\xi_2 + \frac{\nu}{2}(\xi_1+\xi_2)^2\right] \end{cases}$$

dove $\lambda, \nu$ sono due parametri aventi la seguente espressione

$$\lambda = 1 + \sin^2\frac{\omega}{2} + 2\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\omega}{2}}, \qquad \nu = \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\omega}{2}}}, \quad \omega \in [0,\pi]$$

La ragione di questa scelta diverrà chiara nel prossimo capitolo.
é immediato vedere che l'origine é un punto fisso iperbolico per ogni valore di $\omega$. Sotto queste condizioni possiamo risolvere l'equazione funzionale (1.1). All'ordine più basso si avrà la seguente espressione per i coefficienti dello sviluppo di $[\mathbf{\Phi}]_2$

$$\begin{cases} \Phi_{1,j} &= -\lambda\dfrac{\nu}{2}\dbinom{2}{j}\dfrac{1}{\lambda^{2(j-1)}-\lambda} \\ \\ \Phi_{2,j} &= -\lambda^{-1}\dfrac{\nu}{2}\dbinom{2}{j}\dfrac{1}{\lambda^{2(j-1)}-\lambda^{-1}} \end{cases}$$

Analogamente si può determinare in maniera esplicita $\Lambda_2$, ottenendo

$$\Lambda_2 = -\frac{\nu^2}{2}\left(\frac{2\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} + \frac{1\lambda^{-1}}{\lambda^2-\lambda^{-1}} - \frac{2\lambda}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda}\right). \tag{1.95}$$

Come si diceva i valori dei $\rho$ possono essere determinati solo numericamente. Lavorando sulla mappa precedente, fissando il valore del parametro $\omega/2\pi = 0.255$, si sono calcolati i coefficienti della funzione $\Lambda$ e di $\mathbf{\Phi}$ e quindi si sono determinate le soluzioni della (1.93) per differenti valori di $n$ e $k$. Per completezza si é fatto variare anche il parametro $m$. In tutti i risultati che saranno presentati nel seguito, ci si riferisce a $-10 \leq m \leq 10$.
Dal calcolo delle serie, si nota che $\Lambda_{2j} < 0$ per ogni valore di $j$. Questo significa che si avranno sempre soluzioni reali, anche nel caso in cui $n$ sia pari. Inoltre é immediato vedere che, mentre per le componenti di Fourier con $k > 0$ la distanza delle singolarità dall'origine cresce con $k$, nel caso di componenti di ordine negativo, si ha il comportamento opposto. I risultati ottenuti sono riportati nella figura 1.1. Nei due grafici nella parte superiore della figura 1.1 si sono rappresentate le soluzioni di (1.93) nel piano complesso di $\rho$ fissando il valore di $k = 3$ e facendo variare $n$. Si vede chiaramente come incrementando $n$ da 5 a 10, si abbia una variazione della distanza minima delle singolarità dall'origine. Si é anche verificato, analizzando il caso $n = 15$, che esista una sorta di cerchio limite cui le singolarità tendono. Si può notare anche che si hanno sempre delle soluzioni reali come detto in precedenza. Nella parte inferiore della medesima figura sono mostrati due grafici in cui si é considerata una componente di Fourier negativa $k = -3$. é

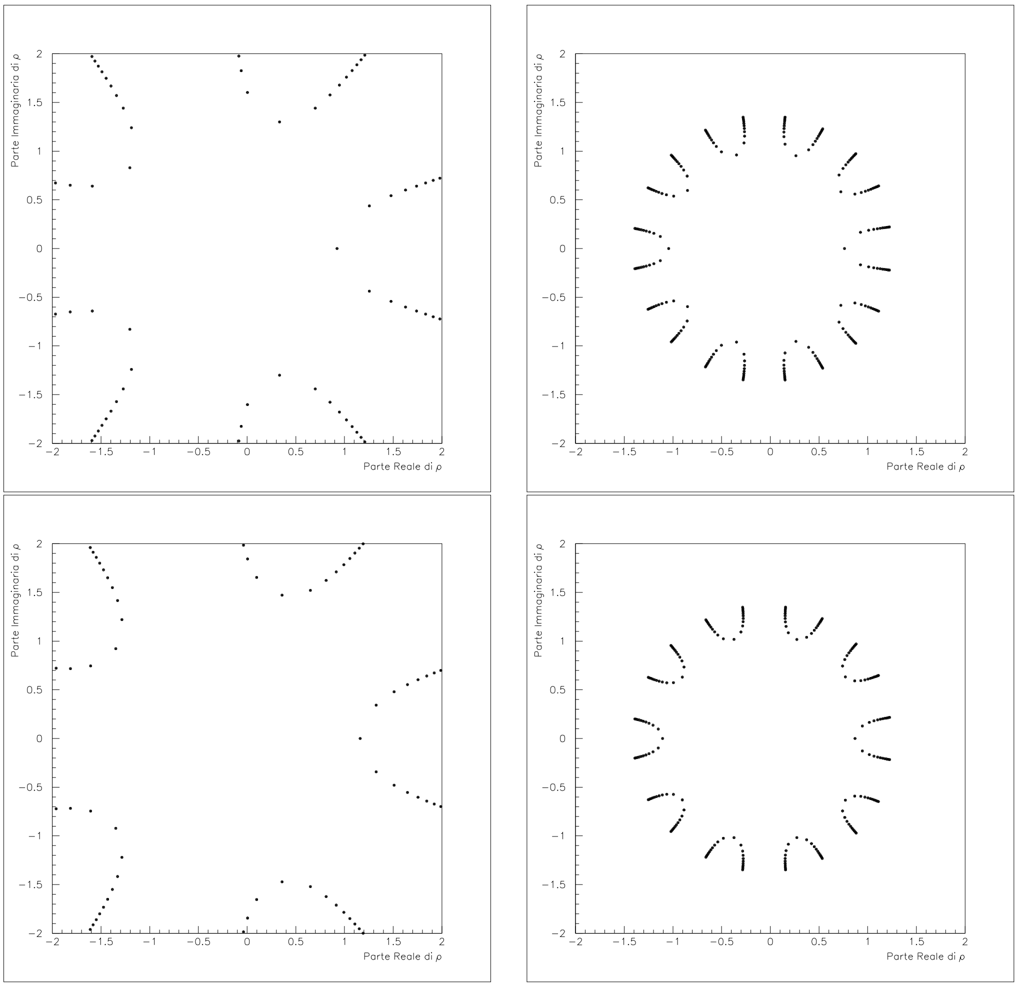



Figura 1.1: Posizioni delle singolarità della funzione normalizzante per differenti valori di $n$. Nelle figure in alto si ha $k = 3$ e l'ordine perturbativo é rispettivamente 11 (parte sinistra) e 21 (parte destra). Nella parte inferiore si é mostrata la stessa situazione relativa a $k = -3$.

immediato vedere che in questo caso le soluzioni dell'equazione (1.93) sono spostate all'esterno rispetto al caso considerato in precedenza.
Per quanto riguarda la dipendenza da $k$, i risultati sono invece mostrati in figura 1.2. In questo caso si é fissato $n = 5$ e si é fatto variare $k$, ponendolo uguale a 5 (parte sinistra) e 15 (parte destra). Nella parte inferiore sono poi mostrati i grafici relativi agli stessi valori di $k$, ma col segno cambiato. Quanto affermato in precedenza é manifesto in questi grafici: la dipendenza da $k$ delle singolarità é veramente debole. In più mentre le soluzioni si allontanano dall'origine all'aumentare di $k$ nella parte superiore di figura 1.2, nella parte inferiore accade il fenomeno opposto, proprio a causa del segno delle componenti di Fourier. L'addensarsi dei punti in dipendenza dell'aumento del valore di $k$, ricordiamo che i vari punti corrispondono ai differenti valori di $m$, é una ovvia conseguenza di (1.93). Per concludere vorremmo far notare il grado di precisione che si può raggiungere nella stima della posizione dei poli per la funzione di coniugazione utilizzando l'ordine più basso. Sempre nel caso in cui $\omega/2\pi = 0.255$ si ha che

$$\alpha \approx 1.18904 \quad \Lambda_2 \approx -0.25862.$$

Dunque la posizione del polo dovrebbe essere stimata da $\rho \approx 2.29$ considerando $k = 2$. Dai grafici, al contrario, si desume un valore $\rho \approx 0.75$. Non é dunque ipotizzabile l'uso di questa approssimazione per stimare il raggio di convergenza di $\mathbf{\Phi}$. D'altronde, anche dovendo ricorrere ad ordini più elevati per avere delle stime affidabili del dominio di convergenza di $\mathbf{\Phi}$, il metodo presentato é sicuramente più efficiente di altri. Infatti se consideriamo l'usuale criterio di Hadamard per stimare $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \left[ \limsup_{j \to +\infty} |\Phi_j|^{\frac{1}{j}} \right]^{-1}.$$

é necessario spingersi fino a valori di $j = 200$ per ottenere risultati in accordo con quelli presentati.
Per quanto riguarda il valore del residuo corrispondente alle singolarità di cui si é parlato, questo può essere determinato utilizzando la (1.91) e risulta essere dato approssimativamente da

$$Res[\{\Phi\}_k] \approx e^{k\theta} \rho A_k(\rho). \tag{1.96}$$

## 1.4 Varietà invarianti

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come, nel caso di un punto fisso iperbolico, la dinamica di una mappa non lineare sia analiticamente coniugata con quella di una forma normale integrabile: gli integrali del moto per

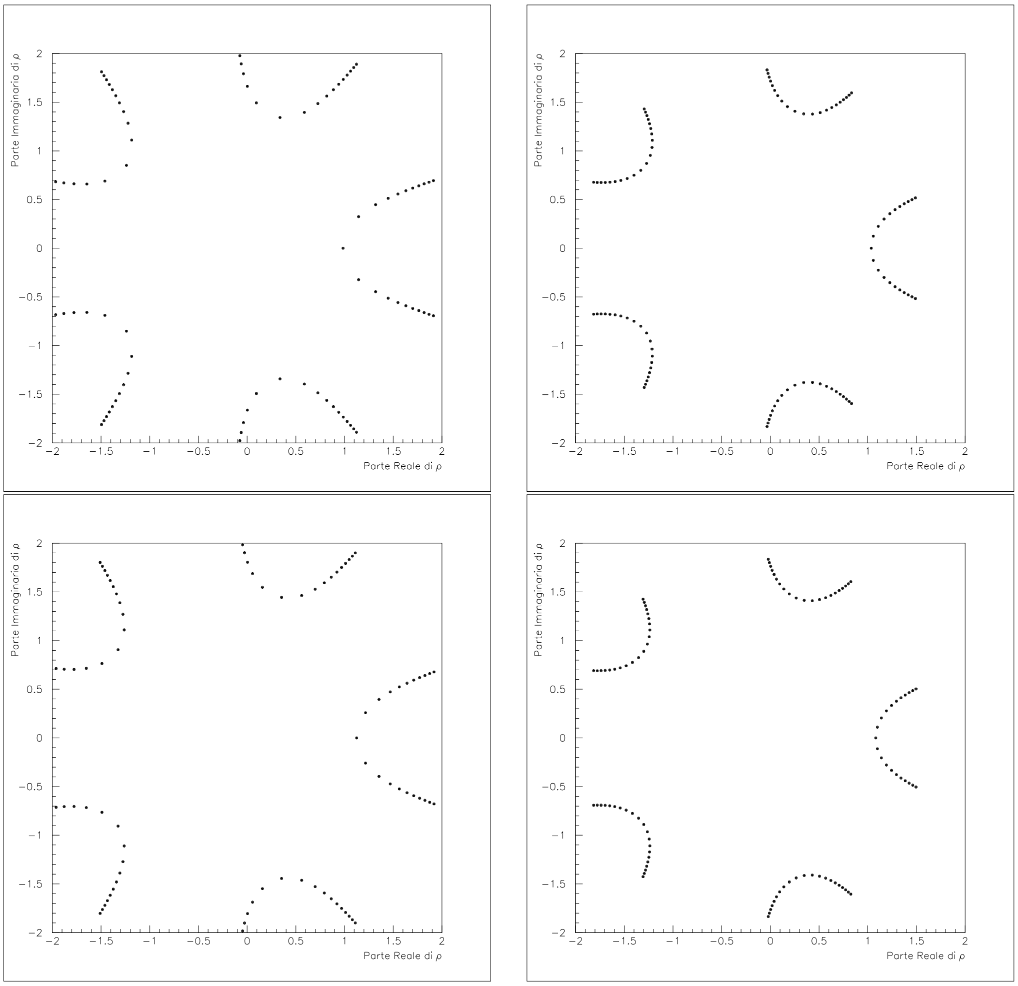



Figura 1.2: Posizioni delle singolarità della funzione normalizzante per differenti valori di $k$. L'ordine perturbativo é stato fissato a 11 in tutte le situazioni mostrate. Nelle figure in alto si ha $k = 5$ (parte sinistra), $k = 15$ (parte destra). Nella parte inferiore si sono considerate componenti negative con $k = -5$ e $k = -15$.

quest'ultima sono varietà non compatte (iperboli) nelle variabili normali. Un ruolo particolare hanno gli assi coordinati $\xi_1 = 0$ e $\xi_2 = 0$. Infatti la dinamica diventa puramente lineare essendo

$$\xi_1' = \lambda \xi_1, \quad \xi_2' = \lambda^{-1} \xi_2 \tag{1.97}$$

si ha quindi un moto espansivo nel primo caso e contrattivo nel secondo. Dunque lungo l'asse $\xi_2$ si ha che iterando tramite la mappa inversa ci si approssima all'origine (che é il punto fisso iperbolico), mentre nel secondo ciò avviene usando la mappa diretta. Questo fatto é generale nell'intorno di punti fissi iperbolici. Nel caso lineare, infatti, se $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ dove $GL(\mathbb{R}^n)$ é il gruppo delle applicazioni lineari in $\mathbb{R}^n$ aventi l'origine come punto fisso iperbolico, si può mostrare che esistono $E^s, E^u \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ e $\lim_{n\to\infty} A^{-n}(x) = 0 \quad \forall x \in E^u$, mentre $\lim_{n\to\infty} A^n(x) = 0 \quad \forall x \in E^s$. Anche nel caso generale di un diffeomorfismo non lineare é possibile definire degli insiemi analoghi a $E^s, E^u$, anche se, come risulta ovvio, non saranno più semplici spazi lineari. A tal scopo si pone la seguente definizione.

*Definizione* Dato un diffeomorfismo $\mathbf{F}$ di $\mathbb{R}^n$ con un punto fisso iperbolico $p$ si definiscono *varietà stabile e varietà instabile di* $p$ gli insiemi

$$\mathcal{W}^s(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \lim_{n\to\infty} \mathbf{F}^{\circ n}(x) = p \right\}$$

$$\mathcal{W}^u(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \lim_{n\to-\infty} \mathbf{F}^{\circ n}(x) = p \right\}$$

Una proprietà che risulta immediata dalle definizioni precedenti, é l'invarianza di $\mathcal{W}^{u,s}(p)$ sotto l'azione di $\mathbf{F}$. Inoltre é facile vedere che vi é una dualità che lega le varietà di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}^{-1}$, infatti $\mathcal{W}^s(p)$ relativa a $\mathbf{F}$ coincide con $\mathcal{W}^u(p)$ relativa a $\mathbf{F}^{-1}$ ($\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}^{-1}$ hanno il medesimo punto fisso $p$ con la medesima stabiltà). Per questo motivo tutti i risultati verranno enunciati solo per $\mathcal{W}^s(p)$ essendo questi banalmente estendibili anche a $\mathcal{W}^u(p)$.
Altre importanti conseguenze meno evidenti delle definizioni sono raggruppate nel seguente teorema.

**Teorema** *Sia* $\mathbf{F}$ *un diffeomorfismo con un punto fisso iperbolico* $p$. *Sia inoltre* $A = d\mathbf{F}(p)$ *la sua parte lineare e* $E^s, E^u$ *la decomposizione di* $\mathbb{R}^n$ *indotta da* $A$. *Allora indichiamo con* $D_\beta$ *un disco di raggio* $\beta$ *sufficientemente piccolo e sia*

$$\mathcal{W}^s_\beta(p) = \{x \in D_\beta | \mathbf{F}^{\circ n}(x) \in D_\beta, \forall n \geq 0\}$$

*la cosiddetta varietà stabile locale. Sotto queste ipotesi si ha che*

**i)**

$$\mathcal{W}^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} \mathbf{F}^{\circ -n}\left(\mathcal{W}^s_\beta(p)\right).$$

**ii)** *Esiste una $\boldsymbol{\varphi}^s \colon E^s \longmapsto \mathbb{R}^n$ con la stessa regolarità di $\mathbf{F}$ con la proprietà $\boldsymbol{\varphi}^s\,(E^s) = \mathcal{W}^s(p)$. Dunque $\mathcal{W}^s(p)$ é una varietà immersa in $\mathbb{R}^n$. In più vale la relazione $dim\,(\mathcal{W}^s(p)) = dim\,(E^s)$.*

**iii)** *Lo spazio tangente a $\mathcal{W}^s(p)$ in $p$ coincide con $E^s$.*

Se consideriamo il caso bidimensionale, dal teorema precedente si ha che $\mathcal{W}^{u,s}(p)$ sono varietà unidimensionali (curve) di $\mathbb{R}^2$; inoltre lo spazio tangente nel punto iperbolico coincide con le direzioni generate dagli autovettori della parte lineare della mappa. Per quel che concerne la costruzione di detti insiemi, si hanno essenzialmente due approcci differenti. Il primo si fonda sulla prima proprietà enunciata nel precedente teorema. La varietà completa può essere costruita a partire da una sua parte espandendola utilizzando $\mathbf{F}^{-1}$. Il problema si sposta ora sul modo di determinare $\mathcal{W}^s_\beta(p)$. Per la terza proprietà gli autovettori della parte lineare di $\mathbf{F}$ sono tangenti alla varietà nel punto iperbolico. Dunque se $\beta$ é sufficientemente piccolo, essi possono essere identificati con $\mathcal{W}^s_\beta(p)$. In linea di principio si potrebbero considerare approssimazioni di ordine superiore che possono essere ottenute utilizzando le forme normali. Nelle coordinate normali le varietà invarianti sono rappresentate dagli assi. Se ora costruiamo la controimmagine di questi tramite la $\mathbf{\Phi}$ otteniamo l'espressione voluta per $\mathcal{W}^s_\beta(p)$. é opportuno sottolineare che in realtà lavorando con un troncamento della funzione normalizzante, si avrà un'espressione approssimata per la varietà locale. D'altronde l'errore commesso decresce esponenzialmente con il numero $n$ di iterazioni di $\mathbf{F}$ e quindi il risultato non dipende in maniera critica dall'ordine usato per approssimare le varietà locale. Il secondo metodo, invece, determina le funzioni $\boldsymbol{\varphi}^{s,u}$ attraverso il suo sviluppo in serie. Ancora una volta la teoria delle forme normali fornisce la soluzione a questo problema. Infatti, come già detto, la funzione normalizzante trasforma le varietà di $\mathbf{U}$ in quelle della mappa di partenza. Questo significa che $\boldsymbol{\varphi}^{s,u}$ sono date da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^u(\xi) &= \mathbf{\Phi}\left(\exp(\xi - \xi_0), 0\right), \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}\,\xi < \mathrm{Re}\,\xi_0 + \log r \\
\boldsymbol{\varphi}^s(\xi) &= \mathbf{\Phi}\left(0, \exp(\xi_0' - \xi)\right), \quad \text{per} \quad \mathrm{Re}\,\xi > \mathrm{Re}\,\xi_0' - \log r
\end{aligned}$$

dove $r$ é il raggio del disco di convergenza di $\mathbf{\Phi}$. Da questo fatto parrebbe che, essendo $\mathbf{\Phi}$ convergente in un disco, le equazioni precedenti forniscano solo una parte della varietà, e precisamente $\mathcal{W}^{s,u}_r(p)$. In realtà quanto detto a proposito delle proprietà di convergenza di $\mathbf{\Phi}$ e delle sue singolarità, suggerisce che sia possibile estenderle indefinitamente lungo gli assi coordinati. Utilizzando l'equazione funzionale (1.1) é immediato verificare che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}^u(\xi)) &= \boldsymbol{\varphi}^u(\xi + \log\lambda) \\ \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}^s(\xi)) &= \boldsymbol{\varphi}^s(\xi + \log\lambda) \end{aligned} \tag{1.98}$$

Se dunque $\mathbf{F}$ é una funzione intera, la (1.98) permette di estendere $\boldsymbol{\varphi}^{s,u}(\xi)$ al di là del dominio di definizione iniziale, in definitiva deve essere intera.
Risolto il problema di costruire le varietà invarianti, analizziamo la struttura dell'intersezione di $\mathcal{W}^{u,s}(p)$. Chiaramente $\mathcal{W}^s(p)\bigcap\mathcal{W}^u(p)$ é sempre non vuoto, essendo $p$ in comune alle due varietà. Introduciamo ora una nuova definizione.

*Definizione* Sia $x \in \mathcal{W}^s(p)\bigcap\mathcal{W}^u(q)$, se $p \neq q$ allora $x$ si dice *punto eteroclinico*, altrimenti é detto *punto omoclinico*.
In questo paragrafo considereremo solo punti omoclinici, ma la discussione che faremo può essere generalizzata al caso eteroclinico.
A causa dell'invarianza di $\mathcal{W}^{u,s}(p)$ si ha che se $q$ é un punto omoclinico, allora anche $\mathbf{F}^{\circ n}(q)$ é un punto omoclinico per ogni $n$ intero. Dunque si ha che la cardinalità di $\mathcal{W}^s(p)\bigcap\mathcal{W}^u(p)$ é uno o infinito. Non sono possibili valori intermedi. Se in più richiediamo che $q$ sia un punto *trasversalmente omoclinico* (il che significa che $\mathcal{W}^s(p)$ e $\mathcal{W}^u(p)$ non sono tangenti in $q$), allora, essendo $\mathbf{F}$ un diffeomorfismo, tutta l'orbita di $q$ sarà costituita da punti trasversalmente omoclinici. In questo caso si ha l'insorgere di tutta una serie di fenomeni estremamente interessanti. In presenza di punti trasversalmente omoclinici si producono delle oscillazioni di una varietà attorno all'altra; le cosiddette *oscillazioni omocliniche*. Il risultato finale é che una varietà tende ad approssimare globalmente l'altra. Specializzandoci al caso di $\mathbf{F}$ simplettica, abbiamo che le aree sono conservate dalla dinamica della mappa. Se consideriamo dunque la regione di piano racchiusa dalle due varietà tra due intersezioni successive $\mathbf{F}^{\circ n}(q)$ e $\mathbf{F}^{\circ n+1}(q)$, questa si deve mantenere costante. D'altronde, poichè si ha $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{F}^{\circ n}(x) = p$, la distanza tra due intersezioni successive decresce, e la velocità é asintoticamente esponenziale. Questo impone che l'ampiezza delle oscillazioni cresca in proporzione in modo da mantenere l'area costante. Questo fenomeno é chiaramente mostrato nella figura 1.3. Utilizzando il metodo analitico descritto abbiamo determinato $\boldsymbol{\varphi}^{u,s}(\xi)$ per la mappa (1.3) con $\omega/2\pi = 0.24$. Sono chiaramente visibili alcune delle intersezioni omocliniche e i fenomeni descritti in precedenza.
Le intersezioni tra le due varietà possono essere classificate e raggruppate in categorie differenti. Nel complesso il risultato di questo fenomeno é l'insorgenza di una zona caotica nello spazio delle fasi. In questa regione non esiste

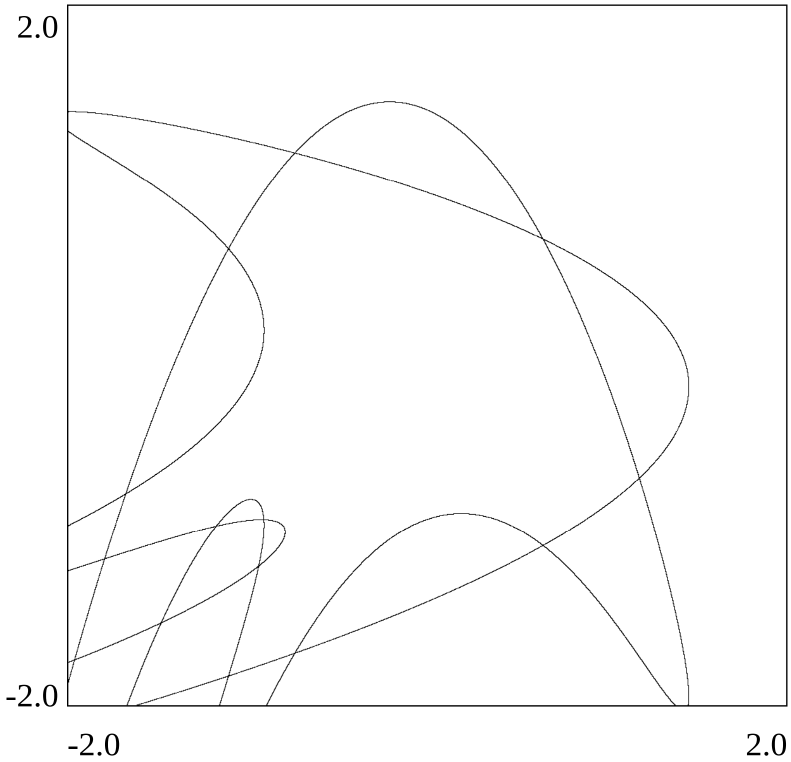



Figura 1.3: Varietà invarianti per la mappa quadratica.

un integrale primo del moto analitico. é infatti dimostrato che la dinamica di **F** ristretta alle varietà invarianti é coniugata con uno *shift di Bernoulli* [44], un sistema dinamico che é considerato il prototipo di comportamento caotico. Da quanto detto risulta cruciale poter determinare se in un sistema dinamico si verificano le condizioni per l'insorgenza di intersezioni trasversalmente omocliniche. Nel caso hamiltoniano Melnikov [45]) ha dimostrato un teorema in cui si danno delle condizioni per l'esistenza di punti trasversalmente omoclinici.

**Teorema** *Sia dato il sistema hamiltoniano del tipo*

$$\mathcal{H}(x,p;t) = \mathcal{H}_0(x,p) + \epsilon\mathcal{H}_1(x,p;t) \tag{1.99}$$

*con $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ funzioni analitiche di $x, p$ e periodiche in $t$ con periodo uno. In più si supponga che l'origine sia un punto fisso iperbolico per $\mathcal{H}_0$. Le varietà invarianti di $\mathcal{H}_1$ sono vicine ordine $\epsilon$ a quelle del problema imperturbato e* *avranno intersezioni trasversalmente omocliniche se la funzione*

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \right] (x_0(t-t_0), p_0(t-t_0)) dt, \quad (1.100)$$

*ha zeri semplici. In* (1.100) *si é indicato con* $x_0(t-t_0), p_0(t-t_0)$ *l'equazione della separatrice di* $\mathcal{H}_0$.

**Dim.**

In primo luogo consideriamo $x^s(t, t_0; \epsilon), x^u(t, t_0; \epsilon)$, le espressioni delle varietà invarianti per $\mathcal{H}$. In questo caso si ha che

$$\begin{cases} x^s(t, t_0; \epsilon) &= x_0(t, t_0) + \epsilon x_1^s(t, t_0; \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{per} \quad t \in [t_0, \infty) \\ x^u(t, t_0; \epsilon) &= x_0(t, t_0) + \epsilon x_1^u(t, t_0; \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{per} \quad t \in (-\infty, t_0] \end{cases}, \quad (1.101)$$

e le analoghe relazioni per $p^s, p^u$. Introducendo la notazione

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_i \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial p} \end{pmatrix}, \text{ con } i = 0, 1 \quad Q_{\mathcal{H}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial x \partial p} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial x \partial p} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial p^2} \end{pmatrix},$$

le equazioni di hamilton scritte nella forma $\mathbf{x}' = \mathbf{f}_0 + \epsilon \mathbf{f}_1$ forniscono al primo ordine in $\epsilon$ il seguente risultato

$$\frac{d\mathbf{x}_1^{s,u}}{dt} = Q_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1^{s,u} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0). \quad (1.102)$$

Definiamo ora la distanza tra le due varietà stabile e instabile. Per far ciò considereremo la proiezione di $\mathbf{x}^u - \mathbf{x}^s$ lungo la direzione perpendicolare alla tangente alla varietà del problema imperturbato

$$\begin{aligned} d(t, t_0) \equiv \mathbf{f}_0 \times (\mathbf{x}^u - \mathbf{x}^s) = & \quad (1.103) \\ \epsilon \mathbf{f}_0 \times (\mathbf{x}_1^u - \mathbf{x}_1^s) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) = \epsilon \left(\Delta^u - \Delta^s\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right). & \end{aligned}$$

Partendo dalla relazione precedente é possibile derivare una equazione differenziale per $\Delta^s, \Delta^u$. Differenziando rispetto a $t$ si ottiene

$$\frac{d\Delta^{u,s}}{dt} = Tr\left(Q_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_0)\right) \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0) \times \mathbf{x}_1^{u,s} + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0) \times \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0), \quad (1.104)$$

dove si é fatto uso dell'identità

$$A\mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times A\mathbf{v} = Tr\,(A)\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (1.105)$$

valida per generici vettori di $\mathbb{R}^2$. Se ora integriamo la (1.104) tra $t_0$ e $+\infty$ nel caso di $\Delta^s$ si ottiene

$$-\Delta^s(t_0, t_0) = \int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{f}_0 \times \mathbf{f}_1 dt \tag{1.106}$$

tenendo conto che $\Delta^s(+\infty, t_0) = 0$ in quanto $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(+\infty)) = 0$ e che, in più vale $Tr\,(Q_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_0)) = 0$. Analogamente per $\Delta^u$ integrato tra $-\infty$ e $t_0$ si ha

$$\Delta^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{f}_0 \times \mathbf{f}_1 dt. \tag{1.107}$$

In definitiva si ha che

$$d(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_0 \times \mathbf{f}_1 dt = M(t_0). \tag{1.108}$$

Quindi all'ordine $\epsilon$ $M(t_0)$ é la distanza tra le due varietà. Uno zero semplice di $M(t_0)$ implica dunque una intersezione trasversa. $\square$

Ancora una volta sottolineiamo che, come nel caso del teorema di convergenza delle forme normali iperboliche, non esiste un analogo di questi risultati in dimensioni superiori. Per quanto riguarda il teorema di Melnikov, ne daremo una applicazione nel prossimo capitolo, dove tratteremo diffusamente della mappa quadratica, per mostrare la non integrabilità di questo modello.

# Capitolo 2

# Analisi di Stabilità per Mappe Simplettiche

In questo capitolo si affronta uno dei problemi centrali di questa dissertazione: la caratterizzazione dell'insieme dello spazio delle fasi in cui si hanno moti confinati nel caso di un sistema hamiltoniano ad un grado e mezzo di libertà. Più precisamente, prenderemo in considerazione una classe di sistemi hamiltoniani aventi un punto fisso ellittico nell'origine e derivabili da una funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p; t)$ del tipo

$$\mathcal{H}(x, p; t) = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} + G(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \tag{2.1}$$

dove $G(x) = \sum_{k=3}^{\infty} g_k x^k$. Detti sistemi sono di particolare rilevanza fisica in quanto, con una opportuna scelta della forma della parte non lineare $G(x)$, possono rappresentare la dinamica di una particella carica in un elemento magnetico di una macchina acceleratrice. L'analisi di (2.1), pur riferendosi ad un caso semplificato rispetto a quello reale, può essere quindi di notevole rilevanza nello studio del problema di stabilità dei fasci in un acceleratore circolare. La regione dello spazio delle fasi in cui il moto é confinato, indicata anche come *bacino di stabilità* o, utilizzando un termine preso a prestito dalla fisica degli acceleratori *apertura dinamica*, può essere facilmente analizzato utilizzando semplici strumenti numerici. Con questo approccio puramente computazionale, peraltro, é estremamente complicato giungere alla determinazione dei fenomeni che determinano la topologia di questo insieme. Il metodo che proponiamo sfrutta i concetti introdotti nel precedente capitolo (forme normali iperboliche e varietà invarianti) e permette di avere una migliore comprensione delle cause che determinano la stabilità o meno di una regione dello spazio delle fasi.

## 2.1 Proprietà della mappa quadratica

Partendo dalla (2.1) possiamo determinare immediatamente le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{x} & = & p \\ \dot{p} & = & -\omega^2 x - \dot{G}(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \end{cases} \tag{2.2}$$

che possono essere integrate banalmente a causa della presenza della funzione $\delta$ periodica. Otterremo dunque una mappa del tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega T & -\sin\omega T \\ \sin\omega T & \cos\omega T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{g(x)}{\omega} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

dove si é posto $y = \frac{p}{\omega}$ e $g(x) = -G'(x)$.
Consideriamo il semplice caso un cui

$$G(x) = -\omega \frac{x^3}{3} .$$

Ponendo $T = 1$, la sezione di Poincaré (2.3) diventa dunque

$$H_2(\omega)\colon \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + x^2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

La mappa (2.4) é anche nota come *mappa di Hénon* [23] in quanto introdotta e analizzata numericamente da Hénon nel 1969. Il motivo che spinge a studiare questa mappa, é dovuto non solo alla sua semplicità e alla facilità ad essere studiata numericamente, ma soprattutto al fatto che presenta una dinamica estremamente ricca, presentando allo stesso tempo sia regimi regolari che caotici. é dunque un modello che ben si presta a fungere da prototipo per sistemi non integrabili più complessi. Per dimostrare la non integrabilità, come già accennato nel capitolo precedente, si sfrutta il teorema di Melnikov. Riscalando le variabili

$$x = \omega\hat{x}, \quad p = \omega\hat{p} \tag{2.5}$$

l'hamiltoniana che corrisponde alla mappa di Hénon diventa

$$\mathcal{H}(\hat{x}, \hat{p}; \omega) = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{x}}{3}\omega\delta_p(t - \omega). \tag{2.6}$$

Dove si é indicato con $\delta_p(t - \omega)$ la funzione $\delta$ periodica. Il fatto che nel limite $\omega \to 0$ l'hamiltoniana precedente può essere vista come un integratore simplettico di

$$\mathcal{H}_0(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{x}}{3}\omega$$

suggerisce di decomporre $\mathcal{H}$ nel modo seguente

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{\hat{p}^2 + \hat{x}^2}{2} - \frac{\hat{x}}{3}, \quad \mathcal{H}_1 = \frac{\hat{x}}{3}\frac{1 - \omega\delta_p(t-\omega)}{\omega}. \tag{2.7}$$

Osserviamo che la distribuzione $\chi(t,\omega) = \frac{1-\omega\delta_p(t-\omega)}{\omega}$ é limitata anche per $\omega \to 0$ se integrata su una funzione di prova. Visto poi che il punto fisso iperbolico di $\mathcal{H}_0$ si trova in $\hat{x} = 1, \hat{p} = 0$ può essere conveniente definire nuove variabili $y = 1 - \hat{x}, p_y = -\hat{p}$ da cui risulta che l'equazione della separatrice diventa

$$y = \frac{3}{2}\frac{1}{cosh\frac{t}{2}}, \quad p_y = -\frac{3}{2}\frac{\sinh\frac{t}{2}}{cosh\frac{t}{2}}, \quad \text{per} \quad -\infty < t < +\infty \tag{2.8}$$

La funzione di Melnikov sarà data in questo caso da

$$M(t_0) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)p_y(t)[1 - \delta_P(t + t_0 - \omega)]dt = \frac{9}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh\frac{1}{2}(n\omega - t_0)}{\cosh^7\frac{1}{2}(n\omega - t_0)}$$

$M(t_0)$ può essere sviluppata in serie di Fourier ottenendo

$$M(t_0) = \frac{9}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty} B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t_0 \tag{2.9}$$

dove i coefficienti $B_n$ hanno la seguente espressione

$$B_n = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sinh\frac{t}{2}}{\cosh^7\frac{t}{2}}\sin\frac{2\pi n}{\omega}td\,t =$$
$$2\pi\frac{8}{45}\frac{1}{\sinh\frac{2\pi^2 n}{\omega}}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^2\left[1 + \left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^2\right]\left[1 + 4\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^2\right]$$

Dunque $M(t_0)$ é una funzione sinusoidale e quindi ha degli zeri semplici, cosa che garantisce l'esistenza di intersezioni omocliniche trasverse e, a sua volta, la non integrabilità.
Un altro fatto interessante che depone a favore di questo modello é che, nonostante la forma speciale, questa mappa é generica. Si può infatti provare il risultato seguente.

**Teorema** *Considerata una generica mappa simplettica del piano del tipo*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + f(x,y) \\ y + g(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

*in cui $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono polinomi omogenei di secondo grado, del tipo*

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{2} f_k x^k y^{2-k}, \quad g(x,y) = \sum_{k=0}^{2} g_k x^k y^{2-k}. \tag{2.11}$$

*Sotto queste ipotesi é sempre possibile trovare un nuovo sistema di coordinate in cui la (2.10) abbia l'espressione (2.4).*

**Dim.**
Il risultato si dimostra facilmente riscrivendo la (2.10) utilizzando coordinate complesse. In questo caso una generica mappa quadratica si scrive

$$w' = e^{i\omega}(w + \frac{a}{2}w^2 + bww^* + \frac{c}{2}w^{*2}) \tag{2.12}$$

dove si é usato $w = x - ip$ e $w^* = x + ip$ e le costanti $a$, $b$, $c$ sono arbitrari numeri complessi legati ai coefficienti $f_k$, $g_k$. Imponendo la condizione di simpletticità si ottiene una relazione tra i coefficienti della parte quadratica della (2.12)

$$\frac{\partial(w', w'^*)}{\partial(w, w^*)} = 1 =$$

$$1 + (a + b^*)w + (a^* + b)w^* + (ab^* - bc^*)w^2 + (aa^* - cc^*)ww^* +$$

$$(a^*b - b^*c)w^{*2}$$

Risolvendo si ottengono le relazioni che legano i diversi parametri

$$b = -a^* \quad c = \frac{a^{*2}}{a} \tag{2.13}$$

e quindi la (2.10) può essere riscritta, tenendo conto di (2.13), nella forma

$$w' = e^{i\omega}\left[w + \frac{1}{2a}(aw + a^*w^*)^2\right]. \tag{2.14}$$

Introducendo nuove coordinate riscalate $w = \frac{z}{2ia}$ si ottiene l'espressione finale

$$z' = e^{i\omega}\left[z + \frac{i}{4}(z + z^*)^2\right] \tag{2.15}$$

che coincide esattamente con la (2.10), previo passaggio a coordinate reali. □

La mappa di Hénon sarà l'oggetto principale del nostro studio. Per essere più precisi considereremo la famiglia di mappe (2.4) ottenute considerando la dipendenza dal parametro $\omega$. Nel seguito utilizzeremo una forma modificata per la matrice di rotazione che compare nell'espressione (2.4), cambiando $\omega \to -\omega$. In conclusione l'oggetto del nostro studio sarà il seguente

$$H_2(\omega): \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + x^2 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

con

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

In primo luogo notiamo che se operiamo la trasformazione $y \to -y$, la mappa si trasforma in accordo con $H_2(\omega) \to H_2(-\omega)$. Da ciò risulta che é sufficiente considerare $\omega \in [0, \pi]$, in quanto il caso $\omega \in [\pi, 2\pi]$ si riconduce al precedente semplicemente riflettendo $y$. In più i due casi limite $\omega = 0$ e $\omega = \pi$ possono essere studiati esplicitamente. Nel primo caso si ha che $R(\omega) = Id$ e dunque la mappa si riduce a

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + x^2 \end{cases} \tag{2.18}$$

La ricorrenza precedente può essere agevolmente risolta, fornendo la soluzione

$$\begin{cases} x_n = x_0 \\ y_n = y_0 + n x_0^2 \end{cases} \tag{2.19}$$

da cui risulta immediato che per ogni condizione iniziale diversa dall'origine vale $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to +\infty$. Ciò implica che il bacino di stabilità é nullo. Nel secondo caso si ha invece che $R^2(\pi) = Id$ da cui risulta che $H_2(\pi)$ ha l'espressione

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - x^2 \end{cases} \tag{2.20}$$

Anche in questo caso é possibile scrivere in forma esplicita la soluzione della ricorrenza che risulta essere

$$\begin{cases} x_n = (-1)^n x_0 \\ y_n = (-1)^n y_0 - \frac{1-(-1)^n}{2} x_0^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

Dunque per qualsiasi condizione iniziale si ha che $r_n$ é limitato, implicando che l'intero spazio costituisce il bacino di stabilità. Si noti infine come il comportamento per $\omega = \pi$ sia legato al tipo di nonlinearità e non sia dunque una proprietà generica. Qualora, infatti, il termine quadratico fosse stato sostituito con uno di ordine dispari $x^{2n+1}$, questo avrebbe prodotto una instabilità simile a quella che si ha per $\omega = 0$.
Per raggiungere una migliore comprensione della dinamica della mappa di Hénon é utile considerare la possibilità di fattorizzare $H_2(\omega)$ nel prodotto di due trasformazioni più semplici. Si può infatti mostrare che vale la relazione

$$H_2(\omega) = \mathcal{I}_1(\omega) \circ \mathcal{I}_2 \tag{2.22}$$

con $\mathcal{I}_1(\omega)$ e $\mathcal{I}_2$ definite da

$$\mathcal{I}_1(\omega) : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

$$\mathcal{I}_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Tutte e due le trasformazioni sono caratterizzate del fatto di essere *involuzioni*: il loro quadrato coincide con l'identità, come é facile verificare. La prima é una mappa lineare e rappresenta una riflessione attorno alla retta di equazione $y = x \tan\frac{\omega}{2}$, mentre la seconda é una trasformazione non lineare e rappresenta uno spostamento verticale. Nel seguito risulterà anche importante considerare gli insiemi

$$\mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_i) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, \mathcal{I}_i(x, y) = (x, y)\right\} \tag{2.25}$$

che sono i luoghi dei punti fissi delle due trasformazioni. Per quanto riguarda $\mathcal{I}_1(\omega)$, é ovvio che $\mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_1)$ coincide con la retta indicata. Nel caso di $\mathcal{I}_2$, invece, i punti fissi si trovano su di una parabola di equazione $y = -\frac{x^2}{2}$.
Una prima conseguenza di questa fattorizzazione in involuzioni consiste nel fatto che la mappa inversa é essa stessa polinomiale, essendo data da

$$H_2^{-1}(\omega) = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1(\omega).$$

Dunque $H_2(\omega)$ é una *mappa di Cremona*. Una ulteriore conseguenza della fattorizzazione (2.22) riguarda la simmetria delle orbite di $H_2(\omega)$: queste sono infatti simmetriche rispetto alla retta $y = x \tan\frac{\omega}{2}$. Vale infatti la relazione

$$H_2(\omega) \circ \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1 \circ H_2^{-1}(\omega)$$

e quindi il risultato discende dalle proprietà di $\mathcal{I}_1(\omega)$. Per questo motivo la retta suddetta verrà indicata nel seguito come retta di simmetria $H_2(\omega)$.
Nel paragrafo seguente discuteremo le conseguenze della fattorizzazione (2.22) sui punti fissi della mappa quadratica dando alcuni risultati generali, nel frattempo basti dire che la mappa di Hénon ha due punti fissi, l'origine (ellittico) e

$$x_i = -2\tan\frac{\omega}{2}, \quad y_i = -2\tan^2\frac{\omega}{2}. \tag{2.26}$$

Questo punto é iperbolico come si può verificare considerando la matrice jacobiana di $H_2(\omega)$ in un intorno di $(x_i, y_i)$

$$L_{H_2(\omega)} = \begin{pmatrix} \cos\omega + 2\sin\omega\tan\frac{\omega}{2} & -\sin\omega \\ \sin\omega - 2\cos\omega\tan\frac{\omega}{2} & \cos\omega \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

La traccia vale infatti $2\left(\cos\omega + \sin\omega\tan\frac{\omega}{2}\right)$ ed é sempre maggiore di due garantendo la realtà degli autovalori la cui espressione sarà

$$\lambda_1 = 1 + 2\sin^2\frac{\omega}{2} + 2\sin\frac{\omega}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\omega}{2}}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1}. \tag{2.28}$$

Se ora introduciamo nuove coordinate definite dalla seguente trasformazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\tan\frac{\omega}{2} \\ -2\tan^2\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} + \tag{2.29}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \\ 2\sin\frac{\omega}{2} - \sqrt{1+\sin^2\frac{\omega}{2}} & 2\sin\frac{\omega}{2} + \sqrt{1+\sin^2\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

dove la matrice rappresenta la matrice degli autovettori di $L_{H_2(\omega)}$, si ottiene una nuova mappa quadratica che ha ora un punto fisso iperbolico nell'origine. Questa mappa ha la seguente espressione

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - \frac{\nu}{2}[X+Y]^2 \\ Y + \frac{\nu}{2}[X+Y]^2 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Come si può vedere questa é esattamente la mappa introdotta nel precedente capitolo e utilizzata per determinare lo sviluppo in serie delle varietà invarianti.
Come ultimo commento sulle proprietà generali di questo modello, vorremmo accennare alle sue connessioni con la fisica degli acceleratori. Premesso che nel prossimo capitolo si affronterà in maggior dettaglio il problema delle mappe di trasferimento per elementi magnetici, si può anticipare che la mappa di Hénon rappresenta la mappa di trasferimento per una cella FODO

bidimensionale con una non linearità di tipo sestupolare considerata nell'approssimazione di kick.
Una cella FODO é la struttura fondamentale nel reticolo magnetico di un acceleratore di particelle. é costituita, nella sua versione elementare, da elementi magnetici (dipoli e quadrupoli) che provvedono a fornire non solo la forza necessaria per mantenere le particelle sull'orbita di riferimento, ma anche il focheggiamento richiesto per controllare la divergenza del fascio. Il sestupolo, elemento non lineare, viene introdotto per correggere gli effetti cromatici introdotti dagli elementi lineari (quadrupoli). Nel nostro modello questo elemento é considerato di lunghezza nulla e approssimato con un effetto impulsivo, rappresentato dalla funzione $\delta$ che compare nell'hamiltoniana (2.1). Come vedremo nel prossimo capitolo questa approssimazione é largamente usata, permettendo di ottenere delle mappa che, benchè non siano esatte, sono per contro esattamente simplettiche.

## 2.2 Relazione tra punti fissi e involuzioni

In questo paragrafo presentiamo una serie di risultati generali valevoli per mappe che possono essere decomposte nel prodotto di involuzioni [46, 47, 48]. Questo tipo di trasformazioni ha delle proprietà peculiari. Ad esempio é possibile mostrare che una involuzione possiede sempre almeno un punto fisso. In particolare nel caso bidimensionale il luogo dei punti fissi di una involuzione é una curva analitica. Questo fatto si ripercuote sulla mappa che viene fattorizzata imponendo dei vincoli sui punti fissi. Il primo risultato che si può enunciare in tal senso é il seguente.

**Teorema** *Sia* $\mathbf{F}$ *una mappa di* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $\mathbf{F} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2$ *con* $\mathcal{I}_1^2 = \mathcal{I}_2^2 = Id$, *allora se* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *é soluzione di*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_2\left(\mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x})\right) & = & \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{2.31}$$

*vale* $\mathbf{F}^{\circ 2n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. *Nel caso che* $\mathbf{x}$ *sia soluzione di*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_1\left(\mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x})\right) & = & \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{2.32}$$

*o di*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_2(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_2\left(\mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x})\right) & = & \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{2.33}$$

*risulta* $\mathbf{F}^{\circ 2n}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

**Dim.**
Daremo la dimostrazione della prima affermazione, in quanto la seconda si prova analogamente. In primo luogo notiamo che dalla fattorizzazione (2.22) discende che

$$\mathcal{I}_1 \circ \mathbf{F}^{\circ m} = \mathcal{I}_2 \circ \mathbf{F}^{\circ m-1}, \quad \mathbf{F}^{\circ m} \circ \mathcal{I}_2 = \mathbf{F}^{\circ m-1} \circ \mathcal{I}_1; \tag{2.34}$$

utilizzando queste proprietà e (2.26) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\circ 2n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}^{\circ n+1} \circ \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{\circ n+1} \circ \mathcal{I}_2 \circ \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F}^{\circ n} \circ \mathcal{I}_1 \circ \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{\circ n} \circ \mathcal{I}_2 \circ \mathbf{F}^{\circ n-1}(\mathbf{x}) \\ &= \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

L'ultimo passaggio si é ottenuto applicando ripetutamente le (2.34). Rimane dunque dimostrato l'asserto. □

Consideriamo ora un caso meno generale introducendo delle ipotesi più restrittive sulla forma delle due trasformazioni in cui si decompone la mappa $\mathbf{F}$. Sia $\mathcal{I}_1$ una involuzione lineare di $\mathbb{R}^2$. é possibile descrivere la forma generale di una tale trasformazione. La condizione $\mathcal{I}_1^2 = Id$ impone che $det\,(\mathcal{I}_1) = \pm 1$. Nel caso in cui il determinante sia positivo le uniche matrici che siano involuzioni sono multipli dell'identità

$$\mathcal{I}_1 = \pm Id. \tag{2.36}$$

Nel secondo caso la soluzione dipende da due parametri liberi

$$\mathcal{I}_1 : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

La trasformazione (2.37) rappresenta una riflessione rispetto alla retta di equazione

$$y = \frac{1-\alpha}{\beta} x \tag{2.38}$$

che é ovviamente il luogo dei punti fissi.
Per quanto concerne $\mathcal{I}_2$ sia una involuzione non lineare del tipo

$$\mathcal{I}_2 \, : \, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + P_n(x) \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

con $P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x^j$. Il luogo dei punti fissi della trasformazione (2.39) é costituito dalla curva

$$y = -\frac{P_n(x)}{2}. \tag{2.40}$$

Con queste premesse si possono rafforzare i risultati precedenti relativi ai punti fissi di $\mathbf{F} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2$.

**Teorema** *Sia* $\mathbf{F}$ *una mappa di* $\mathbb{R}^2$ *decomposta in involuzioni del tipo precedente. Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $\mathbf{x}$ *sia un punto fisso di* $\mathbf{F}$ *é che valga*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_2\,(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \end{array} \right. \tag{2.41}$$

**Dim.**
Per quanto abbiamo già dimostrato in precedenza rimane da provare che se $\mathbf{x}$ é un punto fisso allora appartiene all'intersezione di $\mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_1)$ e $\mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_2)$. La condizione che $\mathbf{x}$ deve soddisfare per essere un punto fisso si scrive

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\alpha-1)x - \beta y - bP_n(x) & = & 0 \\ \\ \dfrac{1-\alpha^2}{\beta}x + (\alpha-1)y + \alpha P_n(x) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{\alpha-1}{\beta}x - P_n(x) \\ \\ \dfrac{\alpha-1}{\beta}x & = & -\frac{1}{2}P_n(x) \end{array} \right. \tag{2.43}$$

é immediato notare che la (2.43) é equivalente a richiedere che $\mathbf{x}$ appartenga a $\mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_1) \bigcap \mathcal{F}ix\,(\mathcal{I}_2)$ come affermato nella tesi. $\square$

Un risultato analogo vale anche per i punti fissi di $\mathbf{F}^{\circ 2}$.

**Teorema** *Sia* $\mathbf{F}$ *una mappa di* $\mathbb{R}^2$ *decomposta in involuzioni del tipo precedente. Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $\mathbf{x}$ *sia un punto fisso di* $\mathbf{F}^{\circ 2}$ *é che valga la seguente relazione*

$$\begin{cases} \mathcal{I}_2(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_2\left(\mathbf{F}(\mathbf{x})\right) & = & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.44}$$

**Dim.**
Da quanto abbiamo già dimostrato risulta che anche le soluzioni di (2.32) per $n = 1$ sono, in linea di principio, punti fissi di $\mathbf{F}^{\circ 2}$. Mostriamo, quindi che se $\mathbf{x}$ soddisfa

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_1\left(\mathbf{F}(\mathbf{x})\right) & = & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.45}$$

allora $\mathbf{x}$ é un punto fisso di $\mathbf{F}$ e dunque soluzione banale di $\mathbf{F}^{\circ 2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Scrivendo esplicitamente le equazioni si ottiene

$$\begin{cases} y & = & \dfrac{1-\alpha}{\beta}x \\ \\ \dfrac{1+\alpha-2\alpha^2}{\beta}x + \alpha P_n(x) & = & \dfrac{(1-\alpha)(2\alpha-1)}{\beta}x - (1-\alpha)P_n(x) \end{cases} \tag{2.46}$$

ed é immediato verificare che la seconda equazione si riduce a $\frac{1-\alpha}{\beta}x = -\frac{P_n(x)}{2}$ e dunque $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Questo significa che solo le soluzioni di (2.33) per $n = 1$, sono punti fissi non banali di $\mathbf{F}^{\circ 2}$.
Rimane ora da dimostrare che viceversa un punto fisso di $\mathbf{F}^{\circ 2}$ verifica la (2.44). Questo é immediato scrivendo l'equazione $\mathbf{F}^{\circ 2}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x})$ nella forma equivalente $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$. Risulta dunque

$$\begin{cases} \alpha x - \beta y - \beta P_n(x) & = & \alpha x + \beta y \\ \\ \dfrac{1-\alpha^2}{\beta}x + \alpha y + \alpha P_n(x) & = & -\dfrac{1-\alpha^2}{\beta}x + \alpha y - \alpha P_n(\alpha x + \beta y) \end{cases} \tag{2.47}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} y & = & -\frac{1}{2}P_n(x) \\ \\ \dfrac{1-\alpha^2}{\beta}x + \dfrac{\alpha}{2}P_n(x) & = & -\frac{1}{2}P_n(\alpha x - \frac{\beta}{2}P_n(x)) \end{cases} \tag{2.48}$$

é immediato vedere che la (2.48) coincide esattamente con l'equazione che si ottiene dalla (2.44). □

Dopo avere analizzato il problema dell'esistenza di punti fissi e di come sia possibile determinarli, passiamo a considerare lo studio della loro stabilità. A tal scopo considereremo una forma meno generale per la trasformazione $\mathcal{I}_1$. Ritorneremo infatti a utilizzare l'involuzione in cui si decompone la mappa di Hénon. Questo permette di avere un punto fisso ellittico nell'origine in maniera automatica. Con queste premesse é possibile provare il seguente risultato

**Teorema** *Data una mappa* $\mathbf{F}$ *fattorizzata in involuzioni* $\mathcal{I}_1(\omega), \mathcal{I}_2$ *del tipo considerato in precedenza, allora se il grado di* $\mathbf{F}$ é pari oppure dispari, ma $p_n$ é negativo, i punti fissi esterni sono sempre iperbolici.

**Dim.**
Per provare il risultato utilizzeremo il concetto di indice di una curva Sia $\mathcal{C}$ una curva chiusa che non passi per nessun punto fisso della mappa, in queste condizioni l'indice di $\mathcal{C}$, $Ind_{\mathcal{C}}$, é definito come il numero di volte che il vettore

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C},$$

ruota attorno all'origine mentre il punto $\mathbf{x}$ percorre $\mathcal{C}$. L'indice é dunque una funzione a valori interi (il segno indica il verso di rotazione). Alcune proprietà sono immediate. Ad esempio $Ind_{\mathcal{C}}$ é continuo rispetto a $\mathcal{C}$ e ha una dipendenza regolare dagli eventuali parametri che entrano nell'espressione di $\mathbf{F}$. Nel caso la curva prescelta racchiuda un solo punto fisso, il valore dell'indice sarà $-1, +1, +1$ a seconda che il punto fisso sia iperbolico, ellittico o iperbolico con inversione. Nel caso si abbiano più punti fissi all'interno di $\mathcal{C}$, l'indice si comporta in maniera additiva essendo dato dalla somma degli indici dei vari punti fissi. L'ultima proprietà che considereremo é la seguente: l'indice di una orbita chiusa di $\mathbf{F}$ vale $+1$. Detto ciò possiamo precedere con la dimostrazione. Supponiamo che il grado di $\mathbf{F}$ sia pari. In questo caso dovrebbe essere chiaro dalla discussione sulle proprietà dei punti fissi che esisterà un valore $\bar{\omega}$ tale che se $\omega > \bar{\omega}$ si hanno solo due punti fissi: l'origine ed un secondo punto appartenente al ramo esterno della curva $y = -\frac{P_n(x)}{2}$. Consideriamo ora una curva chiusa $\mathcal{C}$ tale da racchiudere tutti i punti fissi che si hanno per i valori del parametro $\omega$ nell'intervallo $[0, \bar{\omega}]$. Per quanto detto $Ind_{\mathcal{C}}$ non dipenderàdal valore di $\omega$. Se $\omega = 0$ si ha che la dinamica é instabile e dunque non possono esistere curve chiuse. Questo significa che $Ind_{\mathcal{C}} \neq +1$. Questo significa che il punto fisso diverso dall'origine che si ha nel caso $\omega \geq \bar{o}mega$ non può essere altro che iperbolico in quanto deve continuare a valere che $Ind_{\mathcal{C}} \neq +1$ e, in più non esistono mappe continue con indice due (quindi é escluso che possa essere ellittico o iperbolico con inversione). In aggiunta si può dire che la stabilità di detto punto fisso non cambia anche se $\omega \in [0, \pi]$ e quindi rimane dimostrata la prima parte dell'asserto. Nel secondo caso si procede analogamente. L'unica differenza consiste nel fatto che, la diversa simmetria di $\mathcal{F}ix(\mathcal{I}_2)$ comporta che per $\omega > \bar{\omega}$ si avranno tre soluzioni invece di due. A parte ciò é possibile dimostrare che i due punti fissi distinti dall'origine sono iperbolici e che la loro stabilità non cambia in tutto l'intervallo di variazione di $\omega$. $\square$

## 2.3 La mappa di Hénon nel dominio complesso

In questo paragrafo illustriamo un primo approccio al problema della determinazione del bacino di stabilità per la mappa di Hénon [49]. Considereremo questa mappa nel dominio complesso in modo da poter utilizzare le tecniche sviluppate nell'ambito della teoria delle funzioni analitiche in una variabile complessa. L'idea é di correlare le caratteristiche del bacino di stabilità con le proprietà dello sviluppo in frazione continua della frequenza $\omega$ della parte lineare della mappa. Detto approccio é stato applicato per la prima volta da Buric, Percival e Vivaldi [50, 51, 52] nello studio della funzione critica per mappe quali la *Standard Map* e *Semi standard Map*.
Prima di esporre il risultato, passeremo in rassegna alcuni aspetti preliminari di teoria dei numeri. Indichiamo con $[a_0, a_1, \dots]$ lo sviluppo in frazione continua di un numero $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. I coefficienti $a_i$ possono essere determinati ricorsivamente secondo lo schema

$$a_j = \left[\frac{1}{\nu_j}\right], \quad \nu_j = \left\{\frac{1}{\nu_{j-1}}\right\}, \quad \text{per } j \geq 1, \tag{2.49}$$

dove $[\,]$ denota la funzione *parte intera*, mentre $\{\,\}$ la *frazionaria*. L'inizializzazione delle due successioni avviene ponendo $\nu_0 = \nu - [\nu]$ e $a_0 = [\nu]$. Le approssimazioni successive $\frac{p_k}{q_k}$ a $\nu$ ottenute troncando ad un ordine finito lo sviluppo

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}} \tag{2.50}$$

sono date da

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \end{cases} \tag{2.51}$$

per tutti i $k \geq 0$, dove le due successioni sono inizializzate con i seguenti valori $q_{-2} = p_{-1} = 1, q_{-1} = p_{-2} = 0$. Gli approssimanti verificano la proprietà

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < (-1)^k \left(\nu - \frac{p_k}{q_k}\right) < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \tag{2.52}$$

e dunque a seconda che $k$ sia pari o dispari, $p_k/q_k$ approssima $\nu$ da destra o da sinistra. Nel seguito sarà utilizzato un secondo tipo di sviluppo in frazione continua. Se consideriamo $\nu$ un irrazionale, possiamo definire le successioni

$$b_k = \langle \theta_{k-1}^{-1} \rangle, \quad \theta_k = \| \theta_{k-1}^{-1} \| \quad \text{per } k \geq 1, \tag{2.53}$$

dove si é indicato con $\langle\,\rangle$ e $\|\,\|$ rispettivamente l'intero più vicino e la distanza dall'intero più vicino. In questo caso i valori iniziali per $b_k$ e $\theta_k$ sono $b_0 = \langle \nu \rangle$ e $\theta_0 = \|\nu\|$. é immediato vedere che $\theta_k \in (0, 1/2) \quad \forall k$ e dunque $b_k \geq 2 \quad \forall k$. Tra i due diversi sviluppi in frazione continua esiste un legame mediato dalla successione $\beta_k = \prod_{i=0}^{k} \theta_i$, con $\beta_{-1} = 1$.
Si può mostrare che esiste una funzione monotona crescente $m \colon \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ tale che

$$\beta_k = (-1)^{m(k)} \left(q_{m(k)} - p_{m(k)}\right). \tag{2.54}$$

Poniamo ora la seguente definizione.

*Definizione* Sia $B$ una applicazione

$$B \colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{R}^+ \bigcup \{\infty\}$$

pari, $\mathbb{Z}$-periodica e finita per tutti i $\nu$ aventi uno sviluppo in frazione continua che soddisfi la condizione di Brjuno

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} < +\infty. \tag{2.55}$$

In questo caso si pone

$$B(\nu) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-1} \log \theta_k. \tag{2.56}$$

dove $\beta_k, \theta_k$ rappresentano lo sviluppo modificato in frazione continua di $\nu$. La funzione $B(\nu)$ é detta *funzione di Brjuno*. Se consideriamo il caso particolare in cui $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q} \bigcap (0, 1/2]$ allora $B(\nu)$ soddisfa l'equazione funzionale

$$B(\nu) = -\log \nu + \nu B(\nu^{-1}). \tag{2.57}$$

L'importanza della funzione di Brjuno e della condizione (2.55) é dovuta alla sua connessione con il problema della linearizzazione di un diffeomorfismo olomorfo nell'intorno di un punto fisso. Sia $f$ un tale diffeomorfismo con un punto fisso in $z = 0$ e sia $\lambda = f'(0)$. Indicando con $f = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n z^n$ Si dice che $f$ é linearizzabile se esiste una funzione $\Phi$ che risolva l'equazione

$$f \circ \Phi = \Phi \circ R_\lambda \tag{2.58}$$

con $R_\lambda \colon z \longmapsto \lambda z$. L'equazione precedente é l'equivalente della (1.1) nel caso complesso. Il problema dell'esistenza formale di $\Phi$ é facilmente risolto in quanto basta che sia $\lambda^n - 1 \neq 0$ per ogni $n$. In tal caso i coefficienti $\Phi_n$ dello sviluppo $\Phi = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n z^n$ possono essere determinati dalla (2.58) uguagliando i termini simili. Si ottiene, quindi che $\Phi_1 = 1$ e

$$\Phi_n = (\lambda_n - \lambda)^{-1} \sum_{j=2}^{n} f_j \sum_{m_1 + \ldots + m_j = n} \Phi_{m_1} \ldots \Phi_{m_j}, \quad n \geq 2. \tag{2.59}$$

Per quanto riguarda il problema della convergenza di $\Phi$, bisogna distinguere due casi a seconda del modulo di $\lambda$. Nel caso banale $|\lambda| \neq 1$, Poincaré ha provato la convergenza di $\Phi$. Se invece vale $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{2\pi i \nu}$ anche se $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ la serie (2.59) potrebbe essere divergente a causa dei piccoli divisori: $\lambda^n - \lambda$ pur essendo sempre diverso da zero, potrebbe essere comunque arbitrariamente piccolo. é proprio per controllare i piccoli divisori che si richiede che $\nu$ soddisfi ad una condizione diofantina. Qualora si abbia la convergenza, all'interno del disco di convergenza, detto anche *disco* *di Siegel*, la dinamica generata da $f$ é coniugata con una rotazione di frequenza $2\pi\nu$. Recentemente [16] Yoccoz ha provato un teorema fondamentale.

**Teorema** *La condizione di Brjuno (2.55) é necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione analitica di* (refeq31.10) *nel caso che* $\lambda = e^{2\pi i\nu}$. *In più, se si richiede che $f$ sia univalente, allora detto $\tau_S$ il raggio del disco di Siegel, vale la relazione*

$$|\log \tau_S^{-1} - B(\nu)| \leq C, \tag{2.60}$$

*dove $C$ é una costante universale.*

Chiaramente questo fatto suggerisce che per una mappa generica valga la relazione $\tau_S = C(\nu)e^{-B(\nu)}$. Detta ipotesi é stata verificata numericamente [53], fornendo delle ottime stime per il disco di Siegel.
Per studiare la mappa di Hénon utilizzando le tecniche descritte in precedenza, bisogna in primo luogo riscriverla in una forma differente. é possibile, infatti, eliminare completamente la dipendenza dalla coordinata $y$, ottenendo un'equazione nella sola $x$

$$x_{n+1} - 2\cos 2\pi\nu x_n + x_{n-1} = [x_n]^2 \sin 2\pi\nu \tag{2.61}$$

dove si é posto $\omega = 2\pi\nu$. Introducendo l'operatore

$$\delta_\nu^2 x_n = x_{n+1} - 2\cos 2\pi\nu x_n + x_{n-1}, \tag{2.62}$$

é possibile riscrivere la (2.61) come

$$\delta_\nu^2 x_n = [x_n]^2 \sin 2\pi\nu. \tag{2.63}$$

Si tenga anche presente che da ora in avanti le coordinate $(x_n, y_n)$ sono considerate come appartenenti a $\mathbb{C}^2$. La mappa con cui vogliamo coniugare la (2.63) ha la forma

$$z_{n+1} = e^{2\pi i\nu} z_n, \quad \text{con } z_n = \hat{K} e^{i\theta_n}, \tag{2.64}$$

Gli invarianti sono dei cerchi: $\hat{K}$ misura la distanza dal punto ellittico dell'invariante, mentre $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é una coordinata che parametrizza il cerchio. Per risolvere la (2.58) si porrà

$$x_n = \Phi(z_n) \Longrightarrow \delta_\nu^2 \Phi(z) = \Phi(e^{2\pi i\nu} z) - 2\cos 2\pi\nu \Phi(z) + \Phi(e^{-2\pi i\nu} z), \tag{2.65}$$

e dunque l'equazione (2.63) diventerà

$$\delta_\nu^2 \Phi(z) = [\Phi(z)]^2 \sin 2\pi\nu. \tag{2.66}$$

Il problema che stiamo tentando di risolvere consiste nel trovare un disco di Siegel immerso in $\mathbb{C}^2$ che sia compatibile con la dinamica della mappa di Hénon in $\mathbb{C}^2$. Come già indicato in precedenza é immediato trovare l'espressione dei coefficienti che definiscono lo sviluppo in serie della funzione di coniugazione $\Phi$. Uguagliando le potenze nella (2.66) si ottiene

$$\Phi_n = \frac{\sin 2\pi\nu}{(D_1 - D_n)} \sum_{l-1}^{n-1} \Phi_l \Phi_{n-l}, \quad n \geq 2. \tag{2.67}$$

La successione dei $D_n = 4\sin^2 2\pi\nu$ rappresenta i piccoli divisori. Come é facile vedere il coefficiente $\Phi_1$ rimane indeterminato e perciò può essere posto uguale a uno, riscalando opportunamente tutti gli altri coefficienti. A questo punto il raggio di convergenza di $\Phi$ si può calcolare utilizzando, ad esempio, la formula di Hadamard

$$K(\nu) = \left[ \limsup_{n\to+\infty} |\Phi_n|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}. \tag{2.68}$$

Sottolineiamo il fatto che $K(\nu)$ limita il raggio dei cerchi invarianti coniugati con la dinamica della mappa di Hénon. Possiamo ora enunciare il risultato principale.

**Teorema** *Una condizione sufficiente per l'esistenza di un cerchio invariante é la condizione di Brjuno* (2.55)*. In più vale la seguente disuguaglianza*

$$\log K(\nu) \geq -\log 2(1+\sqrt{2}) - 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k}. \tag{2.69}$$

**Dim.**

La dimostrazione usa il metodo delle serie maggioranti secondo la tecnica sviluppata da Siegel e Brjuno. Dalla (2.68) si ha

$$-\log K(\nu) \leq \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log |\Phi_n|, \tag{2.70}$$

e dunque per dimostrare l'enunciato basta dimostrare che vale

$$\frac{1}{n} \log |\Phi_n| \leq C + 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k}, \tag{2.71}$$

dove $C = \log 2(1+\sqrt{2})$. Poniamo ora

$$\varepsilon_n := |\sin(\pi(n+1)\nu)\sin(\pi(n-1)\nu)| \quad \forall n \geq 1 \tag{2.72}$$

Se $\| \, . \, \|$ indica la distanza dell'intero più vicino, $\|y\| := \min_{p\in\mathbb{Z}} |y+p|$, poichè vale che $2x \leq \sin(\pi x) \leq \pi x$ per ogni $x \in [0, 1/2]$, si ha immediatamente

$$1 \geq \varepsilon_n \geq 4\|(n+1)\nu\|\|(n-1)\nu\| \geq 4[\min(\|(n+1)\nu\|\, , \, \|(n-1)\nu\|)]^2 \, . \tag{2.73}$$

Introduciamo ora le seguenti successioni

$$\sigma_1 = 1 \ , \ \sigma_n = \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l \sigma_{n-l} \ , \ n \geq 2 \, , \tag{2.74}$$

e

$$\delta_1 = 1 \ , \ \delta_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \max_{1\leq j\leq n-1} \delta_j \delta_{n-j} \ , \ n \geq 2 \, , \tag{2.75}$$

che verranno utilizzate per determinare una serie maggiorante per la funzione di coniugazione $\Phi$ . Con queste definizioni si può provare il seguente

**Lemma.1** *I coefficienti $\Phi_n$ dello sviluppo in serie della funzione di coniugazione verificano la disuguaglianza*

$$|\Phi_n| \leq \sigma_n \delta_n \quad \forall n \geq 1 \ , \tag{2.76}$$

**Dim.**
Dalle definizioni (2.67), (2.74) e (2.75) si ha che $\Phi_1 = 1 = \delta_1\sigma_1$ in aggiunta, per induzione, poichè $D_1 - D_n = -4\varepsilon_n$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_n| = \left| \frac{\sin(2\pi\nu)}{4\varepsilon_n} \sum_{l=1}^{n-1} \Phi_l \Phi_{n-l} \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l \sigma_{n-l} \delta_l \delta_{n-l} \qquad (2.77)\\
&\leq \left( \frac{1}{\varepsilon_n} \max_{1\leq l\leq n-1} \delta_l \delta_{n-l} \right) \left( \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l \sigma_{n-l} \right)\\
&= \sigma_n \delta_n.
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione del lemma. □

Utilizzando il lemma precedente,per dimostrare il teorema basta provare che

$$\frac{1}{n} \log \sigma_n + \frac{1}{n} \log \delta_n \leq \log 2(1+\sqrt{2}) + 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \tag{2.78}$$

Il contributo di $\sigma_n$ non é altro che il termine costante: questa successione tiene conto della crescita di $|\Phi_n|$ dipendente dalla ricorrenza senza tenere conto dei piccoli divisori cioé ponendo $D_n = 1$ in (2.67) . Al contrario la successione $\delta_n$ estrae dalla serie i contributi dei piccoli divisori. Utilizzando la definizione di $\sigma_n$ e ponendo $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n z^n$ si ricava che $f$ verifica l'equazione funzionale

$$f(z) = z + (f(z))^2 \tag{2.79}$$

che può essere facilmente risolta fornendo il risultato

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2} \; . \tag{2.80}$$

Quindi $f$ converge per $|z| < 1/4$ e utilizzando le stime alla Cauchy si ha che

$$\sigma_n \leq 4^n \max_{|z| \leq 1/4} |f(z)| \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} 4^n \; . \tag{2.81}$$

Consideriamo ora la successione $\delta_n$ . Nella (2.75) il massimo é raggiunto per una decomposizione

$$\delta_n = \frac{1}{\varepsilon_n} \delta_{j_n} \delta_{n-j_n} \; , \text{ dove } 1 \leq j_n \leq n-1 \; . \tag{2.82}$$

Decomponendo $\delta_{j_n}$ , $\delta_{n-j_n}$ nella stessa maniera e procedendo nello stesso modo si ottiene alla fine del processo una decomposizione ben definita

$$\delta_n = \prod_{k=1}^{l(n)} \varepsilon_{i_k}^{-1} \; , \text{ dove } \varepsilon_{i_1} = \varepsilon_n \; , \; 1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{l(n)} \leq n-1 \; , \tag{2.83}$$

**Lemma 2.**

$$l(n) = 2n - 1 \; .$$

**Dim.**
é immediato provare il lemma per induzione.□

Consideriamo ora la funzione $\Omega : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^+$ definita come segue: per ogni $m \geq 2$

$$\Omega(m) := \min_{1 \leq j \leq m-1} \|j\nu\|^2 \; .$$

Chiaramente $\Omega$ é non crescente e visto che $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vale la relazione $\lim_{m\to+\infty} \Omega(m) = 0$. In più per la legge della migliore approssimazione dei numeri irrazionali partendo dalle frazioni parziali, se $1 \leq q \leq q_k$, $(p, q) \neq (p_k, q_k)$ e $k \geq 1$, dove $p_k/q_k$ é una frazione parziale di $\nu$, $|q\nu - p| > |q_k\nu - p_k|$. In più se $(p, q) \neq (p_{k-1}, q_{k-1})$, $|q\nu - p| > |q_{k-1}\nu - p_{k-1}|$. Dunque $\Omega$ é una funzione costante a tratti tale che $\Omega(q_{k-1} + 1) = \Omega(q) = \Omega(q_k) > \Omega(q_k + 1)$ per ogni $q_{k-1} + 1 \leq q \leq q_k$, e in definitiva si ottiene

$$\Omega(q_k) = \min_{1\leq j\leq q_k-1} (\min_{p\in\mathbb{Z}} |j\nu + p|)^2 \geq |q_{k-1}\nu - p_{k-1}|^2 \geq \frac{1}{4q_k^2} \; . \tag{2.84}$$

L'idea principale del metodo proposto da Brjuno é di contare i termini nella decomposizione (2.83) di $\delta_n$ che sono minori di $4\Omega(m)$ per un fissato $m \geq 2$ (il fattore 4 é dovuto alla (2.73)).

**Lemma 3.** *Sia* $N_m(n) :=$ card $\{k = 1, \ldots, l(n)\,\text{nella(2.83)} \mid \varepsilon_{i_k} < 4\Omega(m+1)\}$ *. Allora*

$$\begin{aligned} N_m(n) &= 0 \qquad \text{se} \quad n < m \\ N_m(n) &\leq 2\left[\tfrac{n}{m}\right] - 1 \quad \text{se} \quad n \geq m \end{aligned} \tag{2.85}$$

*dove* [ ] *denota la parte intera*

**Dim.**
Per la (2.83), se $n < m$, allora $m \geq i_k + 1$ per ogni $k = 1, \ldots, l(n)$. Quindi dalla (2.73) abbiamo che

$$\varepsilon_{i_k} = |\sin(\pi(i_k + 1)\nu)\sin(\pi(i_k - 1)\nu)| \geq 4\|(i_k + 1)\nu\|\|(i_k - 1)\nu\| \geq 4\Omega(m + 1)$$

in quanto $\Omega$ é non crescente. Dunque $N_m(n) = 0$.
Se $n = m$, per ogni $k = 2, \ldots, l(n)$, allora $i_k \leq n - 1 = m - 1$, e dunque utilizzando lo stesso argomento possiamo affermare che

$$\varepsilon_{i_k} \geq 4\Omega(m + 1) \; .$$

L'unica possibilità rimasta é che $\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_n < 4\Omega(m + 1)$, quindi $N_m(m) \leq 1$.
Procediamo ora per induzione su $n$. Sia $n > m$: sono possibili due casi

*Caso 1*: $\varepsilon_n \geq 4\Omega(m + 1)$. Allora per la (2.82) e l'ipotesi induttiva, vale

$$N_m(n) = N_{j_n}(m) + N_{n-j_n}(m) \leq 2\left[\frac{j_n}{m}\right] + 2\left[\frac{n - j_n}{m}\right] - 2 \leq 2\left[\frac{n}{m}\right] - 2 \tag{2.86}$$

in quanto $[x]+[y] \le [x+y]$ .

*Caso 2*: $\varepsilon_n < 4\Omega(m+1)$. In questo caso

$$N_m(n) = 1 + Nj_n(m) + N_{n-j_n}(m) \le 1 + 2\left[\frac{n}{m}\right] - 2 = 2\left[\frac{n}{m}\right] - 1 \; . \qquad (2.87)$$

Questo completa la dimostrazione del lemma.

A questo punto é possibile completare la dimostrazione del teorema. Definiamo la successione di insiemi di indici

$$\begin{aligned} I(0) : &= \{k = 1, \dots, l(n) \text{ nella } (2.83) \,|\, 4\Omega(q_1) \le \varepsilon_{i_k} < 1\} \\ I(m) : &= \{k = 1, \dots, l(n) \text{ nella } (2.83) \,|\, 4\Omega(q_{m+1}) \le \varepsilon_{i_k} < 4\Omega(q_m)\} \end{aligned} \qquad (2.88)$$

La successione $(q_k)_{k=1}^{+\infty}$ rappresenta la successione dei denominatori delle frazioni parziali di $\nu$. Chiaramente $\cup_{m=0}^{+\infty} I(m) = ]0,1]$ ; per il Lemma 3 se $m \ge 1$

$$\operatorname{card} I(m) \le N_{q_m-1}(n) \le 2[\frac{n}{q_m - 1}] - 1 \qquad (2.89)$$

e

$$\operatorname{card} I(0) \le 2n - 1 \qquad (2.90)$$

Dunque utilizzando la (2.83) e la (2.84) si avrà

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log\delta_n = \sum_{k=1}^{l(n)} \frac{1}{n}\log\varepsilon_{i_k}^{-1} &\le \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card} I(m) \log\frac{1}{4\Omega(q_{m+1})} \qquad (2.91) \\ &\le 4\frac{\log q_1}{q_0} + 4\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{q_m - 1}\log q_{m+1} \le 8\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{q_m}\log q_{m+1} \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} \sup_{n\ge1}\frac{1}{n}\log\Phi_n &\le \sup_{n\ge1}\left(\frac{1}{n}\log\sigma_n + \frac{1}{n}\log\delta_n\right) \le \qquad (2.92) \\ &\le \log\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \log 4 + 8\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\log q_{k+1}}{q_k} \end{aligned}$$

che completa la dimostrazione. Il teorema é perciò dimostrato. □

Il risultato precedente si presta ad alcuni commenti.
In primo luogo, poichè é noto che $q_n \geq 2^{(n-1)/2}$, dato un arbitrario $\varepsilon > 0$ se scegliamo

$$m(\varepsilon) := \left[ 2 \log_2 \frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon} \right] \tag{2.93}$$

si ha

$$\frac{1}{q_m - 1} \leq \frac{1+\varepsilon}{q_m} \tag{2.94}$$

per tutti gli interi che soddisfano $m \geq m(\varepsilon)$. Quindi si può migliorare la stima del teorema ottenendo

$$\frac{1}{n} \log \delta_n \leq 4 \log q_1 + 4 \sum_{m=1}^{m(\varepsilon)-1} \frac{1}{q_m - 1} \log q_{m+1} + 4(1+\varepsilon) \sum_{m=m(\varepsilon)}^{+\infty} \frac{1}{q_m} \log q_{m+1}.$$

In secondo luogo si può mostrare, adattando un argomento usato da Yoccoz, che qualora la condizione di Brjuno non sia soddisfatta la serie maggiorante utilizzata nella dimostrazione del teorema precedente diverge. Definendo

$$\beta_k := \sigma_k \delta_k \ , \tag{2.95}$$

allora $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ é monotona non crescente, in più per ogni $k \geq 1$ e $s \geq 1$ vale

$$\beta_{ks-1} \geq \beta_{s-1}^k \ , \tag{2.96}$$

come si può vedere facilmente per induzione.
Sia ora $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $B(\nu) = +\infty$. Se $p_k/q_k$ sono le corrispondenti frazioni parziali, allora $A = \{q_k \mid q_{k+1} \geq (q_k+1)^2\}$ deve essere infinito e se denotiamo con $q'_0 < q'_1 < \ldots < q'_n$ i suoi elementi si ha che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q'_k} \log \frac{1}{\varepsilon_{q'_k}} = +\infty \ . \tag{2.97}$$

Poniamo ora $n_k = [q'_{k+1}/(q'_k + 1)]$. Utilizzando la definizione dei $\beta_k$ si ha che

$$\beta_{q'_{k+1}} \geq \frac{1}{\varepsilon_{q'_{k+1}}} \beta_{n_k(q'_k+1)-1} \geq \frac{1}{\varepsilon_{q'_{k+1}}} \beta_{q'_k}^{n_k} \ , \tag{2.98}$$

e dunque

$$\frac{1}{q'_{k+1}} \log \beta_{q'_{k+1}} \geq \frac{1}{q'_{k+1}} \log \frac{1}{\varepsilon_{q'_{k+1}}} + \alpha_k \frac{1}{q'_k} \beta_{q'_k} \geq \tag{2.99}$$

$$\geq \prod_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{q'_0} \log \beta_{q'_0} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{q'_j} \log \frac{1}{\varepsilon_{q'_j}} \right)$$

dove si é fatto uso di $\alpha_k = n_k q'_k/q'_{k+1}$. Poichè $\prod_{k=0}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$, otteniamo che

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \beta_n = +\infty \tag{2.100}$$

nell'ipotesi che la condizione di Brjuno sia violata.
Infine sottolineiamo che il metodo presentato non é ristretto alla mappa quadratica. Infatti se consideriamo una mappa polinomiale del tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu & -\sin 2\pi\nu \\ \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + P_n(x) \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

dove

$$P_j(x) = \sum_{l=2}^{j} p_l x^l \ , \tag{2.102}$$

non é difficile provare che anche in questo caso la condizione di Brjuno é una condizione sufficiente per l'esistenza di un cerchio invariante e che vale la seguente disuguaglianza

$$\log K(\nu) \geq -\log \frac{21}{4} - 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \tag{2.103}$$

(purchè si abbia $|p_l| \leq 1$ per ogni $l \geq 2$, come si può sempre ottenere per mezzo di un semplice scaling.
In questo caso la funzione di coniugazione si legge

$$\Phi_1 = 1\,, \quad \Phi_n = \frac{\sin 2\pi\nu}{(D_1 - D_n)} \sum_{l=2}^{n} k_l \sum_{k_1+\ldots+k_l=n} \Phi_{k_1} \ldots \Phi_{k_l}\ , \quad n \geq 2\,, \tag{2.104}$$

dove si é posto $k_l = 0$ per ogni $l \geq j+1$ .

Veniamo ora a discutere la relazione tra $K(\nu)$ e il bacino di stabilità per la mappa di Hénon in $\mathbb{R}^2$. La mappa quadratica considerata in $\mathbb{C}^2$ ha delle curve invarianti diffeomorfe a cerchi in un disco di raggio $K(\nu)$. Al di fuori di questo dominio non si hanno curve chiuse. Quindi il disco di Siegel rappresenta realmente il bacino di stabilità inteso come sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$. Le curve invarianti che riempiono la regione stabile sono intrinsecamente complesse e dunque non sono direttamente collegate con le corrispondenti curve del sistema considerato in $\mathbb{R}^2$. D'altro canto la dinamica reale rappresenta una sezione di quella complessa, e dunque sarebbe ragionevole supporre un

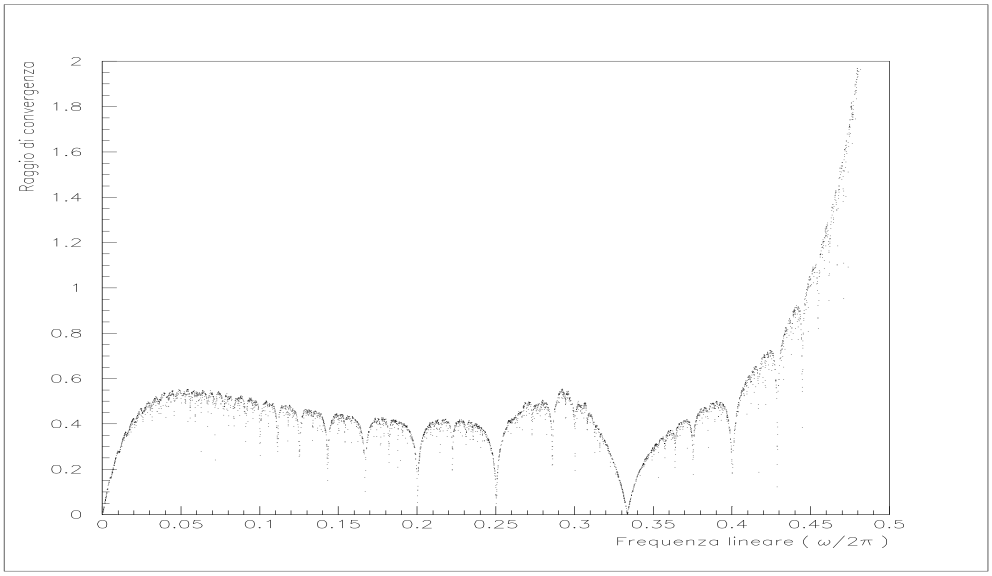



Figura 2.1: Grafico della funzione $K(\nu)$ per la mappa di Hénon complessa.

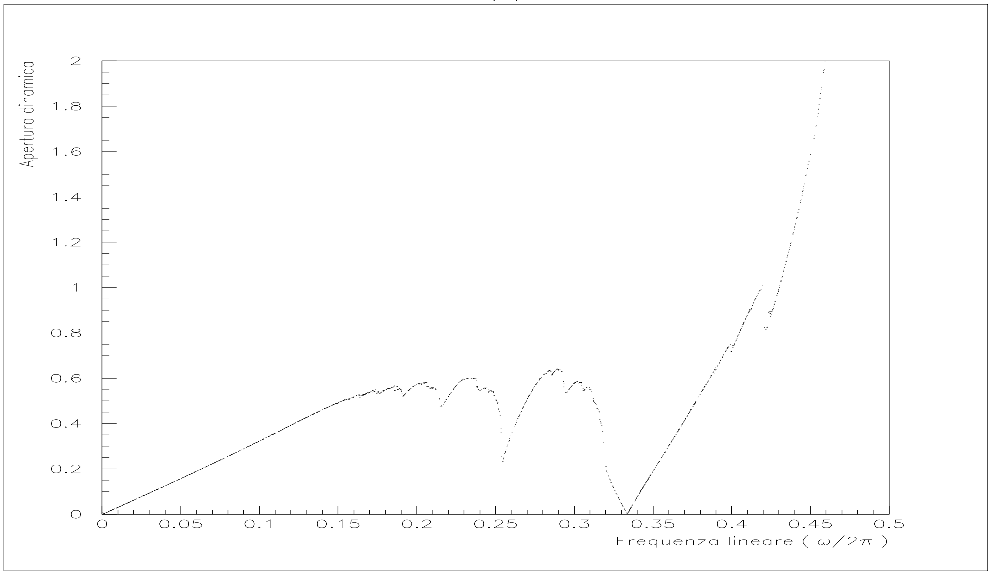



Figura 2.2: Grafico del bacino di stabilità per la mappa di Hénon reale.

qualche legame tra $K(\nu)$ e il bacino di stabilità per la mappa di Hénon usuale. Per confrontare le due situazioni abbiamo mostrato nella parte superiore di figura 2.2 il raggio di convergenza di $\Phi$ in funzione di $\nu$, calcolato utilizzando la (2.68), mentre nella parte inferiore é mostrato l'andamento del raggio del bacino di stabilità per la mappa di Hénon in funzione di $\nu$. Da un confronto dei due grafici é immediato rilevare le differenze. In particolare risulta marcatamente diverso l'andamento delle due funzioni per $\nu \to 0$. Per contro si ha un comportamento simile nell'intorno di $\nu = 1/3$ dove in entrambe i casi la regione di stabilità tende a zero e nell'intorno di $\nu = 1/2$ dove si ha stabilità in tutto lo spazio. Il comportamento generale per $1/4 \leq \nu \leq 1/2$ risulta poi somigliante nei due casi.
Per ottenere un accordo migliore bisogna sfruttare un metodo diverso.

## 2.4 Varietà invarianti e bacino di stabilità

Nel precedente paragrafo si é discusso un metodo per determinare il bacino di stabilità della mappa di Hénon sfruttando le proprietà del punto ellittico. Partendo dall'origine si tenta, muovendosi all'esterno, di determinare il raggio massimo della regione in cui si hanno curve chiuse. Il procedimento che illustreremo ora si basa sul punto fisso iperbolico della mappa e, partendo dall'esterno, nella zone in cui si hanno moti non confinati, tenta di approssimare il bordo dell'apertura dinamica. In primo luogo facciamo vedere che nel limite $\nu \to 0$ il bacino di stabilità é determinato esattamente del punto fisso iperbolico.
Consideriamo il modello hamiltoniano che corrisponde alla mappa di Hénon. Nel limite considerato detta hamiltoniana può essere vista come un integratore simplettico dell'hamiltoniana cubica

$$\mathcal{K}(y, p_y) = \frac{p_y^2 + y^2}{2} - \frac{y^3}{3}. \tag{2.105}$$

dove le nuove coordinate sono legate alle vecchie tramite le relazioni

$$x = \omega y \qquad p = \omega p_y \tag{2.106}$$

Il nuovo sistema definito dalla (2.105) é banalmente integrabile, essendo ad un grado di libertà. Come ben noto le sue soluzioni possono essere ottenute per mezzo delle funzioni ellittiche. La dinamica é chiara: si ha una separatrice all'interno della quale il moto é limitato e lo spazio delle fasi é foliato in curve invarianti diffeomorfe a cerchi. All'esterno, invece, si hanno curve aperte. Il bordo del bacino di stabilità rimane quindi identificato con la separatrice che può essere determinata facilmente. Il punto fisso instabile di (2.105) ha coordinate $y = 1,\ p_y = 0$, l'equazione della separatrice si legge

$$3(p_y^2 + y^2) - 2y^3 = 1, \quad \Longrightarrow 3\omega(p^2 + x^2) - 2x^3 = \omega^3. \tag{2.107}$$

Si tenga presente che, qualora $\omega$ sia differente da zero, $\mathcal{K}$ non rappresenta più un modello approssimato per la mappa di Hénon. Questo é dovuto al fatto che i due sistemi sono intrinsecamente differenti, essendo integrabile il primo, non integrabile il secondo (vedi la dimostrazione utilizzando il teorema di Melnikov). Solo nel limite le due dinamiche sono coniugate. Per un valore generico della frequenza si può, comunque, generalizzare il risultato precedente. Poichè l'analogo della separatrice per un sistema integrabile é dato dalle varietà invarianti nel caso non integrabile, affermiamo che vale il seguente risultato [54, 55, 56].
*Il bacino di Stabilità della mappa di Hénon é dato dall'inviluppo interno delle varietà invarianti relative al punto fisso iperbolico* $\mathbf{x}_i$.
Il risultato non é stato dimostrato, ma é supportato dall'evidenza numerica. In primo luogo abbiamo analizzato il bacino della mappa (2.16) per due valori particolari della frequenza $\omega/2\pi = 0.255$ e $\omega/2\pi = 0.420$. Nel primo caso la dinamica della mappa é fortemente dominata dalla risonanza 1/4. Si hanno quattro isole stabili di notevoli dimensioni che circondano un'area, anch'essa stabile, attorno all'origine. Il bacino di stabilità risulta dunque essere un insieme disconnesso. In figura 2.3 é presentato il risultato. La regione in grigio rappresenta il bacino di stabilità. Essa é calcolata numericamente applicando la mappa (2.16) ad un certo numero di condizioni iniziali $\mathbf{x}_0$, verificando se $H_2^{\circ n}(\mathbf{x}_0) \geq r$ dove $r$ é un raggio di controllo prefissato. In caso negativo $\mathbf{x}_0$ é considerato stabile. Il numero di iterazioni usate é dell'ordine di $5 \times 10^3$. Per quanto riguarda le varietà invarianti, queste sono costruite numericamente secondo quanto descritto nel primo capitolo. Un certo numero di condizioni iniziali sono scelte su di un piccolo segmento collineare con l'autovettore di $L_{H_2}$ relativo all'autovalore maggiore di uno. Applicando la mappa un numero sufficiente di volte si genera la varietà instabile, mentre quella stabile può essere costruita semplicemente sfruttando la trasformazione $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)$, in quanto vale

$$\mathcal{I}_1\left(\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)\right) = \mathcal{W}^s(\mathbf{x}_i). \tag{2.108}$$

Si vede chiaramente che le varietà descrivono perfettamente il bordo del bacino di stabilità perfino nei minimi dettagli delle isole secondarie.

In figura 2.4 presentiamo il grafico relativo al secondo valore di $\omega$. In questo caso siamo nella regione vicino alla risonanza 1/3 che é instabile per la mappa quadratica. Anche nel secondo caso si ha che l'apertura dinamica

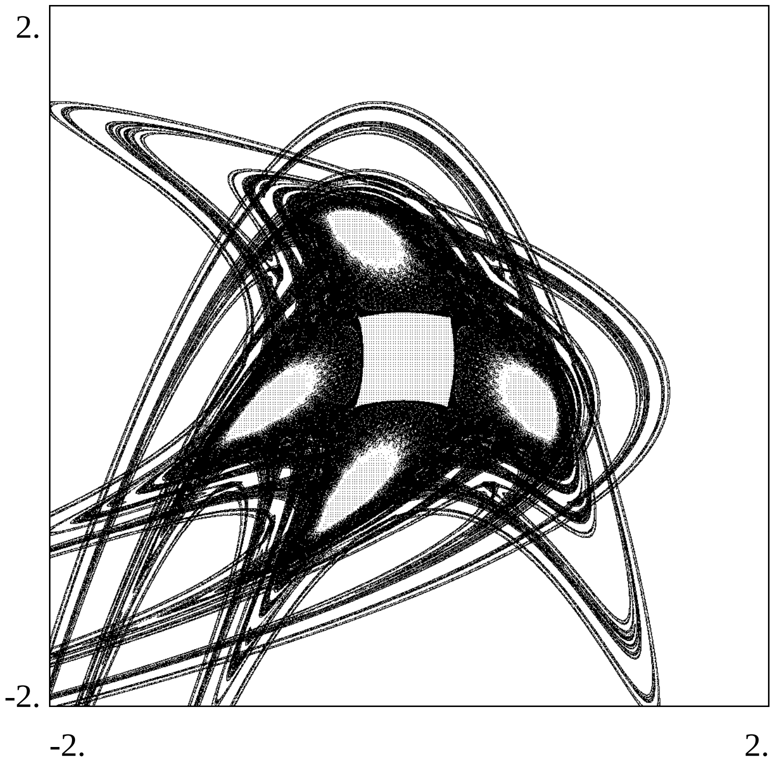



Figura 2.3: Varietà invarianti e bacino di stabilità per la mappa di Hénon ($\omega/2\pi = 0.255$).

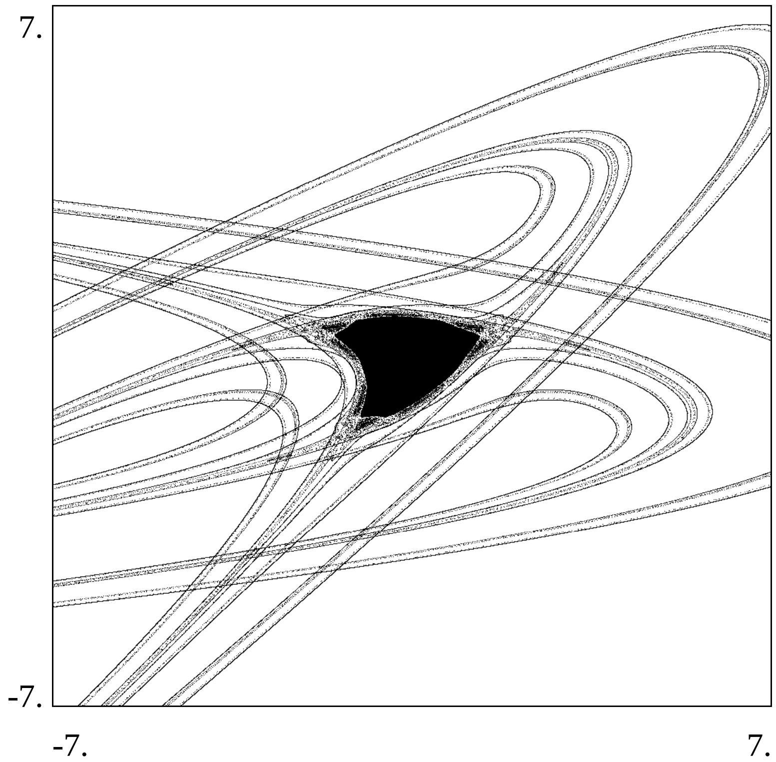



Figura 2.4: Varietà invarianti e bacino di stabilità per la mappa di Hénon ($\omega/2\pi = 0.42$).

é riprodotta perfettamente dall'inviluppo delle varietà invarianti. Dunque con la conoscenza del punto fisso iperbolico é possibile ricostruire la complessa struttura di isole che caratterizza il bordo del bacino di stabilità. La spiegazione di questo fatto risiede nella presenza di intersezione eterocliniche tra varietà invarianti relative a punti fissi instabili di diverso periodo. Per ogni valore di $\omega$ una particolare risonanza domina il moto e determina la topologia della regione stabile dello spazio delle fasi. Grazie alle intersezioni tra varietà differenti si ha che il punto fisso iperbolico é connesso con gli insiemi invarianti che determinano in maniera diretta l'apertura dinamica. Partendo dalla varietà più esterna é dunque possibile raggiungere il bordo del bacino di stabilità. Per mostrare questo meccanismo si sono costruite le varietà invarianti relative a punti fissi instabili di $H_2^{\circ n}$ e si sono confrontate con quelle di $H_2(\omega)$. Per dare una idea del processo dinamico di intersezione, si é considerata una successione $n_k$ e in corrispondenza si é definita

$$\mathcal{W}_k^u(p) = \bigcup_{j=1}^{n_k} \mathbf{F}^{\circ j}\left(\mathcal{W}_\beta^u(p)\right).$$

Si é poi disegnato

$$\mathcal{W}_k^u(p) \setminus \mathcal{W}_{k-1}^u(p) = \bigcup_{j=n_{k-1}}^{n_k} \mathbf{F}^{\circ j}\left(\mathcal{W}_\beta^u(p)\right)$$

Nella figura 2.5 abbiamo mostrato le varietà invarianti relative ai punti fissi di $H_2^{\circ 4}$ assieme a quelle di $H_2$. Il valore di $\omega$ é nuovamente 0.255 e, a causa della risonanza 1/4 le varietà di $H_2^{\circ 4}$ costituiscono il limite della dinamica stabile. Come si vede al crescere di $n_k$, $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)$ tendono ad approssimare le varietà interne. Ciò é mostrato dalla diminuzione di punti nella regione esterna. La velocità di questo processo non é uniforme, ma varia con $n_k$ (vedi figura 2.7). é importante sottolineare un fatto. La distribuzione di condizioni iniziali utilizzata per generare $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)$, che é scelta uniforme, cambia col tempo. Approssimativamente si ha una diminuzione esponenziale. A causa di questo fenomeno due identiche distribuzioni iniziali daranno origine a punti finali leggermente differenti. Ciò causa il persistere di punti isolati nella regione esterna. Una situazione analoga é poi mostrata in figura 2.6. In questo caso la frequenza lineare vale $\omega/2\pi = 0.22$ e la risonanza dominante é la 1/5. Dunque in questo caso si sono considerate le varietà di $H_2^{\circ 5}$. Ancora una volta le intersezioni eterocliniche sono chiaramente visibili. In ultimo mostriamo in figura 2.7 l'andamento della distanza dall'origine per un punto che si muove sugli insiemi $\mathcal{W}^{u,s}(\mathbf{x}_i)$. In ascissa é riportato il valore del tempo di calcolo impiegato su un CRAY X/MP per calcolare i punti della varietà

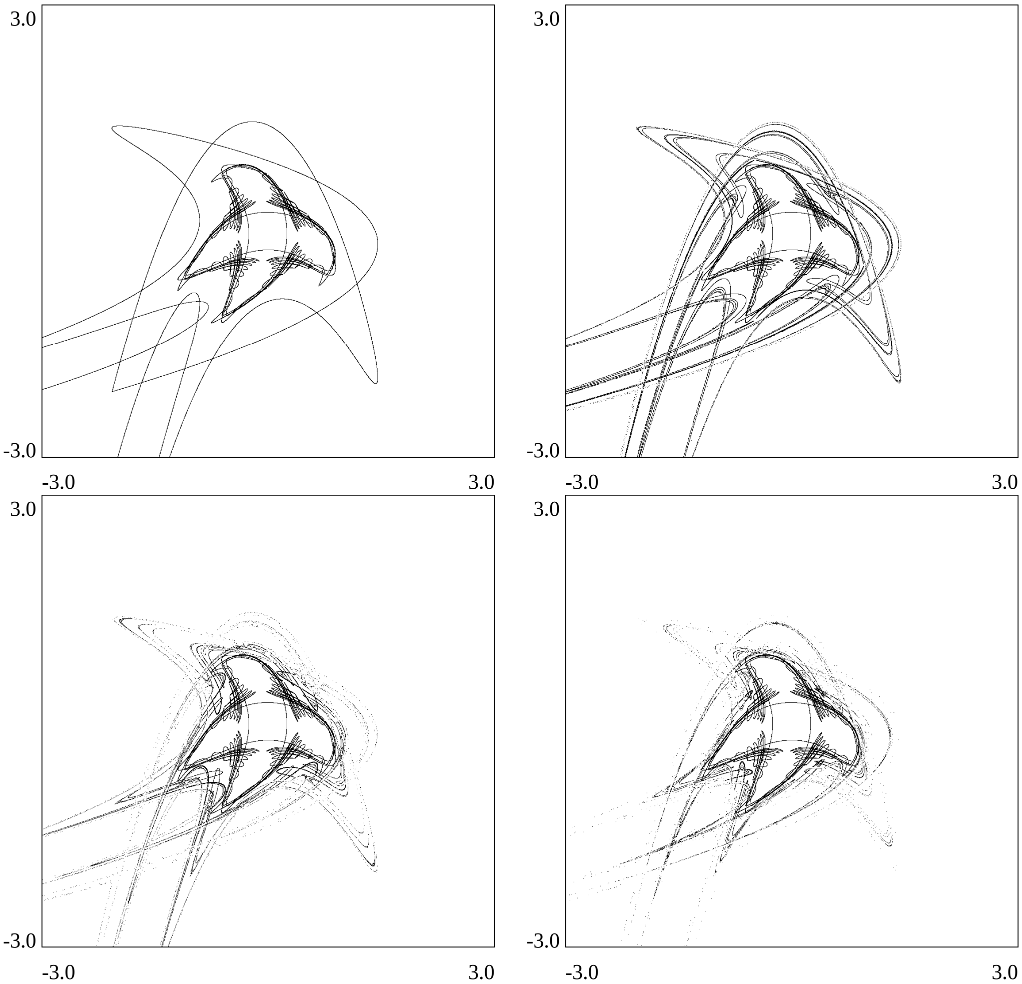



Figura 2.5: Esempio di intersezioni eterocliniche per la mappa di Hénon ($\omega/2\pi = .0255$).

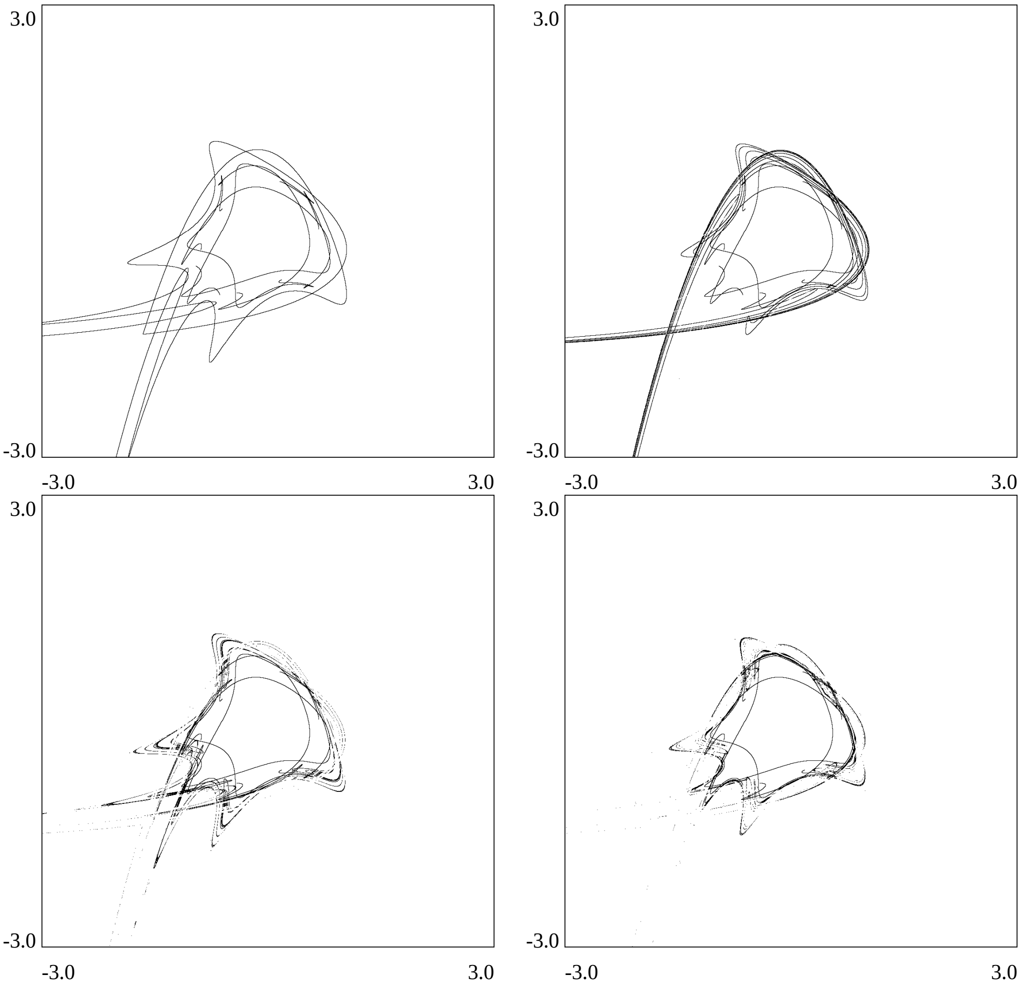



Figura 2.6: Esempio di intersezioni eterocliniche per la mappa di Hénon $(\omega/2\pi = 0.22)$.

, mentre in ordinata si ha la distanza minima di questi ultimi dall'origine. Si é considerata la distanza minima per evitare problemi dovuti alle oscillazioni omocliniche. In entrambi i grafici risulta chiaro come questa distanza raggiunga un limite ben definito. In più le curve sono chiaramente divise in tre parti distinte. Si ha un primo tratto in cui la variazione della distanza é quasi trascurabile. Questo corrisponde al moto vicino al punto fisso iperbolico dove il periodo diverge. Successivamente la distanza diminuisce, ma questa diminuzione dipende dal valore di $\omega$. In questa situazione si ha l'unione delle varietà relative a punti fissi di periodo diverso. Come é ovvio nel caso $\omega = 0.05$ il processo é rapido essendo il sistema quasi integrabile e dunque le oscillazioni eterocliniche trascurabili. Nel caso $\omega = 0.255$, invece, la zona caotica dovuta alle intersezioni della varietà di $H_2$ e $H_2^{\circ 4}$ ha dimensione macroscopica e dunque un certo numero di iterazioni sono richieste prima che $\mathcal{W}^{u,s}(\mathbf{x}_i)$ raggiunga il bordo del bacino di stabilità. Infine nella terza regione si ha il raggiungimento dell'apertura dinamica.

Fino ad ora si é mostrata la validità della nostra congettura esplorando solo un numero limitato di valori delle frequenze. $\omega$. Da ultimo mostreremo l'andamento complessivo del bacino di stabilità in funzione di $\omega$, confrontandolo con il minimo di $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)$. Il risultato é mostrato in figura 2.8. La curva continua rappresenta il raggio del disco inscritto nel bacino di stabilità calcolato numericamente. Si é dunque considerato solo la parte connessa escludendo le eventuali isole stabili che circondano l'origine. I punti rappresentano invece la distanza minima dall'origine della varietà invariante $\mathcal{W}^u(\mathbf{x}_i)$. Come si vede l'accordo é perfetto in tutto l'intervallo di variazione di $\omega$ confermando ulteriormente quanto ipotizzato all'inizio del paragrafo.

## 2.5 Generalizzazione al caso di mappe polinomiali

Nel tentativo di generalizzare il risultato precedente al caso di mappe polinomiali del tipo

$$H_n(\omega) : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + P_n(x) \end{pmatrix}, \tag{2.109}$$

con $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n x^n$,considereremo ora una mappa differente da quella quadratica. Studieremo dunque un mappa con nonlinearità cubica

$$H_3(\omega) : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + \beta x^2 + \alpha x^3 \end{pmatrix} \tag{2.110}$$

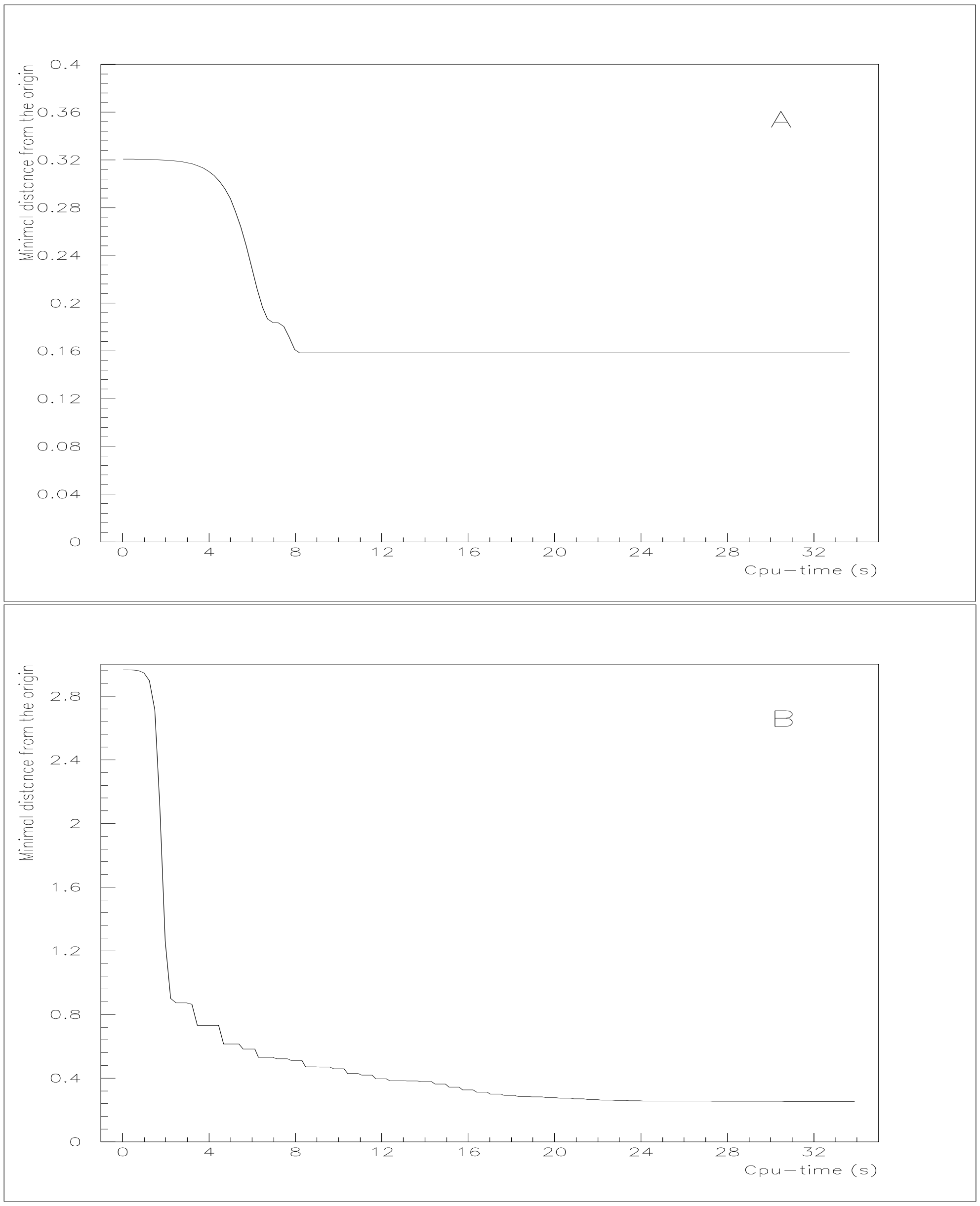



Figura 2.7: Minima distanza dall'origine delle varietà invarianti per differenti valori della frequenza lineare: $\omega = 0.05$ in $A$ e $\omega = 0.255$ in $B$.

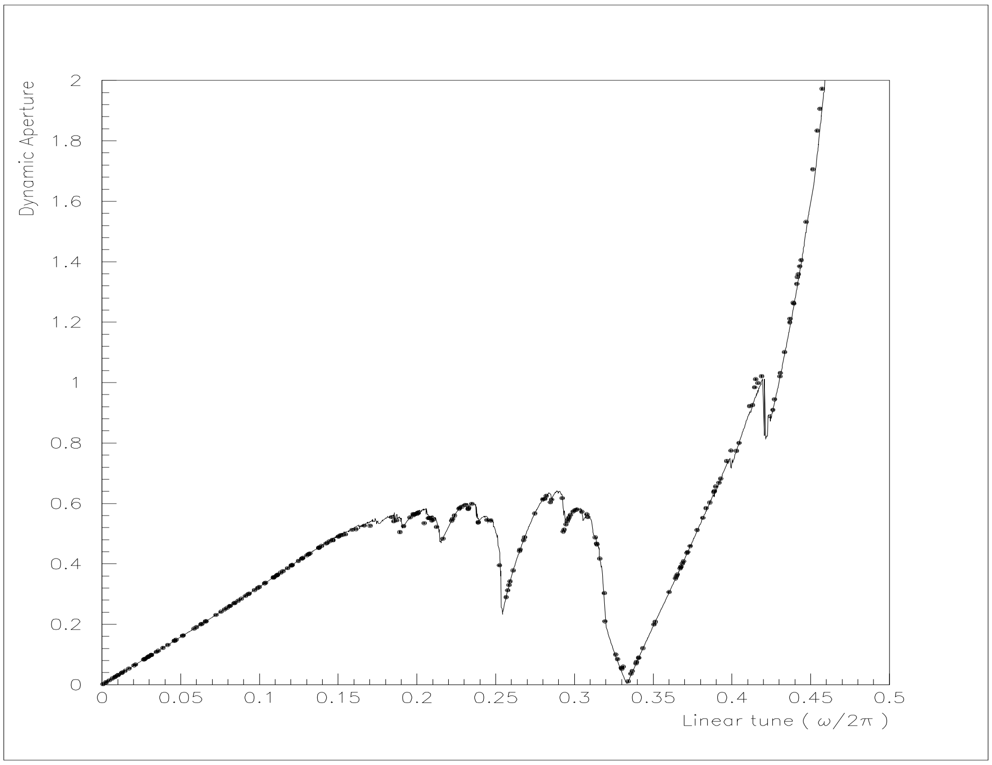



Figura 2.8: Confronto tra il bacino di stabilità calcolato numericamente e utilizzando le varietà invarianti.

derivabile da una hamiltoniana in cui si sia posto $G(x) = -\omega\left(\frac{\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha}{4}x^4\right)$. é facile vedere che $\beta$ può essere sempre posto uguale a uno riscalando opportunamente le variabili. Il caso in cui $\beta = 1$ e $\alpha$ é un parametro generico é già stato trattato [56]. Considereremo dunque la situazione semplificata in cui $\beta = 0$. Ciò ha il vantaggio di poter trattatare in modo analitico la mappa senza nulla togliere alla generalità dei risultati. La mappa che considereremo avrà dunque la seguente espressione

$$H_3(\omega) : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + \alpha x^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.111}$$

In primo luogo osserviamo che $\alpha$ può sempre essere posto uguale a $\pm 1$ a seconda del segno. Infatti se consideriamo nuove coordinate definite tramite le

$$X = \pm\sqrt{|\alpha|} \qquad Y = \pm\sqrt{|\alpha|},$$

allora la mappa (2.111) si leggerà

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} X \\ Y + \mathrm{sgn}(\alpha) X^3 \end{pmatrix} . \tag{2.112}$$

Dunque da ora in avanti supporremo che $\alpha = \pm 1$.
Anche in questo caso considereremo $\omega \in [0, \pi]$, in quanto se $\omega \in [\pi, 2\pi]$ allora possiamo semplicemente cambiare il segno del coefficiente del termine cubico. Si ha perciò solo uno scambio tra le due mappe cubiche fondamentali. Per quanto riguarda i casi limite, se $\omega = 0$, allora la (2.111) si riduce a

$$\begin{cases} x' &= & x \\ y' &= & y + \alpha x^3 \end{cases} \tag{2.113}$$

che ha come soluzione la

$$\begin{cases} x_n &= & x_0 \\ y_n &= & y_0 + n\alpha x_0^3 \end{cases} \tag{2.114}$$

e quindi si ha instabilità, ogni punto dello spazio delle fasi tende all'infinito per iterazione della mappa.
Ancora una volte se $\omega = \pi$, risulta che $R^2(\pi) = Id$ da cui $H_3(\pi)$ ha l'espressione

$$\begin{cases} x' &= & -x \\ y' &= & -y - x^3 \end{cases} \tag{2.115}$$

In questo caso la soluzione é

$$\begin{cases} x_n &= & (-1)^n x_0 \\ y_n &= & (-1)^n y_0 - (-1)^n n\alpha x_0^3 \end{cases} \tag{2.116}$$

e come conseguenza si ha instabilità anche in questo caso. Per quanto riguarda la fattorizzazione in involuzioni, anche in questo caso la mappa (2.111) si decompone nel prodotto di due trasformazioni $\mathcal{I}_1(\omega)$, $\mathcal{I}_2$. La prima coincide con quella già definita per la mappa di Hénon, mentre la seconda ha la forma

$$\mathcal{I}_2 : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix} . \tag{2.117}$$

Per quanto riguarda i punti fissi, in questo caso si hanno due situazioni differenti a seconda del segno di $\alpha$

$$\begin{cases} \text{se} \quad \alpha \geq 0 \quad \text{allora} & \text{nessuna soluzione reale} \\ \text{se} \quad \alpha < 0 \quad \text{allora} & \mathbf{x}_{1,2} = \left( \pm\sqrt{\frac{2\tan\frac{\omega}{2}}{|\alpha|}}, \pm\sqrt{\frac{2\tan^3\frac{\omega}{2}}{|\alpha|}} \right) \end{cases} \tag{2.118}$$

Per quanto riguarda la loro stabilità é immediato verificare che la traccia della parte lineare di $H_3$ vale

$$Tr(L_{H_3}(\omega)) = 2\left(\frac{5\tan^2\frac{\omega}{2}+1}{\tan^2\frac{\omega}{2}+1}\right)$$

e quindi i due punti fissi sono iperbolici per ogni valore della frequenza lineare. A questo punto risulta chiaro che non é possibile generalizzare banalmente i risultati ottenuti per la mappa di Hénon al caso di quella cubica. Infatti per $\alpha \geq 0$ non vi sono punti fissi instabili. é necessario passare ai punti fissi iperbolici di periodo superiore. Le soluzioni di

$$H_3^{\circ 2}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}) \tag{2.119}$$

si possono determinare facilmente. Per quanto detto sulle relazioni tra punti fissi ed involuzioni dovrebbe risultare chiaro che non esistono soluzioni reali di (2.119) per $\alpha \leq 0$. Nel secondo caso, invece, si hanno sempre due soluzioni reali

$$\hat{\mathbf{x}}_{1,2} = \left( \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha\tan\frac{\omega}{2}}}, \mp\sqrt{\frac{2}{\alpha\tan^3\frac{\omega}{2}}} \right). \tag{2.120}$$

dove vale $H_3(\mathbf{x}_1) = x_2$ e viceversa. Anche in questo caso la loro stabilità é determinata facilmente e i due punti fissi risultano essere di tipo iperbolico indipendentemente dal valore della frequenza lineare.
La strategia per la determinazione del bacino di stabilità di $H_3$ sarà dunque la seguente: nel caso in cui $\alpha \leq 0$ si utilizzeranno i punti fissi iperbolici e le varietà che emanano da essi. Se $\alpha > 0$ si utilizzeranno,invece, i punti fissi di periodo due e le relative varietà. Nella figura 2.9 sono presentati i risultati nel caso in cui il coefficiente del termine cubico sia negativo. Come per la mappa quadratica, si ha una sorprendente ricostruzione dell'apertura dinamica da parte dell'inviluppo delle varietà invarianti. Le strutture fini sono riprodotte in tutti i loro dettagli. Ancora una volta ciò é dovuto alle intersezioni eterocliniche tra le diverse varietà relative a punti fissi di periodo differente. Si sottolinea anche che, avendosi due punti fissi iperbolici distinti, si hanno

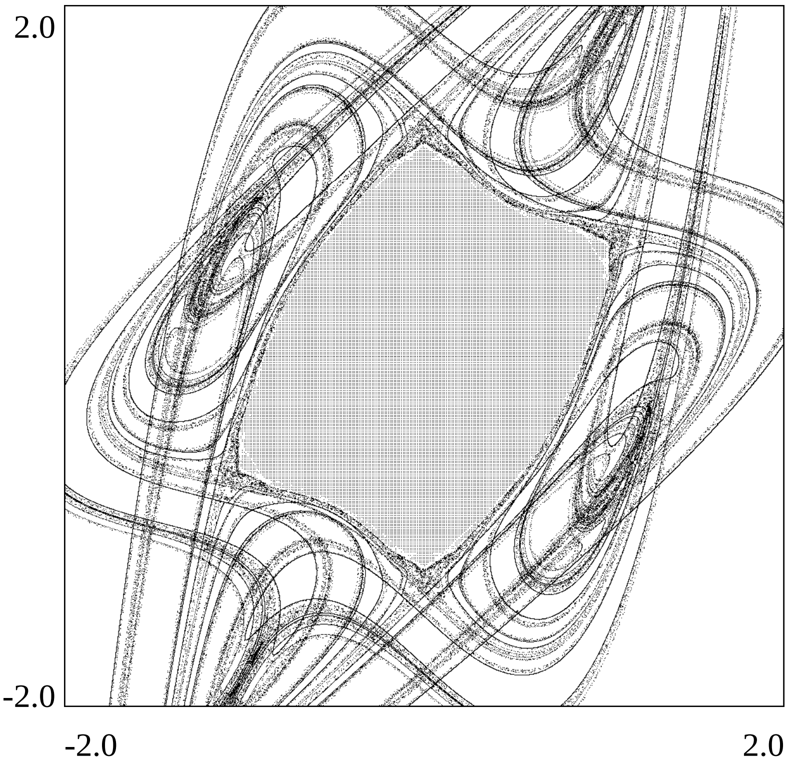



Figura 2.9: Varietà invarianti e bacino di stabilità per la mappa cubica ($\omega/2\pi = 0.34$, $\alpha = -1$).

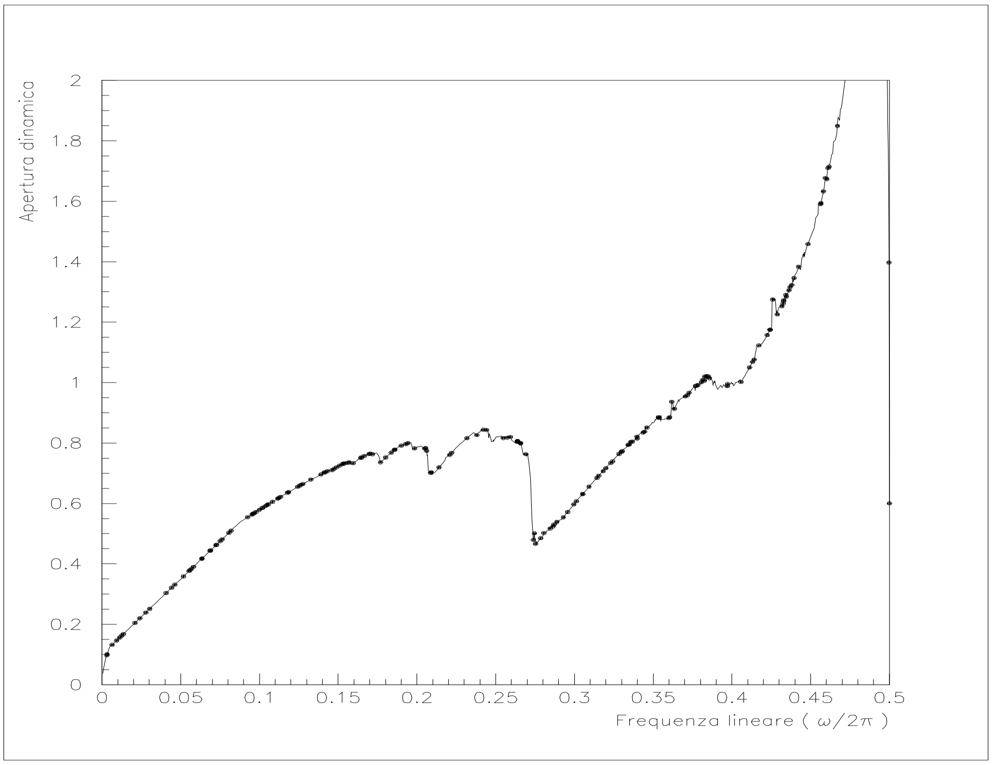



Figura 2.10: Bacino di stabilità per la mappa cubica ($\alpha = -1$) determinato con i due metodi.

intersezioni eterocliniche tra le relative varietà. L'andamento del bacino di stabilità in dipendenza dalla frequenza lineare é riportato nella figura 2.10. In questo caso $\alpha = -1$. La curva continua rappresenta il raggio del disco inscritto nel bacino di stabilità, raggio calcolato numericamente iterando la mappa, mentre i punti forniscono la distanza minima delle varietà dall'origine. Ancora una volta l'apertura dinamica é ben riprodotta dall'inviluppo di $\mathcal{W}^{u,s}(p)$.

Infine consideriamo il caso $\alpha = 1$. A titolo di esempio mostriamo l'apertura dinamica per un valore di $\omega = 0.255$. In figura 2.11 abbiamo presentato il confronto tra il bacino di stabilità e le varietà di $H_3^{\circ 2}$. Anche se in questo caso sono stati utilizzati punti fissi instabili di periodo due, si ha un perfetto accordo tra il metodo proposto e l'usuale approccio numerico. A questo punto dovrebbe essere chiaro come generalizzare il risultato ottenuto per le mappe considerate al caso generale di mappe polinomiali del tipo (2.109). A proposito dei punti fissi, si é provato che se il grado della mappa é pari, oppure dispari con coefficiente $p_n$ negativo, allora si ha sempre almeno un

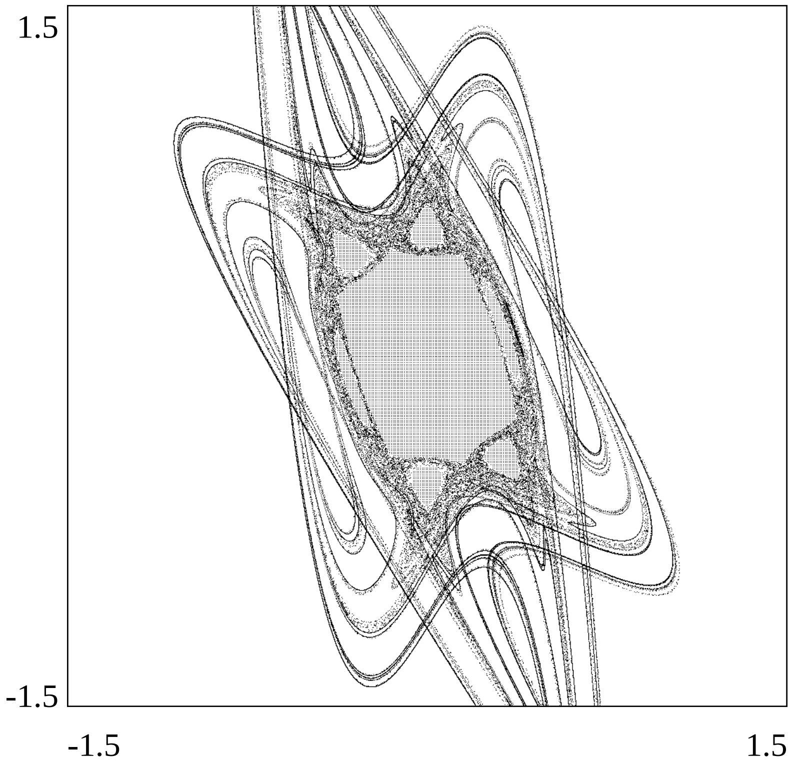



Figura 2.11: Varietà invarianti dei punti fissi di periodo due e bacino di stabilità per la mappa cubica($\omega/2\pi = 0.255$, $\alpha = 1$).

punto fisso iperbolico esterno. In questi casi si potranno dunque usare le varietà relative a detti punti instabili. Nel caso, invece, il grado sia dispari e $p_n$ positivo, allora bisogna considerare i punti fissi di $H_n^{\circ 2}$, in quanto non si ha la garanzia dell'esistenza dei punti iperbolici di periodo uno in tutto l'intervallo di variazione di $\omega$. Utilizzando poi le varietà connesse sarebbe possibile ricostruire il bacino di stabilità.

Si potrebbe sollevare il problema se, nel caso in cui l'ordine della mappa sia dispari ed il coefficiente di ordine massimo positivo, si abbia sempre almeno un punto fisso iperbolico di periodo due per poter costruire le varietà. La risposta a tale quesito é affermativa. Vale infatti il seguente risultato.

**Teorema** *Consideriamo una mappa del tipo*

$$H_{2n+1}(\omega) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y + P_{2n+1}(x) \end{pmatrix} \quad \omega \in [0, \pi], \tag{2.121}$$

*dove* $P_{2n+1}(x) = \sum_{j=2}^{2n+1} p_j x^j$*. Allora se vale* $p_{2n+1} > 0$ *la mappa* $H_{2n+1}(\omega)$ *ha sempre almeno due punti fissi di periodo due.*

**Dim.**
Per quanto dimostrato in precedenza, affinchè $\mathbf{x}$ sia un punto fisso di $H_{2n+1}^{\circ 2}(\omega)$, é necessario che sia soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{I}_2(\mathbf{x}) & = & \mathbf{x} \\ \\ \mathcal{I}_2\left(H_{2n+1}(\mathbf{x})\right) & = & H_{2n+1}(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.122}$$

Si può vedere facilmente che la (2.122) é equivalente alla condizione

$$2x \sin\omega + \cos\omega P_{2n+1}\left(x\cos\omega - \frac{\sin\omega}{2} P_{2n+1}(x)\right) = 0. \tag{2.123}$$

Il problema é che anche i punti fissi di $H_{2n+1}(\omega)$ sono soluzioni di (2.122) che soddisfano la relazione

$$2\tan\frac{\omega}{2}x + P_n(x) = 0. \tag{2.124}$$

Per eliminare le soluzioni banali considereremo

$$\mathcal{F}(x) = \frac{2x\sin\omega + \cos\omega P_{2n+1}\left(x\cos\omega - \frac{\sin\omega}{2}P_{2n+1}(x)\right)}{2\tan\frac{\omega}{2}x + P_n(x)}. \tag{2.125}$$

In questo modo le soluzioni di $\mathcal{F}(x) = 0$ sono solamente i punti fissi di periodo due di $H_{2n+1}(\omega)$. é immediato osservare che $\mathcal{F}(0) = \sin\omega/\tan\frac{\omega}{2}$ e dunque é sempre positiva per ogni $\omega \in [0, 2\pi]$. In più se $x \to \pm\infty$ l'andamento di $\mathcal{F}(x)$ é dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &\approx \frac{-p_{2n+1}^{2n+2}\left(\frac{\sin\omega}{2}\right)x^{(2n+1)^2}\left[1+\mathcal{O}(\frac{1}{x})\right]}{p_{2n+1}x^{2n+1}\left[1+\mathcal{O}(\frac{1}{x})\right]} \\ &\approx -p_{2n+1}^{2n+1}\left(\frac{\sin\omega}{2}\right)x^{2n2n+1}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right].\end{aligned}$$

Ciò significa che a seconda del segno di $p_{2n+1}$ il limite di $\mathcal{F}(x)$ per $x \to \pm\infty$ sarà differente. In particolare se $p_{2n+1} > 0$, $\mathcal{F}(x) \to -\infty$ e quindi ammette almeno due soluzioni reali. Il teorema é dunque dimostrato. $\square$

In aggiunta si può affermare che esiste sempre almeno un punto fisso instabile, in quanto, se ciò non fosse vero si avrebbero almeno due punti fissi stabili. Dunque l'indice di Poincaré di detta mappa sarebbe uguale a due, ma questo non é possibile per alcuna mappa continua.

## 2.6 Analisi di un caso realistico: il modello di SPS

Per concludere questo capitolo presentiamo l'analisi di un modello realistico di macchina acceleratrice circolare compiuta utilizzando le tecniche descritte in precedenza. Il modello scelto rappresenta una versione bidimensionale del SuperProtonSynchrotron del CERN.
La struttura di questa macchina é relativamente semplice. Ha una simmetria di ordine sei, con celle FODO lunghe circa 108 metri. L'avanzamento di fase é prossimo a 90 gradi. In aggiunta agli elementi lineari, si ha una serie di sestupoli e ottupoli. I primi hanno due possibili funzioni: correzione degli effetti cromatici prodotti dai quadrupoli (cinque famiglie indipendenti di elementi) e estrazione lenta del fascio (otto sestupoli). Gli ottupoli hanno invece il compito principale di ridurre le instabilità nella macchina. In un tipico esperimento dedicato agli studi di dinamica non lineare per LHC, la configurazione utilizzata per SPS prevede l'uso di tutti i sestupoli. In particolare quelli normalmente utilizzati per l'estrazione del fascio vengono eccitati con correnti molto intense, in modo da generare in maniera controllata forti non linearità nella macchina. In questi esperimenti gli ottupoli non vengono utilizzati. Sotto queste ipotesi la mappa di trasferimento di SPS può essere

approssimata in maniera ragionevole dalla composizione delle otto mappe relative ai sestupoli di estrazione. I sestupoli cromatici essendo molto più deboli possono essere trascurati. La mappa di trasferimento si potrà scrivere come

$$\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_1 \circ \ldots \mathbf{M}_8(\mathbf{x}), \tag{2.126}$$

dove $M_j$ é la mappa di trasferimento del $j$-esimo sestupolo di estrazione. Queste mappe sono state determinate utilizzando il programma SIXTRACK. La mappa complessiva $\hat{\mathbf{M}}$ é stata trasformata in coordinate normalizzate, ottenendo come forma finale

$$\mathbf{y}' = \mathcal{M}(\mathbf{y}) = R(\omega) \circ \mathbf{N}(\mathbf{y}), \tag{2.127}$$

in cui $R(\omega)$ rappresenta una matrice di rotazione, mentre $\mathbf{N}$ la parte non lineare della mappa. Il valore di $\omega/2\pi$ é stato posto uguale a 0.636, un valore tipico per gli esperimenti di dinamica non lineare su SPS.
Per applicare le tecniche descritte in precedenza, é necessario conoscere le coordinate dei punti fissi instabili. Essendo la mappa $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ di grado pari ($2^8$), bisognerà conoscere i punti fissi iperbolici di periodo uno. A tal scopo si é utilizzato un programma chiamato GIOTTO [57]. GIOTTO permette la visualizzazione dello spazio delle fasi per sistemi dinamici rappresentati da mappe e, nel contempo, ha la possibilità di determinare i punti fissi ellittici e iperbolici di periodo arbitrario, utilizzando un metodo di bisezione [58]. Un esempio delle possibilità di questo programma é mostrato in figura 2.12 dove si sono rappresentate le orbite di $\mathcal{M}(\mathbf{x})$. Si vedono chiaramente le isole relative alla risonanza 1/5 tipiche del valore di $\omega$ scelto. I punti fissi instabili sono stati calcolati con l'ausilio di GIOTTO. Per costruire le varietà invarianti si é scelto il punto fisso più esterno. Questa decisione non influisce sui risultati, in quanto tutte le varietà sono connesse. In figura 2.13 si sono riportati i risultati. La regione in grigio rappresenta il bacino di stabilità calcolato numericamente. La struttura dell'apertura dinamica coincide perfettamente con l'inviluppo interno delle varietà invarianti. Si ritrova dunque il risultato ottenuto nei casi studiati nei precedenti paragrafi.

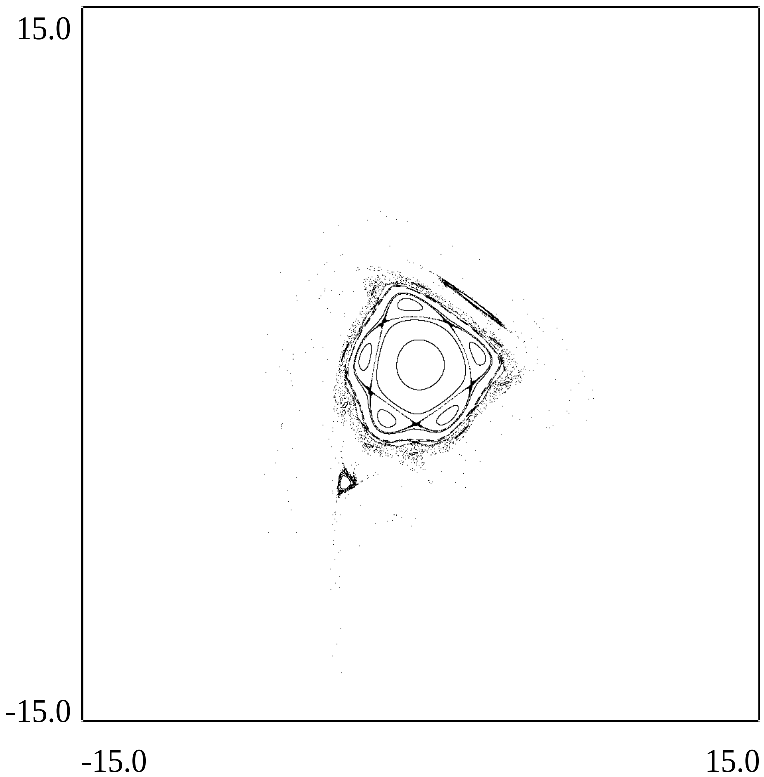



Figura 2.12: Spazio delle fasi relativo al modello bidimensionale di SPS.

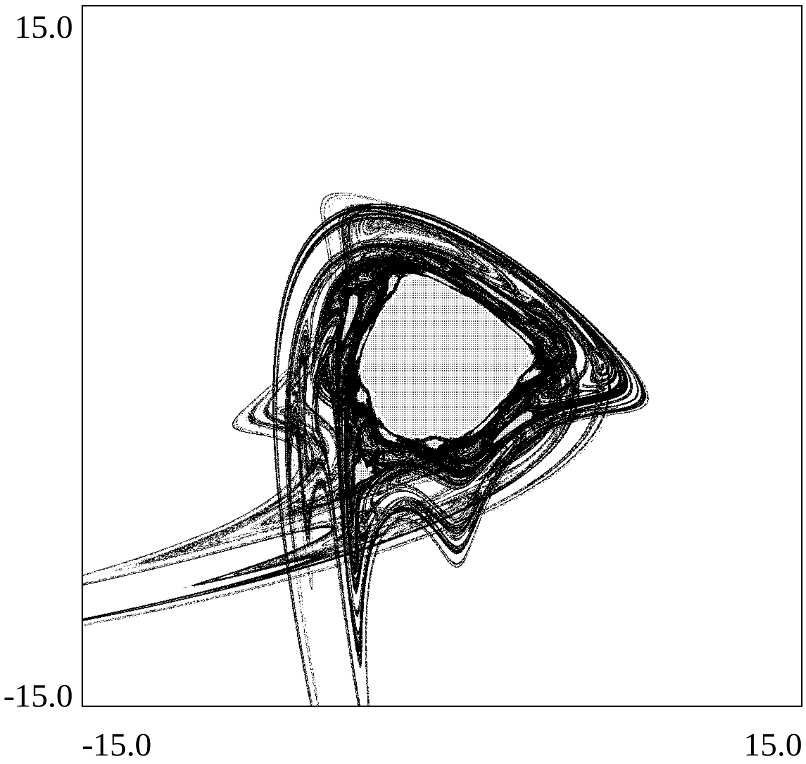



Figura 2.13: Varietà invarianti e bacino di stabilità per il modello di SPS.

# Capitolo 3

# Mappe Simplettiche e Forme Normali Applicate allo studio del Moto Betatronico

In questo capitolo si tratta del problema di modellizzare il moto betatronico in un acceleratore circolare di particelle utilizzando il formalismo delle *Mappe Simplettiche*. Lo scopo ultimo é di studiare la dinamica in un acceleratore analizzando una mappa simplettica opportuna tramite l'uso delle *Forme Normali*. L'uso di una dinamica discreta é particolarmente adatto alla descrizione del moto in una macchina acceleratrice, in quanto i campi magnetici risultano essere delle funzioni discontinue a tratti della coordinata curvilinea associata all'orbita di riferimento. Infatti, per costruzione, un acceleratore é costituito da una successione di elementi magnetici distinti cui sono interposte sezioni vuote, e, con buona approssimazione, é possibile trascurare gli effetti di bordo dovuti alle dimensioni finite dei magneti stessi. Dopo avere mostrato come si possono costruire mappe di trasferimento per i diversi elementi magnetici e come si connetta questa descrizione locale con la dinamica su di un giro, si introduce il concetto di *Forma Normale* per un diffeomorfismo in quattro dimensioni nell'intorno di un punto fisso stabile (ellittico) discutendone brevemente le proprietà. Utilizzando le forme normali é possibile estrarre parecchie informazioni relative alla dinamica non lineare; in particolare ci soffermeremo sul concetto di tune shift discutendone il significato fisico e la dipendenza funzionale dai vari termini multipolari presenti nello sviluppo del campo magnetico. Detta analisi verrà generalizzata al caso in cui si ha una dipendenza parametrica dal momento delle particelle nelle equazioni del moto. Utilizzando questo risultato e la teoria lineare di Courant-Snyder si mostrerà come é possibile determinare la dipendenza dei *parametri di Twiss* dai termini multipolari nel campo magnetico sempre nel caso in cui si abbia una dipendenza dal momento cinetico delle particelle. Infine verrà descritta la procedura che permette di minimizzare il tune shift dovuto agli effetti non lineari connessi con i coefficienti multipolari nello sviluppo del campo magnetico.

## 3.1 Mappe di trasferimento e moto betatronico

Consideriamo un reticolo magnetico di $E$ elementi $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_E$. Indichiamo con $x, y$ rispettivamente gli assi orizzontale e verticale perpendicolari all'orbita, e con $s$ la coordinata curvilinea lungo l'orbita. Trascurando l'accoppiamento con il moto longitudinale, analizziamo il moto trasversale in uno spazio di fase a quattro dimensioni $\mathbb{R}^4$, i cui punti sono indicati con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}, \qquad p_x = \frac{dx}{ds}, \quad p_y = \frac{dy}{ds}. \tag{3.1}$$

Chiamato $\rho(s)$ il raggio di curvatura, scriviamo lo sviluppo multipolare del campo magnetico come

$$B_y(x, y; s) + iB_x(x, y; s) = B_1 - B_1\rho(s) \sum_{n=1}^{M} [k_{n+1}(s) + i\, j_{n+1}(s)] \frac{(x+iy)^n}{n!}. \tag{3.2}$$

Il campo di dipolo $B_1$ é parallelo all'asse $y$ ed é dato da $B_1 = pc/(\rho e)$ per un valore $p$ dell'impulso; $k_n$ e $j_n$ sono rispettivamente i gradienti di multipolo normale e antisimmetrico (noti fino all'ordine $M$).
L'equazione del moto per una particella carica é [59]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{ds^2} + \left(\dfrac{1}{\rho(s)^2} + k_2(s)\right)x = \Re\left[\displaystyle\sum_{n=2}^{M} \frac{k_{n+1}(s) + ij_{n+1}(s)}{n!}(x+iy)^n\right] \\ \dfrac{d^2y}{ds^2} - k_2(s)y = -\Im\left[\displaystyle\sum_{n=2}^{M} \frac{k_{n+1}(s) + ij_{n+1}(s)}{n!}(x+iy)^n\right] \end{cases}. \tag{3.3}$$

I gradienti multipolari sono funzioni discontinue dato che gli effetti al bordo sono trascurabili. Descriviamo perciò i gradienti tramite funzioni costanti a tratti, introducendo la *mappa di trasferimento* $\mathbf{M}_j$ su ciascun elemento magnetico. L'elemento magnetico $\mathcal{M}_j$ ricopre l'arco $[s_{j-1}, s_j]$ con $j = 1, \dots, E$, ove $s_0 = 0$ e $s_E = 2\pi R$ é la lunghezza totale dell'anello (vedi la figura 3.1). La mappa di trasferimento $\mathbf{M}_j$ per l'elemento magnetico $\mathcal{M}_j$ trasforma le

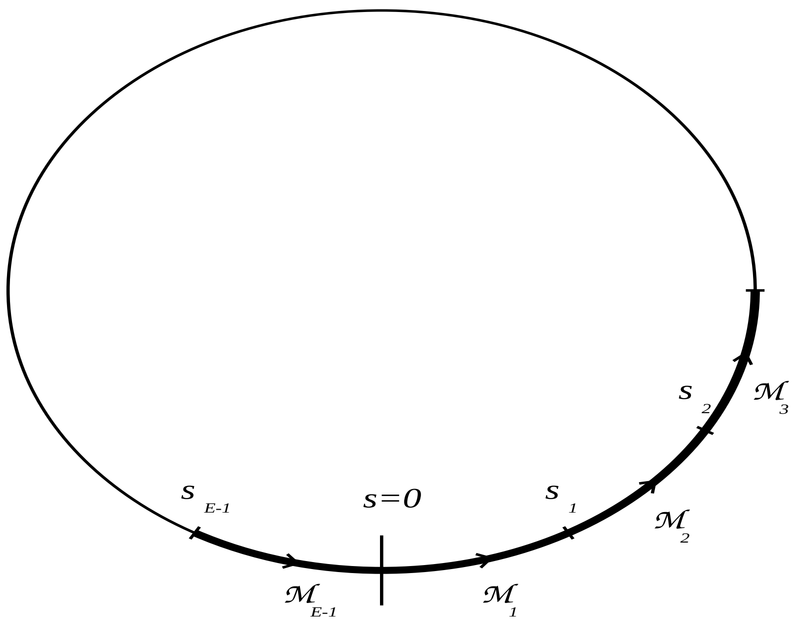



Figura 3.1: Schema di una macchina acceleratrice con inclusi gli elementi magnetici.

coordinate nello spazio delle fasi a $s = s_{j-1}$ nelle coordinate a $s = s_j$ secondo

$$\mathbf{x}(s_j) = \mathbf{M}_j(\mathbf{x}(s_{j-1})). \tag{3.4}$$

La mappa su un giro $\mathbf{F}(0)$, detta mappa di Poincaré alla sezione $s = 0$, é data da

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{M}_E \circ \cdots \circ \mathbf{M}_2 \circ \mathbf{M}_1. \tag{3.5}$$

Se si cambia la sezione di Poincaré da $s = 0$ a $s = s_k$ la mappa su di un giro $\mathbf{F}(s_k)$ diventa

$$\mathbf{F}(s_k) = \mathbf{M}_k \circ \mathbf{M}_{k-1} \circ \ldots \circ \mathbf{M}_1 \circ \mathbf{M}_E \circ \ldots \circ \mathbf{M}_{k+2} \circ \mathbf{M}_{k+1}. \tag{3.6}$$

Le mappe di trasferimento tra due sezioni adiacenti $s = s_k$ e $s = s_{k-1}$ sono correlate da

$$\mathbf{F}(s_k) = \mathbf{M}_k \circ \mathbf{F}(s_{k-1}) \circ \mathbf{M}_k^{-1}. \tag{3.7}$$

La relazione (3.7) resta invariata quando iteriamo, cioé quando sostituiamo $\mathbf{F}(s_{k-1})$ e $\mathbf{F}(s_k)$ con $\mathbf{F}^{\circ n}(s_{k-1})$ e $\mathbf{F}^{\circ n}(s_k)$.
Consideriamo ora una particella di condizione iniziale $\mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{x}_0$ assegnata a $s = 0$ e sia $\mathbf{x}_{nE+k} \equiv \mathbf{x}(s_{nE+k})$ il punto dell'orbita a $s = s_k$ dopo $n$ rivoluzioni complete. L'orbita é calcolabile come segue, in accordo con il cosiddetto *algoritmo di tracking*:

$$\mathbf{x}_{nE+k} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{nE+k-1}). \tag{3.8}$$

Le orbite, a una sezione fissata, sono date dalla successione $\{\mathbf{x}_{nE+k}\}_{n=0}^{\infty}$ per un $k$ fissato; si ottengono iterando la mappa su un giro $\mathbf{F}(s_k)$

$$\mathbf{x}_{(n+1)E+k} = \mathbf{F}(s_k; \mathbf{x}_{nE+k}). \tag{3.9}$$

Osserviamo che il calcolo dell'orbita per mezzo dell'algoritmo di tracking può essere spinto fino alla precisione di macchina. Il problema é dovuto al fatto che non é possibile memorizzare la *mappa su un giro* esatta dato che essa consiste in un polinomio di grado $m^E$ se una qualunque mappa di trasferimento é di grado $m$. Si possono d'altronde facilmente calcolare dei troncamenti di tale polinomio, ma questi non possono essere usati per il calcolo delle orbite, essendo non simplettici. Per ciascuna mappa di trasferimento $\mathbf{M}_k$, separiamo i contributi lineari da quelli non lineari

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{L}_k \circ (\mathbf{1} + \mathbf{N}_k), \tag{3.10}$$

ed effettuiamo la stessa separazione per la mappa su un giro $\mathbf{F}(s_k)$

$$\mathbf{F}(s_k) = \mathbf{L}(s_k) \circ (\mathbf{1} + \mathbf{N}(s_k)), \tag{3.11}$$

ove $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x}$ e $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$ sono definiti secondo

$$\begin{array}{rcc} \mathbf{L}(s_k) & = & \mathbf{L}_k\mathbf{L}_{k-1}\ldots\mathbf{L}_1\mathbf{L}_E\ldots\mathbf{L}_{k+1} \\ \mathbf{N}(s_k) & = & \mathbf{N}_k \circ \mathbf{N}_{k-1} \circ \ldots \circ \mathbf{N}_1\mathbf{N}_E\ldots\mathbf{N}_{k+1} \end{array} \tag{3.12}$$

D'ora in avanti faremo riferimento alla sezione $s = 0$ per la mappa su un giro e la indicheremo con $\mathbf{F}$ chiamando $\mathbf{L}$ la sua parte lineare, a meno che non si faccia esplicito riferimento a una sezione diversa.
Nel caso di elementi lineari il calcolo della mappa di trasferimento non presenta alcun problema. A titolo di esempio ci soffermeremo su magneti di tre

diversi tipi: di deriva, di dipolo rettangolare e di quadrupolo (focalizzatore e defocalizzatore). Dette mappe si ottengono risolvendo l'equazione (3.3) dove $\rho(s)$ e $k_1(s)$ assumono valori costanti sul corrispondente arco, di lunghezza $\ell$, $(s_{j-1}, s_j)$. In questo caso i gradienti multipolari di ordine più elevato si annullano.

Per quanto riguarda la deriva, questa elemento non é altro che una sezione rettilinea vuota ($\rho = \infty$, $k_1 = 0$) di lunghezza $\ell$. La corrispondente mappa lineare $\mathbf{L}_{drift}$ é data da

$$\mathbf{L}_{deriva} = \begin{pmatrix} 1 & \ell & 0 & 0 \\ & & & ; \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & ; \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ & & & ; \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Nel caso si consideri un dipolo rettangolare, il campo dipolare assume un valore costante e $\rho < \infty$, $k_1 = 0$. La corrispondente mappa lineare $\mathbf{L}_{dip.}$ é data da

$$\mathbf{L}_{dip.} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\ell}{\rho} & \rho \sin \frac{\ell}{\rho} \\ 0 & 0 & -\rho \sin \frac{\ell}{\rho} & \cos \frac{\ell}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

dove con $\ell$ si é indicata la lunghezza dell'elemento.

Infine il quadrupolo focalizzatore é una sezione rettilinea di lunghezza $\ell$ con un campo costante quadrupolare $\rho = \infty$, $k_1 > 0$ e la corrispondente mappa lineare $\mathbf{L}_{quad.}$ é data da

$$\mathbf{L}_{quad.} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_1}\ell) & \frac{1}{\sqrt{k_1}}\sin(\sqrt{k_1}\ell) & 0 & 0 \\ -\sqrt{k_1}\sin(\sqrt{k_1}\ell) & \cos(\sqrt{k_1}\ell) & 0 & \\ 0 & 0 & \mathrm{ch}(\sqrt{k_1}\ell) & \frac{1}{\sqrt{k_1}}\mathrm{sh}(\sqrt{k_1}\ell) \\ 0 & 0 & \sqrt{k_1}\mathrm{sh}(\sqrt{k_1}\ell) & \mathrm{ch}(\sqrt{k_1}\ell) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

La matrice di quadrupolo defocalizzatore, corrispondente al caso $k_1 < 0$, é data dalla medesima espressione (3.15) ove si scambiano tra loro i blocchi diagonali $2 \times 2$ superiore e inferiore. Le espressioni per altri tipi di elementi lineari, come dipoli curvi o quadrupoli, possono essere facilmente ricavate o reperite in letteratura.
La possibilità di determinare in modo esplicito l'espressione delle mappe di trasferimento per elementi lineari é equivalente al fatto che l'equazione (3.3) é risolubile in questa situazione. La soluzione generale può essere scritta nella seguente maniera

$$\begin{cases} x(s) = & \sqrt{\epsilon_x \beta_x(s)}\sin(\psi_x(s) + \delta_x) \\ y(s) = & \sqrt{\epsilon_y \beta_y(s)}\sin(\psi_y(s) + \delta_y), \end{cases} \tag{3.16}$$

dove $\epsilon_x, \epsilon_y, \delta_x, \delta_y$ sono costanti, $\beta_x(s)$ e $\beta_y(s)$ sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$ e

$$\psi_x(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{\beta_x(\sigma)} \qquad \psi_y(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{\beta_y(\sigma)}. \tag{3.17}$$

Ne segue che, ponendo $\mathbf{w} = (\sqrt{\epsilon_x}\sin\delta_x, \sqrt{\epsilon_x}\cos\delta_x, \sqrt{\epsilon_y}\sin_y, \sqrt{\epsilon_y}\cos\delta_y)$, si può riscrivere la (3.16) come

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{T}(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{w}, \tag{3.18}$$

dove $\mathbf{T}(s)$ é periodica con periodo $2\pi R$:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_x(s)} & 0 & 0 & 0 \\ \\ \gamma_x & 1/\sqrt{\beta_x(s)} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta_y(s)} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \gamma_y & 1/\sqrt{\beta_y(s)} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

e $\mathbf{R}(s)$ é la somma diretta di due matrici di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\psi_x(s) & \sin\psi_x(s) & 0 & 0 \\ -\sin\psi_x(s) & \cos\psi_x(s) & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cos\psi_y(s) & \sin\psi_y(s) \\ 0 & 0 & -\sin\psi_y(s) & \cos\psi_y(s) \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Le costanti $\gamma_x, \gamma_y$ sono date da $\gamma_x = \dot{\beta}_x(s)/[2\sqrt{\beta_x(s)}]$ e $\gamma_y = \dot{\beta}_y(s)/[2\sqrt{\beta_y(s)}]$. Valutando (3.18) a $s = 0$ si ha $\mathbf{x}(0) = \mathbf{T}(0)\mathbf{w}$ e la si può quindi riscrivere nella forma

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{T}(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{T}(0)^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{3.21}$$

La mappa su un giro lineare $\mathbf{L}(s)$ si ottiene da (3.21) confrontando $\mathbf{x}(s)$ e $x(s + 2\pi R)$ e sfruttando la periodicità di $\mathbf{T}(s)$

$$\mathbf{x}(s + 2\pi R) = \mathbf{L}(s)\mathbf{x}(s) \qquad \mathbf{L}(s) = \mathbf{T}(s)\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}(s). \tag{3.22}$$

Indichiamo con $\mathbf{R}$ la matrice di rotazione su un giro (3.20). La matrice $\mathbf{L}(s)$ é nota come *matrice di Twiss* ed é data esplicitamente da

$$\mathbf{L}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_x & \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_y \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

dove le matrici $\mathbf{L}_{x,y}$ sono date da

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_x) + \alpha_x \sin(2\pi\nu_x) & \beta_x \sin(2\pi\nu_x) \\ \\ -\gamma_x \sin(2\pi\nu_x) & \cos(2\pi\nu_x) - \alpha_x \sin(2\pi\nu_x) \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_y) + \alpha_y \sin(2\pi\nu_y) & \beta_y \sin(2\pi\nu_y) \\ \\ -\gamma_y \sin(2\pi\nu_y) & \cos(2\pi\nu_y) - \alpha_y \sin(2\pi\nu_y) \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Partendo dalle matrici di trasferimento dei singoli elementi é possibile calcolare $\mathbf{L}(s)$ in qualunque punto del reticolo: la mappa lineare su un giro a $s = 0$ é

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_E \mathbf{L}_{E-1} \cdots \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 = \mathbf{T}(0)\mathbf{R}\mathbf{T}(0)^{-1}, \tag{3.26}$$

mentre la matrice $\mathbf{L}(s)$ in qualunque altro punto $s_k$ é data dalla ricorrenza

$$\mathbf{L}(s_k) = \mathbf{L}_k \mathbf{L}(s_{k-1}) \mathbf{L}_k^{-1}) \tag{3.27}$$

e si ha $\mathbf{L}(s_k) = \mathbf{T}(s_k)\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}(s_k)$ dove

$$\mathbf{T}(s_k) = \mathbf{L}_k \mathbf{T}(s_{k-1}) \qquad k = 1, \dots, E-1. \tag{3.28}$$

I risultati ottenuti nel caso lineare sono compresi nella teoria di Courant-Snyder [1]. I punti salienti possono essere riassunti come segue:

**i)** Per ogni mappa lineare su di un giro $\mathbf{L}(s_k)$ esiste una trasformazione lineare $\mathbf{T}(s_k)$ che la riconduce al prodotto diretto di due rotazioni, rispettivamente di $2\pi\nu_x$ e $2\pi\nu_y$.

**ii)** La matrice di rotazione é invariante, ovvero é indipendente da $s_k$.

**iii)** La trasformazione $\mathbf{T}(s_k)$ dipende da $s_k$ e non é univocamente determinata. In effetti la classe di equivalenza di queste trasformazioni é data dal gruppo $\mathcal{G}$ delle matrici che commutano con le matrici $\mathbf{R}$ che sono la composizione diretta di due rotazioni piane.

**iv)** Il cambiamento di coordinate

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}(s_k)\mathbf{x} \tag{3.29}$$

riconduce la mappa al prodotto diretto di rotazioni. Possiamo dare una rappresentazione grafica di quanto detto per mezzo del seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x}(s) \arrow[r, "\mathbf{L}"] & \mathbf{x}(s+2\pi R) \\ \hat{\mathbf{x}}(s) \arrow[u, "\mathbf{T}(s)"] \arrow[r, "\mathbf{R}"'] & \hat{\mathbf{x}}(s+2\pi R) \arrow[u, "\mathbf{T}(s)"'] \end{tikzcd} \tag{3.30}$$

**v)** Gli invarianti della mappa sono i raggi delle orbite nelle nuove coordinate

$$\epsilon_x = \hat{x}^2 + \hat{p}_x^2 \qquad \epsilon_y = \hat{y}^2 + \hat{p}_y^2. \tag{3.31}$$

Il significato geometrico di questo cambiamento di coordinate é evidente: si parte da una mappa lineare simplettica, che conserva le aree nei piani di coordinate $(x, p_x)$, $(y, p_y)$. Le proiezioni dell'orbita in questi piani sono ellissi, e noi scegliamo un nuovo sistema di coordinate in cui le orbite sono date da cerchi con la stessa area. Tali aree sono esattamente i due integrali primi del moto indipendenti (o invarianti di Courant-Snyder).

La teoria di Courant-Snyder esaurisce la trattazione dell'equazione del moto nel caso lineare.
Nel caso in cui si introducano dei termini non lineari nell'equazione del moto, la soluzione non é più ottenibile in forma chiusa. é comunque sempre possibile scrivere delle espressioni approssimate per detta soluzione. Se scriviamo l'equazione differenziale per $\mathcal{M}_j$, mappa di trasferimento per un elemento non lineare, come

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{K}(s)\mathbf{x} + \mathbf{f}(x, y; s), \tag{3.32}$$

dove $\mathbf{x} \equiv (x, p_x, y, p_y)$, allora la corrispondente equazione integrale si legge

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{L}(s)\mathbf{x}(s_{j-1}) \; + \; \int_{s_{j-1}}^{s} \mathbf{L}(s)\mathbf{L}^{-1}(t)\mathbf{f}(x(t), y(t); t)dt \qquad s_{j-1} \leq s \leq s_j \tag{3.33}$$

dove $\mathbf{x}(s_{j-1})$ é la condizione iniziale e $\mathbf{L}(s)$ é la matrice fondamentale per il sistema lineare e soddisfa

$$\frac{d\mathbf{L}(s)}{ds} = \mathbf{K}(s)\mathbf{L}(s) \qquad \mathbf{L}(s_{j-1}) = \mathbf{I}. \tag{3.34}$$

Una soluzione di (3.33) si ottiene iterando l'equazione integrale e risulta data da una serie nella condizione iniziale $\mathbf{x}(s_{j-1})$, con coefficienti dipendenti dallo spessore $\ell = s_j - s_{j-1}$ di $\mathcal{M}_j$. Nel caso di un elemento uniforme, in cui $\mathbf{K}$ e $\mathbf{f}$ non dipendono da $s$ e $\mathbf{L}(s) = e^{\mathbf{K}(s-s_{j-1})}$, é in effetti possibile calcolare questi coefficienti esattamente. Il teorema di Cauchy-Kowaleska assicura l'analiticità della soluzione e di conseguenza la convergenza della serie per $||\mathbf{x}(s_{j-1})||$ e $\ell$ sufficientemente piccoli. Le approssimazioni ottenute con un numero finito di iterazioni sono mappe polinomiali nel punto iniziale $\mathbf{x}(s_{j-1})$

e verificano le condizioni di simpletticità solo a livello perturbativo. Inoltre, incrementando $||\mathbf{x}(s_{j-1})||$ ed $\ell$, si incontrano problemi di convergenza. Per risolvere questi inconvenienti si usa, generalmente, un altro metodo, molto più semplice e che fornisce mappe simplettiche. Questa approssimazione che é detta *approssimazione delle lenti sottili* per la sua analogia con l'ottica, consiste nel sostituire $\mathbf{f}$ in (3.32) con una delle due espressioni seguenti

**i)** $\mathbf{f}\ell\delta(s - s_{j-1})$.

**ii)** $\mathbf{f}\ell\left[\frac{1}{2}\delta(s - s_{j-1}) + \frac{1}{2}\delta(s - s_j)\right]$.

Il risultato é una mappa simplettica, in ambedue i casi, poichè risulta essere il flusso da $s_{j-1}$ a $s_j$ di un campo vettoriale hamiltoniano nel caso si abbia

$$\mathbf{f}(x(s, y, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x(x, y, s) \\ 0 \\ f_y(x, y, s) \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Il risultato dell'integrazione di (3.32) nel primo caso é

$$\mathbf{x}(s_j) = \mathbf{L}(s_j)\left[\mathbf{x}(s_{j-1}) \ + \ \ell\mathbf{f}(x(s_{j-1}), y(s_{j-1}), s_{j-1})\right], \tag{3.36}$$

Questa approssimazione corrisponde ad integrare il membro destro di (3.33) tramite la regola dei rettangoli. Questo permette di dare una stima dell'errore commesso. Vale infatti

$$\mathbf{x}(s_j) = \mathbf{x}_{kick}(s_j) + \mathbf{e}, \qquad \mathbf{e} = \mathcal{O}(\ell^2). \tag{3.37}$$

Se consideriamo la seconda approssimazione, invece, si ha

$$\mathbf{x}(s_j) = \left[\mathbf{x} \ + \ \frac{\ell}{2}\mathbf{f}(x, y, s)\right] \circ \mathbf{L}(s_j)\left[\mathbf{x}(s_{j-1}) \ + \ \frac{\ell}{2}\mathbf{f}(x(s_{j-1}), y(s_{j-1}), s_{j-1})\right]. \tag{3.38}$$

La (3.38) può essere riscritta nella seguente maniera

$$\mathbf{x}(s_j) = \mathbf{L}(s_j)\left[\mathbf{x}(s_{j-1}) \ + \ \frac{\ell}{2}\mathbf{f}(x(s_{j-1}), y(s_{j-1}), s_{j-1})\right]\frac{\ell}{2}\mathbf{f}(x, y, s), \tag{3.39}$$

da cui risulta che la seconda scelta corrisponde a risolvere l'equazione integrale (3.33) utilizzando la regola dei trapezi. In questo caso la stima dell'errore varrà

$$\mathbf{x}(s_j) = \mathbf{x}_{kick}(s_j) + \mathbf{e}, \qquad \mathbf{e} = \mathcal{O}(\ell^3). \tag{3.40}$$

Sostituendo $\mathbf{f}(x, y; s)$ con $\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{f}(x, y; s)(\ell/m)\delta(s - s_{j-1} - k\ell/m)$, ossia usando $m > 1$ forze impulsive piuttosto che una sola la precisione può essere migliorata. Il risultato si può scrivere come composizione di $m$ mappe simili a (3.36) sugli intervalli $[s_{j-1}, s_{j-1} + \ell/m], \dots, [s_j\ell/m, s_j]$. Introducendo i gradienti integrati

$$K_n = \int_{s_{n-1}}^{s_n} k_n(s)\, ds \qquad J_n = \int_{s_{n-1}}^{s_n} j_n(s)\, ds, \tag{3.41}$$

l'approssimazione di singolo kick a un multipolo si può scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}_{s=s_j} = \begin{pmatrix} x \\ p_x + \mathrm{Re} \displaystyle\sum_{n=2}^{M-1} \frac{K_n + J_n}{n!}(x + iy)^n \\ y \\ p_y - \mathrm{Im} \displaystyle\sum_{n=2}^{M-1} \frac{K_n + J_n}{n!}(x + iy)^n \end{pmatrix}_{s=s_{j-1}} \tag{3.42}$$

Torniamo ora al problema di determinare la mappa di trasferimento su un giro di una macchina acceleratrice. Questa sarà in generale esprimibile come una somma di termini del tipo

$$\mathbf{F} = \sum_{n\geq 1} [\mathbf{F}]_n, \tag{3.43}$$

dove indichiamo con $[\quad]_n$ la componente omogenea di ordine $n$. La parte lineare $[\mathbf{F}]_1$ era stata in precedenza indicata con $\mathbf{L}$. In generale la rappresentazione esatta di $\mathbf{F}$ é impossibile poichè si tratta di un polinomio il cui grado é il prodotto dei gradi delle mappe di trasferimento sugli elementi individuali del reticolo. Il solo calcolo *esatto* (a meno di errori di arrotondamento di macchina) di $\mathbf{F}$ può essere effettuato per mezzo del tracking. Possiamo agevolmente calcolare un troncamento polinomiale $[\mathbf{F}]_{\leq N}$ di $\mathbf{F}$, dove

$$[\mathbf{F}]_{\leq N} = \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{F}]_n, \tag{3.44}$$

componendo e troncando all'ordine $N$ i singoli elementi $\mathbf{M}_k$ in accordo con l'algoritmo

$$\mathcal{F}_k = [\mathbf{M}_k \circ \mathcal{F}_{k-1}]_{\leq N} \qquad \mathcal{F}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathcal{F}_E = [\mathbf{F}]_{\leq N}. \tag{3.45}$$

Osserviamo che la mappa troncata $[\mathbf{F}]_{\leq N}$ é simplettica solo fino all'ordine $N$. Ciò significa che le sue parentesi di Poisson verificano le relazioni canoniche solo fino ai termini di ordine $||\mathbf{x}||^N$. Di conseguenza, dopo $n$ iterazioni, la deviazione dalla simpletticità sarà dell'ordine di $n||\mathbf{x}_0||^N$. Le deviazioni dalla struttura hamiltoniana si manifestano come perdita della proprietà di conservazione delle aree nei piani di fase $(x, p_x)$ e $(y, p_y)$, cioé con un comportamento contrattivo o espansivo della mappa. Ammettendo un errore non superiore a $10^{-4}$, potremmo usare una mappa troncata capace di seguire orbite limitate per un milione di rivoluzioni se $||\mathbf{x}_0|| = 1/10$, e solo per poche rivoluzioni se $||\mathbf{x}_0|| = 1/2$.

## 3.2 Forme Normali in $\mathbb{R}^4$

Come é stato sottolineato, non é possibile calcolare esattamente la mappa di trasferimento completa di un acceleratore. Lo studio della dinamica di un fascio utilizzando mappe di trasferimento troncate é altresì precluso a causa della non simpletticità di quest'ultime. Per dovere di completezza bisogna ricordare il fatto che recentemente ci sono stati parecchi studi dedicati al problema di rendere simplettica una mappa troncata [26, 60, 61]. Il principio su cui si basano queste tecniche é quello di aggiungere un resto alla mappa in modo da renderla simplettica. Il processo contiene comunque un elevato grado di arbitrarietà e non é quindi assicurato che la mappa risultante debba avere un comportamento dinamico equivalente a quello della mappa troncata di partenza. Addirittura si é proposto di iterare la mappa troncata, senza curarsi della mancanza di simpletticità, allo scopo di determinare l'apertura dinamica di un acceleratore [62, 63]. Da un punto di vista computazionale, questa procedura permetterebbe un risparmio di tempo di calcolo notevole rispetto ai normali programmi che eseguono un tracking simplettico e, nel caso di macchine quali LHC o SSC, la prospettiva é sicuramente allettante. D'altronde il fondamento di queste nuove proposte sembra essere abbastanza inconsistente.é quindi imperativo utilizzare una tecnica che permetta di estrarre informazioni fisicamente corrette a partire da mappe troncate. Ancora una volta lo strumento che si é rivelato più utile é costituito dalle *Forme Normali*. In questo caso, diversamente da quanto fatto nel primo capitolo, considereremo problemi in uno spazio delle fasi quadridimensionale. Molte definizioni date in precedenza si possono estendere facilmente a questa nuova situazione. I vari operatori $\Delta, \prod$ non subiscono alcun cambiamento. Ciò che cambia é la classificazione dei punti fissi. In quattro dimensioni, i vincoli sugli autovalori di una matrice imposti dalle condizioni di simpletticità sono tali che se $\lambda$ é un autovalore, allora anche $\lambda^{-1}$, $\lambda^*$ e $\lambda^{-1*}$ sono autovalori della medesima matrice. Dunque in generale gli autovalori sono raggruppati in quadruple. Ciò implica, ad esempio, l'esistenza di punti fissi che sono stabili in un piano di fase e instabili lungo un altro. In più si possono avere risonanze anche nel caso iperbolico (cosa che era esclusa in due dimensioni). Per questi motivi riporteremo la classificazione delle forme normali in quattro dimensioni descrivendo la struttura dei monomi in forma normale sia nel caso di mappe che di variabili dinamiche.

**i)** Forme normali ellittiche non risonanti. In questo caso $\lambda_1 = e^{-i\omega_1}$ e $\lambda_2 = e^{-i\omega_2}$ con $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, 2\pi)$ razionalmente indipendenti, ossia

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \Longrightarrow \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \tag{3.46}$$

Di conseguenza tutti i monomi che danno contributi ad $A$ hanno $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, cioé

$$A = A(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*), \tag{3.47}$$

mentre $F_1 = z_1 B_1(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*)$ e così via. Se in più richiediamo che $\mathbf{F}$ sia simplettica, imponendo le condizioni di conservazione delle parentesi di Poisson, si può mostrare che

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega_1(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*)} z_1 \\ e^{i\Omega_1(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*)} z_1^* \\ e^{-i\Omega_2(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*)} z_2 \\ e^{i\Omega_2(z_1 z_1^*, z_2 z_2^*)} z_2^* \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

**ii)** Forme normali ellittiche risonanti.

Se ci sono vettori interi $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ ortogonali a $\boldsymbol{\omega}$, allora diciamo che le frequenze sono risonanti e distinguiamo

**a)** Risonanze del primo ordine

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} = \ell \mathbf{k}_0 \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3, \tag{3.49}$$

dove $k_0 = (q, 0, -p)$ o $k_0 = (0, q, -p)$. In questo caso $\mathbf{k}$ genera un sottospazio di $\mathbb{Z}^3$ e corrisponde a $\frac{\omega_1}{2\pi}$ o $\frac{\omega_2}{2\pi}$ uguale al numero razionale $p/q$. I monomi della forma normale sono

$$n_1 = m_1 + \delta_1 + \ell q \qquad n_2 = m_2 + \delta_2 \qquad \omega_1 = 2\pi \frac{p}{q} \tag{3.50}$$

$$n_1 = m_1 + \delta_1 \qquad n_2 = m_2 + \delta_2 + \ell q \qquad \omega_2 = 2\pi \frac{p}{q}. \tag{3.51}$$

**b)** Risonanze del secondo ordine. Abbiamo

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} = \ell_1 \mathbf{k}_0^{(1)} + \ell_2 \mathbf{k}_0^{(2)} \tag{3.52}$$

dove $\mathbf{k}_0^{(1)}$ e $\mathbf{k}_0^{(2)}$ sono vettori razionalmente indipendenti di $\mathbb{Z}^3$. La forma normale in questo caso é data da tutti i monomi tali che

$$\begin{cases} n_1 & = m_1 + \ell_1 k_{01}^{(1)} + \ell_2 k_{01}^{(2)} + \delta_1 \\ n_2 & = m_2 + \ell_1 k_{02}^{(1)} + \ell_2 k_{02}^{(2)} + \delta_2. \end{cases} \tag{3.53}$$

**iii)** Forme normali iperboliche non risonanti. In questo caso $\lambda_1 = e^{-\alpha_1}$ e $\lambda_2 = e^{-\alpha_2}$ dove $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono razionalmente indipendenti. I monomi della forma normale hanno $n_1 = m_1 + \delta_1$, $n_2 = m_2 + \delta_2$

**iv)** Forme normali iperboliche risonanti. Abbiamo

$$\lambda_1 = e^{-\alpha_1}, \quad \lambda_2 = e^{-\alpha_2} \qquad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{k} = \ell \mathbf{k}_0 \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \tag{3.54}$$

dove $\mathbf{k}_0$ é il più piccolo vettore intero ortogonale ad $\boldsymbol{\alpha}$. In questo caso i monomi sono dati da

$$n_1 = m_1 + \ell k_{01} + \delta_1, \qquad n_2 = m_1 + \ell k_{02} + \delta_2 \tag{3.55}$$

**v)** *Autovalori complessi o misti.* Se abbiamo un punto fisso iperbolico-ellittico, ovvero $\lambda_1 = e^{-i\omega}$ e $\lambda_2 = e^{-\alpha}$ o autovalori complessi $\lambda_1 = e^{-\alpha - i\omega}$, $\lambda_2 = e^{-\alpha + i\omega}$, allora la forma normale ha la struttura non risonante $n_1 = m_1 + \delta_1$, $n_2 = m_2 + \delta_2$.

Nel seguito ci occuperemo principalmente di forme normali non risonanti nel caso ellittico che risulta essere rilevante per l'applicazione alla stabilità dei fasci negli acceleratori circolari di particelle.La ragione di ciò é facilmente comprensibile, in quanto con le mappe di trasferimento si schematizza il moto betatronico intorno all'orbita chiusa dell'acceleratore la quale é una soluzione stabile delle equazioni del moto. Dunque l'origine sarà un punto fisso ellittico per la mappa di trasferimento su un giro.
Ancora una volta il punto di partenza per la nostra analisi é l'equazione funzionale

$$\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi} \circ \mathbf{U}. \tag{3.56}$$

In analogia con quanto visto nel caso bidimensionale, l'equazione (3.56) non possiede soluzioni analitiche in un intorno aperto dell'origine. Ad ogni modo é sempre possibile risolvere la (3.56) utilizzando serie formali. Sfruttando le notazioni già introdotte in precedenza e indicando con $e^{i\boldsymbol{\omega}}\mathbf{z} \equiv (e^{i\omega_1}z_1, e^{i\omega_2}z_2)$ , l'equazione precedente può essere riscritta come

$$[\Phi_1]_n\left(e^{i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}, e^{-i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}^*\right) - e^{i\omega_1}[\Phi_1]_n + [U_1]_n = \tag{3.57}$$

$$\left[\hat{F}_1\left(\boldsymbol{\xi} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{\xi}^* + \hat{\boldsymbol{\Phi}}^*\right)\right]_n - \left[[\hat{\Phi}_1]_{\leq n}\left(e^{i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{U}}, e^{-i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}^* + \hat{\mathbf{U}}^*\right)\right]_n \tag{3.58}$$

$$[\Phi_2]_n\left(e^{i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}, e^{-i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}^*\right) - e^{i\omega_2}[\Phi_2]_n + [U_2]_n =$$

$$\left[\hat{F}_2\left(\boldsymbol{\xi} + \hat{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{\xi}^* + \hat{\boldsymbol{\Phi}}^*\right)\right]_n - \left[[\hat{\Phi}_2]_{\leq n}\left(e^{i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{U}}, e^{-i\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\xi}^* + \hat{\mathbf{U}}^*\right)\right]_n$$

Decomponendo la (3.59) nelle componenti in forma normale si ottengono le equazioni omologiche

$$\begin{aligned} \left(1 - \prod\right)[\Phi_1]_n &= \Delta^{-1}\left(1 - \prod\right)[Q_1]_n \\ \left(1 - \prod\right)[\Phi_2]_n &= \Delta^{-1}\left(1 - \prod\right)[Q_2]_n \end{aligned} \tag{3.59}$$

e

$$\begin{aligned} \prod[U_1]_n &= \prod[Q_1]_n \\ \prod[U_2]_n &= \prod[Q_2]_n. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Per costruzione l'operatore $\Delta^{-1}$ é ben definito essendo applicato ad un elemento nel complemento ortogonale del nucleo di $\Delta$ e può essere scritto esplicitamente. Nel caso di forme normali non risonanti, si ha per esempio

$$\begin{aligned} &\Delta^{-1}{\xi_1}^{l_1}{\xi_1}^{*l_2}{\xi_2}^{l_3}{\xi_2}^{*l_4} = \\ &\quad \left(e^{i(l_1-l_2)\omega_1+(l_3-l_4)\omega_2} - e^{i\omega_1}\right)^{-1}{\xi_1}^{l_1}{\xi_1}^{*l_2}{\xi_2}^{l_3}{\xi_2}^{*l_4} \text{ prima componente} \\ &\Delta^{-1}{\xi_1}^{l_1}{\xi_1}^{*l_2}{\xi_2}^{l_3}{\xi_2}^{*l_4} = \\ &\quad \left(e^{i(l_1-l_2)\omega_1+(l_3-l_4)\omega_2} - e^{i\omega_2}\right)^{-1}{\xi_1}^{l_1}{\xi_1}^{*l_2}{\xi_2}^{l_3}{\xi_2}^{*l_4} \text{ seconda componente} \end{aligned}$$

Come si é visto nel caso bidimensionale le equazioni (3.59) non determinano completamente la $\boldsymbol{\Phi}$, ma rimane arbitraria la componente in forma normale che può essere scelta a piacere. Ancora una volta si pone la questione della relazione tra la simpletticità di $\mathbf{\Phi}$ e di $\mathbf{U}$. In questo caso il problema é cruciale, in quanto uno degli scopi principali dell'uso delle forme normali é proprio quello di rendere simplettica una mappa troncata per poter simulare correttamente la dinamica in una macchina acceleratrice. Nel caso non risonante, comunque, é sempre possibile rappresentare la forma normale nella seguente forma

$$\begin{aligned} [U_1]_N(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) &= [\exp(i\Omega_1(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^*))]_{\leq N-1} \\ [U_2]_N(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) &= [\exp(i\Omega_2(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^*))]_{\leq N-1} \end{aligned} \tag{3.61}$$

senza imporre condizioni addizionali su $\mathbf{\Phi}$. Le funzioni $\Omega_i$ sono polinomi reali di ordine $N-1$ che dipendono solo dal prodotto di $\xi_1\xi_1^*$ e $\xi_2\xi_2^*$. Detti polinomi possono essere determinati facilmente a partire dalle equazioni precedenti. Vale infatti

$$\begin{aligned} i\xi_1[\Omega_1|]_{n-1} &= [|U_1]_n - \xi_1 \left[\exp i[|\Omega_1]_{\leq n-1}\right]_{n-1} \\ i\xi_2[\Omega_2|]_{n-1} &= [|U_2]_n - \xi_2 \left[\exp i[|\Omega_2]_{\leq n-1}\right]_{n-1} \end{aligned} \tag{3.62}$$

La forma normale é dunque integrabile e la sua dinamica si può determinare immediatamente, in quanto vale

$$(\boldsymbol{\xi} \exp(i\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^*)))^{\circ n} = (\boldsymbol{\xi} \exp(in\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^*)))\,. \tag{3.63}$$

A seguito delle precedenti relazioni discende che é possibile derivare una hamiltoniana che interpola la dinamica generata da (3.63) e quindi quella di $\mathbf{U}$. Detta hamiltoniana verifica le condizioni date da

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} H(\rho_1, \rho_2) = \omega_i + \sum_{j\geq 1} [\Omega_i]_j(\rho_1, \rho_2), \quad \text{per } i = 1, 2. \tag{3.64}$$

Nella formula precedente abbiamo indicato con $\rho_i$ il prodotto $\xi_i\xi_i^*$. Nel caso non risonante il problema é dunque risolto. Per quanto riguarda, invece il caso risonante, é necessario imporre le condizioni di simpletticità sotto forma di

$$\begin{matrix} \{\Phi_1, \Phi_1^*\} = 1 & \{\Phi_2, \Phi_2^*\} = 1 \\ \{\Phi_1, \Phi_2\} = 0 & \{\Phi_1, \Phi_2^*\} = 0 \end{matrix} \;. \tag{3.65}$$

Le (3.65) rappresentano un sistema sovradeterminato e dunque non solubile. é però possibile dimostrare che esiste sempre una soluzione perturbativa che soddisfa (3.56) all'ordine $n-1$ e la (3.65) all'ordine $n-2$. Il problema della costruzione di una hamiltoniana interpolante é risolubile anche in questa situazione.

Prima di completare la discussione, vorremmo sottolineare alcuni fatti. In primo luogo é importante osservare che la soluzione dell'equazione (3.56) può essere ottenuta anche con altre tecniche. In [64, 65] si é usata una funzione generatrice, mentre un secondo metodo sfrutta le trasformazioni di Lie [66, 67, 68]. I vantaggi di questi approcci rispetto al metodo diretto presentato, consistono nel fatto che la trasformazione $\mathbf{\Phi}$ risulta essere automaticamente simplettica e dunque anche $\mathbf{U}$ é tale. D'altronde in entrambe i casi ci si trova a manipolare equazioni implicite oppure operatori di Lie, mentre il metodo descritto richiede semplicemente l'uso dell'algebra dei polinomi [69] (composizione e prodotto di polinomi in quattro variabili) che é facilmente implementabile in un codice numerico.

Per ora si é descritto un formalismo che permette di trattare il moto trasverso di un fascio in una macchina acceleratrice nel caso in cui le particelle siano considerate come un insieme perfettamente monocromatico. Questa non é però la situazione reale. é inevitabile che le particelle abbiano energie leggermente differenti e dunque anche le equazioni del moto che si sono introdotte in precedenza devono tenere conto di queste variazioni. In questo caso si hanno due possibilità: si possono considerare le equazioni complete nei tre gradi di libertà (considerando dunque l'energia con la sua variabile coniugata), oppure considerare le equazioni nei due gradi di libertà trasversi introducendo il momento come un parametro. In pratica si verrebbe a considerare uno spazio delle fasi esteso $\mathbb{R}^5$ in cui la quinta dimensione é un parametro. Ciò significa che la nostra mappa di trasferimento sarà ora una funzione in cinque variabili

$$\mathbf{F}(\mathbf{z};\delta) = \sum_n [\mathbf{F}(\delta)]_n = \sum_{n,m} [\mathbf{F}]_{n,m}\delta^m, \tag{3.66}$$

dove con $\delta$ si é indicato la variazione percentuale del momento

$$\delta = \frac{p-p_0}{p}$$

In questo caso é ancora possibile utilizzare le forme normali. I coefficienti dei polinomi che rappresentano gli sviluppi di $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{U}$ saranno ora funzioni del momento, ma le ricorrenze trovate in precedenza rimangono valide senza modifiche e permettono di determinare anche i coefficienti relativi alla dipendenza di $\mathbf{\Phi}$ da $\delta$.

## 3.3 Tune shift e leggi di scala

Dall'analisi compiuta utilizzando le forme normali risulta che, almeno nel caso semplice in cui le frequenze non soddisfano una condizione di risonanza, la dinamica non lineare é rappresentata da rotazioni di angoli che dipendono dalla distanza dall'origine $\rho_1$ e $\rho_2$. Quindi la frequenza di rotazione varia da punto a punto nello spazio delle fasi ed é differente da quella che si ha nell'origine (che coincide con la frequenza del sistema linearizzato). Questa variazione della frequenza é un fenomeno indotto dai termini non lineari nelle equazioni del moto ed é estremamente importante in quanto può indurre forti instabilità nella dinamica del sistema considerato. In una macchina acceleratrice, ad esempio, se le frequenze $\omega_1$ o $\omega_2$ soddisfano a delle condizioni di risonanza si ha l'insorgenza di instabilità che possono anche portare alla perdita completa del fascio (per inciso in alcuni casi questo fenomeno é sfruttato volutamente per estrarre il fascio dalla macchina). A causa della variazione della frequenza con la distanza dall'origine dello spazio delle fasi si potrebbe avere che, nonostante le frequenze lineari siano non risonanti, si verifichi una condizione di risonanza non lineare. Un secondo effetto prodotto dai termini non lineari é la deformazione delle orbite. Chiaramente nel caso di un sistema lineare le orbite nell'intorno di un punto fisso ellittico sono cerchi (nelle coordinate normalizzate). Introducendo delle non linearità le orbite vengono deformate, anche se rimangono diffeomorfe a cerchi in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine.

Questi due effetti, variazione della frequenza e deformazione delle orbite, sono estremamente importanti in fisica degli acceleratori in quanto sono correlati con il comportamento non lineare della macchina e dunque possono essere considerati degli indicatori di instabilità. Risulta dunque abbastanza naturale che, in fase di progettazione si tenti di determinare i parametri della macchina in modo da minimizzare queste quantità. In questo contesto l'approccio con le forme normali si dimostra particolarmente potente e utile.

Nel seguito considereremo unicamente il problema della minimizzazione del *tune shift* (tale é il termine che indica la variazione della frequenza con l'ampiezza) senza considerare la minimizzazione dello *smear* (deformazione delle orbite). Il primo problema che si presenta é quello di definire un metodo di calcolo per il tune shift. Essenzialmente tre sono i possibili approcci. Prima di discuterli poniamo

$$\mathbf{z}^{\circ n} = \underbrace{\mathbf{F} \circ \mathbf{F} \ldots \mathbf{F}}_{n} (\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \,, \tag{3.67}$$

inoltre indicheremo con $\nu_x, \nu_y$ il tune shift nei due piani di fase. Con questa convenzione si ha:

**i)** *Avanzamento di Fase Medio*
Il tune é definito da

$$\begin{array}{lcl} \nu_x(\mathbf{z},N) & = & \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_1^{\circ j}-\phi_1^{\circ j-1}\right) \\ \nu_y(\mathbf{z},N) & = & \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\phi_2^{\circ j}-\phi_2^{\circ j-1}\right), \end{array} \tag{3.68}$$

dove $\phi_i^{\circ j}$ indica la fase di $z_i^{\circ j}$. L'errore che si commette é proporzionale a $1/N$.

**ii)** *Trasformata di Fourier*
In questo caso indichiamo con $w_l$ i coefficienti dello sviluppo di Fourier dell'orbita

$$w_l = \frac{1}{sqrtN}\sum_{j=1}^{N} z_i{}^{\circ j}\exp\left(2i\pi\frac{jl}{N}\right), \quad \text{con } i=1,2 \tag{3.69}$$

Il massimo coefficiente si otterrà in corrispondenza di $\hat{j}_i$. il tune sarà uguale a $\hat{j}_i/N$. In questo caso l'errore decresce più lentamente $1/\sqrt{N}$ che utilizzando il metodo dell'avanzamento di fase medio, ma la conoscenza dei coefficienti di Fourier fornisce delle informazioni estremamente utili per quanto riguarda le risonanze e lo smear.

**iii)** *Forme Normali*

In questo caso il tune shift é ottenuto direttamente come

$$\begin{array}{lcl} \nu_x & = & \frac{1}{2\pi}\left(\omega_1+\sum_{i\geq 1}\left[\Omega_1\right]_i(\rho_1,\rho_2)\right) \\ \nu_y & = & \frac{1}{2\pi}\left(\omega_2+\sum_{i\geq 1}\left[\Omega_2\right]_i(\rho_1,\rho_2)\right) \end{array} \tag{3.70}$$

In principio sembrerebbe dunque che all'ordine $i$ il tune shift dipenda da $2i{+}2$ coefficienti reali. In realtà il carattere hamiltoniano del sistema permette di ridurre il numero di coefficienti indipendenti, che risultano essere solo $i+2$. In più é possibile definire una funzione $H$ tale che valga la relazione

$$[\Omega_i]_n = \frac{\partial[H]_n}{\partial\rho_i} \quad \text{con } i=1,2 \tag{3.71}$$

Per quanto riguarda l'errore che si commette si tenga presente che questo dipende dall'ordine a cui si arresta lo sviluppo in serie che definisce $\mathbf{\Omega}$. D'altronde a causa del carattere asintotico delle serie che si usano nella teoria delle forme normali, l'errore non decresce indefinitamente aumentando l'ordine. Al contrario esiste un ordine ottimale per cui l'errore ha un minimo, superato il quale si ha un peggioramento in quanto si comincia a sentire l'effetto della divergenza delle serie. Inoltre il grado di approssimazione tende a peggiorare aumentando l'ampiezza. Infine si consideri che l'equazione (3.70) permette di calcolare il tune shift come funzione delle coordinate normali. Per comparare il risultato con gli altri metodi é indispensabile trasformare le variabili ritornando alle coordinate di partenza. Poichè vale

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{\xi}|^2\right) \tag{3.72}$$

si ha che i tre metodi non sono esattamente equivalenti. I primi due, infatti, proiettano il tune sulle $\mathbf{z}$, mentre le forme normali usano le $\boldsymbol{\xi}$ e come si vede dalla (3.72) solo vicino all'origine si ha che i due sistemi di coordinate sono vicini.

Come detto all'inizio il tune shift é generato dai contributi non lineari della dinamica i quali a loro volta originano dai termini non lineari dello sviluppo in multipoli del campo magnetico. Dunque il tune shift sarà legato ai coefficienti $K_n, J_n$ e la conoscenza delle leggi di scala é importante per definire una procedura di minimizzazione. Sottolineiamo che le dipendenze in questione possono essere determinate includendo o meno il momento delle particelle come parametro [29, 33].

Per brevità abbiamo riportato il risultato senza dimostrazione. Precisiamo solamente che nella tabella 3.1 con il termine ordine della mappa si intende il grado rispetto alle coordinate $\xi$. Questo dunque é diverso dall'ordine del tune shift essendo questo riferito agli invarianti.
Vorremmo ora mostrare come si possa utilizzare la tabella precedente per determinare la dipendenza dei parametri di Twiss dai gradienti multipolari. Qualora si consideri la dipendenza dal momento, si ha che anche la parte lineare della mappa viene a dipendere dai gradienti degli elementi nonlineari, come si vede dalla prima colonna della tabella 3.1. Questa dipendenza si rifletterà anche sulle funzioni $\gamma_{x,y}, \beta_{x,y}, \alpha_{x,y}$ introdotte in precedenza a proposito della soluzione dell'equazione del moto nel caso lineare. In aggiunta si é introdotta una nuova funzione $\alpha$ definita da

$$\gamma_{x,y}\beta_{x,y} - \alpha_{x,y}^2 = 1.$$

| | Ordine della mappa | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ordine nel momento | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | $K_2$ | $K_3$ | $(K_3)^2, K_4$ | $(K_3)^3, K_3K_4$ $K_4$ |
| 1 | $K_2, K_3$ | $K_3$ $(K_3)^2, K_4$ | $(K_3)^2, K_4$ $(K_3)^3, K_3K_4$ | $\dots$ $K_5$ |
| 2 | $K_2, K_3$ $(K_3)^2, K_4$ | $K_3, K_4, (K_3)^2$ $(K_3)^3, K_3K_4$ $K_5$ | $\dots$ | $\dots$ |

Tabella 3.1: Dipendenza della mappa di trasferimento dai gradienti multipolari.

Utilizzando l'equazione (3.25) si possono determinare le relazioni che legano i tre parametri di Twiss con gli elementi della matrice di trasferimento

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{L_{1,2}}{\sin 2\pi\nu_x} \quad \gamma_x = -\frac{L_{2,1}}{\sin 2\pi\nu_x} \quad \alpha_x = \frac{L_{2,2} - L_{1,1}}{2\sin 2\pi\nu_x} \\ \beta_y &= \frac{L_{3,4}}{\sin 2\pi\nu_y} \quad \gamma_y = -\frac{L_{4,2}}{\sin 2\pi\nu_y} \quad \alpha_y = \frac{L_{4,4} - L_{3,3}}{2\sin 2\pi\nu_y}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

La dipendenza dai $K_n$ e da $\delta$ dei parametri di Twiss é dovuta al tune shift $\nu_{x,y}$ e alla matrice di trasferimento. Da queste considerazioni discende che tutte e tre le funzioni avranno lo stesso tipo di dipendenza dai gradienti multipolari. Considereremo dunque il problema per la funzione $\beta_x$. Introduciamo gli sviluppi in serie

$$\beta_x = \sum_{n\geq 0} \beta_n \delta^n \quad \nu_x = \sum_{n\geq 0} \nu_n \delta^n \quad L_{1,2} = \sum_{n\geq 0} \epsilon_n \delta^n. \tag{3.74}$$

I coefficienti degli sviluppi in serie precedenti dipenderanno a loro volta dai gradienti $K_n$. Prima di calcolare esplicitamente le dipendenze di $\beta_x$, vediamo quale relazione intercorre tra lo sviluppo della funzione $\sin 2\pi\nu_x$ e quello del tune. Se indichiamo con

$$\sin 2\pi\nu_x = \sum_{n\geq 0} \varphi_n \delta^n \tag{3.75}$$

allora si avrà la seguente relazione tra i $\varphi_n$ e i $\nu_n$

$$\varphi_n = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j (2\pi)^{2j+1}}{(2j+1)!} \sum_{l_1+\cdots l_{2j+1}=n} \nu_{l_1}\cdots\nu_{l_{2j+1}} \tag{3.76}$$

per i primi termini si ha dunque che

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \textstyle\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j (2\pi)^{2j+1}}{(2j+1)!}\nu_0^{2j+1} &&= \sin 2\pi\nu_0 \\ \varphi_1 &= \textstyle\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j (2\pi)^{2j+1}}{(2j)!}\nu_0^{2j} &&= 2\pi\nu_1 \cos 2\pi\nu_0. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Utilizzando questi risultati possiamo riscrivere la relazione che definisce $\beta_x$ come

$$\left(\sum_{n\geq 0} \beta_n \delta^n\right)\left(\sum_{j\geq 0} \varphi_j \delta^j\right) = \sum_{p\geq 0} \epsilon_p \delta^p. \tag{3.78}$$

Dunque per un ordine generico varrà la seguente relazione

$$\beta_p = \left[\epsilon_p - \sum_{n=0}^{p-1} \beta_n \varphi_{p-n}\right]. \tag{3.79}$$

Da ciò utilizzando la (3.77) si ha per i primi ordini della funzione $\beta_x$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\epsilon_0}{\sin 2\pi\nu_0} \\ \beta_1 &= \frac{1}{\sin 2\pi\nu_0}\left[\epsilon_1 - 2\pi\beta_0\nu_1\cos 2\pi\nu_0\right]. \end{aligned} \tag{3.80}$$

A questo punto é facile determinare la dipendenza dai $K_n$ dei $\beta_n$. Per quanto riportato nella tabella 3.1 si ha che $\nu_0, \epsilon_0$ dipendono solo dagli elementi lineari. Questo comporta che anche $\beta_0$ dipenderà solo da $K_0, K_1$. Per quanto riguarda $\beta_1$, invece, dipenderà linearmente dai sestupoli a causa dei termini $\nu_1, \epsilon_1$. Il ragionamento può essere ripetuto anche per gli ordini superiori fornendo la dipendenza completa di $\beta_x$ dai gradienti $K_n$.

## 3.4 Strategia di minimizzazione del tune shift

Come é stato detto é possibile calcolare il tune shift numericamente con un programma di tracking. Il problema della sua minimizzazione può essere dunque risolta in maniera puramente numerica [70, 71]: si scelgono alcuni punti dello spazio delle fasi e si calcola il tune shift corrispondente. A questo punto si variano i parametri liberi e si ricalcola il tune shift per verificare se questo é aumentato o meno. Procedendo in questa maniera é possibile risolvere il problema. Chiaramente questo approccio richiede un notevole tempo di calcolo e in più non si ha la garanzia che il minimo trovato sia un minimo assoluto.
Utilizzando le forme normali ci troviamo nella condizione di poter calcolare il tune shift in maniera efficiente. In più la sua dipendenza funzionale dai coefficienti dello sviluppo in multipoli del campo magnetico risulta nota. Minimizzare detta funzione può essere dunque fatto in maniera analitica o semi-analitica. Per delineare una procedura di minimizzazione bisogna innanzitutto definire una opportuna funzione scalare di $\nu_x, \nu_y$. La scelta più ovvia é la seguente

$$\tau_{2i}(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\left([\delta\nu_x(\rho_1, \rho_2)]_i^2 + [\delta\nu_y(\rho_1, \rho_2)]_i^2\right), \tag{3.81}$$

dove con $[\delta\nu_{x,y}]_i$ si é indicato $[\Omega_{1,2}]_i$. La funzione $\tau_{2i}$ rappresenta il tune shift medio all'ordine $i$ ottenuto a partire dai valori nei due piani di fase. Se per il momento ci limitiamo a considerare il caso ideale in cui non si ha la dipendenza dal momento, detta funzione dipende solamente dagli invarianti del moto e dai coefficienti $K_n, J_n$. Quest'ultima é anche l'unica dipendenza rilevante per le nostre esigenze. é dunque opportuno definire una seconda funzione che non dipenda più da $\rho_1, \rho_2$. Questo si ottiene integrando $\tau$ rispetto agli invarianti tenendone costante la somma. Posto dunque $\rho_1 + \rho_2 = R$, definiamo

$$\chi_i = \frac{1}{R^i}\left(\frac{1}{R}\int_0^R \tau_{2i}(R-\rho_1, \rho_1)d\rho_1\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.82}$$

é possibile scrivere la forma esplicita di questa funzione in termini dei coefficienti che entrano nello sviluppo del tune shift. Si ottiene ad esempio per i primi due ordini le seguenti espressioni

$$\chi_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}\left(2(h_{2,2})^2 + (h_{2,1})^2 + 2(h_{2,0})^2 + h_{2,2}h_{2,1} + h_{2,1}h_{2,0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{30}}(27h_{3,3}^2 + 5h_{3,2}^2 + 5h_{3,1}^2 + 27h_{3,0}^2 + \\ 9h_{3,3}h_{3,2} + 9h_{3,1}h_{3,0} + 6h_{3,2}h_{3,1} + 3h_{3,3}h_{3,1} + 3h_{3,2}h_{3,0})^{\frac{1}{2}}.$$

Anche nel caso generale é possibile determinare l'espressione di $\chi_j$. In base a quanto é stato detto se indichiamo con

$$[H(\rho_1, \rho_2)]_i = \sum_{j=0}^{i} h_{i,j}\rho_1^j \rho_2^{i-j},$$

allora avremo

$$\chi_j^2 = R^{2j-1}\sum_{i=0}^{j}\sum_{l=0}^{j} h_{j,i}h_{j,l} \\ \int_0^R \left[il\rho_1^{i+l-2}(R-\rho_1)^{2j-i-l} + (j-i)(j-l)\rho_1^{i+l}(1+\rho_1)^{2j-i-l-2}\right] d\rho_1.$$

Il valore dell'integrale può essere determinato facilmente. Indicando con $\mathcal{I}$ detto valore, si avrà

$$\mathcal{I} = il \sum_{p=0}^{2j-i-l} \binom{2j-i-l}{p} \frac{1}{2j-i-p} + \\ (j-i)(j-l) \sum_{q=0}^{j-i-l-2} \binom{j-i-l-2}{q} \frac{1}{2j-l-q}$$

Avendo definito le funzioni opportune per operare la minimizzazione del tune shift, siamo pronti per descrivere il procedimento da applicare. Una prima possibilità consiste nell'operare sul tune shift ordine per ordine. Fissato un determinato ordine $i$ si può tentare di annullare esattamente i coefficienti che costituiscono lo sviluppo di $[\Omega_{1,2}]_i$ sfruttando, ovviamente, la dipendenza di questi dai coefficienti $K_n$, $J_n$. Se questo non fosse possibile, allora si utilizza la funzione $\chi_i$ e si procede alla sua minimizzazione. Se al termine si hanno ancora un certo numero di parametri liberi si può passare all'ordine $i+1$ ripetendo il procedimento precedente fino a quando non si sono fissati tutti i parametri liberi a disposizione.
Un secondo procedimento, invece si basa sulla minimizzazione della seguente funzione

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} \chi_i R^i \tag{3.83}$$

che altro non é se non il tune shift medio calcolato fino all'ordine $n$. In questo caso invece di minimizzare ordine per ordine, si riducono gli effetti non lineari fino ad un prefissato termine. Ciò comporta una dipendenza del procedimento di minimizzazione dal valore della somma degli invarianti, contrariamente con quanto si aveva applicando una minimizzazione ordine per ordine. é dunque necessario fissare a priori un punto dello spazio delle fasi in cui si vuole minimizzare la $\chi$ (tipicamente una determinata frazione dell'apertura dinamica).
Quanto descritto si ripete con lievi modifiche nel caso in cui si consideri la dipendenza del tune shift dal momento. In questo caso si avrà che $\chi_i$ dipende dal momento e potremo dunque svilupparla in serie secondo

$$\chi_i(\delta) = \sum_{m\geq 0} \chi_{i,m}\delta^m \tag{3.84}$$

dove $\chi_{i,0} = \chi_i(0)$. Di conseguenza la procedura di minimizzazione procede nello stesso modo: si possono minimizzare le $\chi_{i,m}$ per determinati valori di $i$ e $m$, oppure la funzione

$$\chi = \sum_{i,m\geq 0} \chi_{i,m}R^i\delta^m. \tag{3.85}$$

Veniamo ora al problema del software utilizzato per eseguire la procedura di minimizzazione. Gli elementi richiesti sono: un programma per calcolare la mappa di trasferimento di un acceleratore partendo dalla sua struttura. Uno strumento in cui siano implementate le forme normali in modo da poter estrarre le informazioni rilevanti quali il tune shift dalla mappa e, infine, il programma che operi la minimizzazione vera e propria del tune shift. I programmi citati sono facilmente disponibili. Il problema chiave, però é il seguente. Calcolare il tune shift come funzione degli invarianti (o delle coordinate) non é sufficiente per il processo di minimizzazione. Infatti il tipo di dipendenza dai coefficienti multipolari $K_n$ é nota (vedi tabella 3.1, ma i coefficienti di questa dipendenza non sono noti esplicitamente (almeno non lo sono in forma elementare). Per determinarli il procedimento utilizzato in passato [33] é stato di iterare il processo di generazione del tune shift attraverso le forme normali assegnando ai parametri liberi dei valori arbitrari. Essendo nota la relazione funzionale che lega il tune ai $K_n$ é possibile calcolare i coefficienti. Il metodo é ovviamente tutt'altro che ottimizzato. Il tempo di calcolo richiesto é non indifferente. La cosa migliore é di riuscire a calcolare lo sviluppo di Taylor del tune shift rispetto ai gradienti dei correttori in maniera automatica. Questo é ora possibile ed ha permesso non solo di velocizzare il processo di minimizzazione, ma ha potuto anche

renderlo altamente automatizzato. Utilizzando il programma di tracking SIXTRACK é possibile calcolare la mappa di trasferimento di LHC, ad esempio. Internamente questo processo si avvale della libreria DA di M. Berz [72]. Questa é essenzialmente uno strumento per manipolare in maniera ottimizzata polinomi. Una delle possibilità di questo strumento é la capacità di determinare lo sviluppo di Taylor di una funzione. é stato dunque possibile introdurre l'opzione di calcolare lo sviluppo di Taylor della mappa rispetto a dei parametri addizionali quali ad esempio i gradienti $K_n$. A questo punto utilizzando la libreria LIELIB sviluppata da E. Forest, si calcola il tune shift utilizzando un approccio basato sugli operatori di Lie. Il risultato finale é la conoscenza del tune della macchina come funzione, non solo degli invarianti non lineari, ma soprattutto dei parametri addizionali desiderati. Un programma scritto dall'autore compie poi la minimizzazione vera e propria del tune in maniera estremamente semplice e rapida.
Nel prossimo capitolo mostreremo come sia possibile applicare le tecniche descritte in un caso realistico: la minimizzazione degli errori multipolari in LHC.

# Capitolo 4

# Correzione del Tune Shift dovuto agli Errori Multipolari in LHC

Il modello standard rappresenta uno dei capisaldi della fisica moderna. La sua conferma sperimentale ha avuto luogo nei primi anni ottanta, quando é stato possibile identificare la particella $Z^0$ tra i prodotti di decadimento delle collisioni tra protoni e antiprotoni in SPS. La costruzione di LEP ha poi permesso di verificare in dettaglio le previsione fatte dalla teoria utilizzando come sonde elettroni e antielettroni. L'energia che queste particelle sono in grado di raggiungere é dell'ordine dei 50 GeV per fascio. Con l'avvio della fase due di LEP sarà possibile spingersi fino a 100 GeV. Nel frattempo a Fermilab, utilizzando protoni e le corrispondenti antiparticelle, si lavora ad energie dell'ordine di 800 GeV che corrispondono, però, a solo un centinaio di GeV a livello di quarks e gluoni. é ormai quasi universalmente riconosciuto che il prossimo obiettivo della fisica delle interazioni fondamentali é quello di sondare la regione di energie dell'ordine del TeV. Si aprono dunque due possibilità distinte: orientarsi verso una macchina a elettroni la cui energia si aggiri attorno a uno o due GeV, oppure considerare una macchina a protoni capace di raggiungere energie comprese tra gli 8 e i 20 TeV.
La prima ipotesi é estremamente ardua da realizzare allo stato attuale delle conoscenze. A causa dell'enorme quantità di energia dissipata sotto forma di radiazione di sincrotrone, non é concepibile progettare una macchina circolare con tali prestazioni. Lo sviluppo di un collider lineare, d'altronde, é ben lungi dall'essere realizzabile in tempi brevi, nonostante i risultati incoraggianti ottenuti a Stanford con SLC. Rimane dunque la seconda alternativa: una macchina circolare a protoni. L'elevata energia non é comunque l'unico requisito richiesto a questa macchina. Deve infatti avere anche una elevata

luminosità. La luminosità é definita come il numero di possibili collisioni che si hanno nell'unità di tempo. Poichè le sezioni d'urto dei processi rilevanti decadono come $E^{-2}$, per poter compiere osservazioni ad alta energia é necessario incrementare di conseguenza la luminosità di una macchina. é quindi chiaro che, a causa della bassa efficienza del processo di produzione degli antiprotoni, bisognerà progettare una macchina che acceleri due fasci di protoni. Queste sono le caratteristiche di base del Large Hadron Collider che é in avanzata fase di progettazione al CERN: un acceleratore circolare ad alta energia (7.7 TeV) e con elevata luminosità.
I due obiettivi rappresentano una vera e propria sfida scientifica e tecnologica. Il raggiungimento di una elevata luminosità quale quella richiesta, dell'ordine di $10^{34}$ cm$^{-2}$s$^{-1}$, rappresenta un risultato certamente non banale. Per definizione si ha che

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 k f \gamma}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \tag{4.1}$$

dove $N$ é il numero di particelle per bunch, $k$ il numero di bunches, $f$ la frequenza di rivoluzione mentre $\sigma_{x,y}$ rappresentano le dimensioni trasverse del fascio nel punto di collisione misurate in termini delle varianze delle distribuzioni spaziali supposte gaussiane. I limiti imposti all'aumento arbitrario di $\mathcal{L}$ sono dovuti in primo luogo alle interazioni elettromagnetiche tra un fascio e le particelle dell'altro. Questa azione é fortemente non lineare e provoca un comportamento stocastico del fascio qualora la densità di particelle per bunch superi precisi valori critici che sono stati determinati dagli studi compiuti sugli attuali colliders di protoni e antiprotoni al CERN e al Fermi Laboratory. Altri fattori limitano il valore della corrente circolante e di conseguenza la luminosità. Come esempio si può citare l'interazione tra il fascio e la camera a vuoto in cui si muove. Essendo quest'ultima conduttrice si ha una corrente indotta dal fascio che a sua volta esercita un'azione sulle particelle. Si ha dunque un complesso fenomeno di feedback che può generare instabilità nel fascio.
Per quanto riguarda il raggiungimento dell'energia di interesse, essendo la circonferenza di questa macchina fissata ab initio dalle dimensioni del preesistente magnetico dipolare necessario per mantenere i protoni sull'orbita prevista risulta essere predeterminato e dell'ordine di 10 T. Inoltre i due fasci che circolano nella macchina hanno la medesima carica, e quindi si impone l'uso di due canali magnetici separati in cui il campo dipolare abbia segno opposto. Per soddisfare questi requisiti si é costretti ad avvalersi di magneti *superconduttori* del tipo *due-in-uno*: all'interno dello stesso criostato, utilizzato per raggiungere le temperature tipiche che rendono possibile la superconduttività, si trovano due magneti separati in cui circolano i due

fasci di particelle.
Il problema maggiore dovuto all'impiego di questi magneti é dovuto al fatto

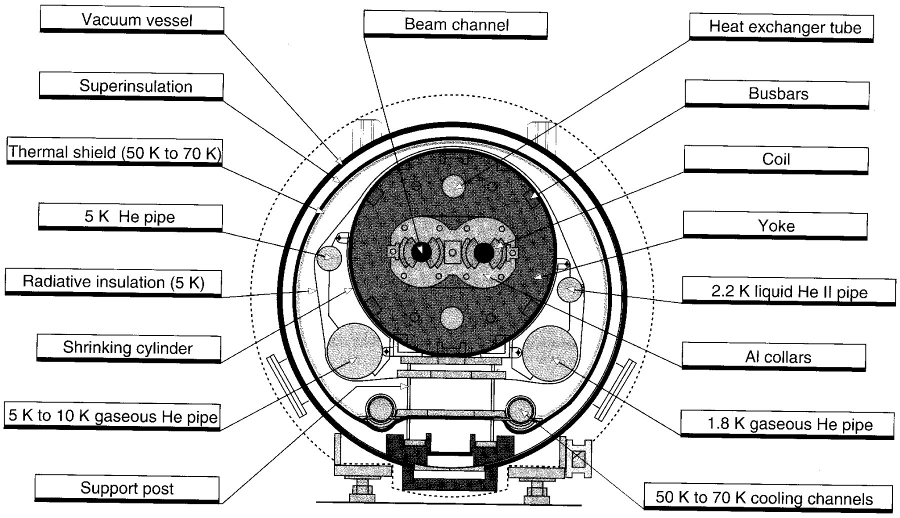



Figura 4.1: Sezione di un magnete di LHC del tipo due-in-uno.

che il campo generato ha rilevanti componenti multipolari. Risulta dunque necessario prevedere una strategia che minimizzi gli effetti di questi errori sulla dinamica delle particelle. Generalmente vengono usati a tale scopo un insieme di magneti (detti correttori) che producono un campo non lineare simile a quello dovuto agli errori multipolari. I correttori, poi, possono essere posizionati o all'interno dei magneti che rappresentano la sorgente di errori, oppure nell'immediata vicinanza.
La prima soluzione permette di correggere in maniera estremamente localizzata gli errori. I valori che i correttori devono assumere sono poi legati in maniera banale agli errori da correggere. Si hanno però notevoli problemi costruttivi dovuti alla necessità di alloggiare questi magneti speciali all'interno di altri.
La seconda possibilità, scelta per LHC, fornisce delle correzioni quasi locali e ha il vantaggio di minori complicazioni costruttive. Rimane comunque il problema di determinare i valori dei correttori atti a compensare gli effetti degli errori.
In questo capitolo mostreremo, appunto, come l'approccio con le forme normali possa essere proficuamente usato per calcolare, in maniera efficiente, i valori dei gradienti dei vari correttori richiesti per ridurre l'influenza degli errori sul tune shift in LHC [73, 74].

## 4.1 Generalità sui magneti superconduttori

Come é stato detto l'uso di magneti superconduttori é stato imposto dalla necessità di raggiungere energie estremamente elevate. Pur comportando delle difficoltà tecniche notevoli, nondimeno l'uso di questi magneti ha anche permesso il raggiungimento di notevoli risparmi energetici e questo fatto é certamente positivo in un momento in cui la coscienza ambientalista sta accrescendo sempre più la sua pressione sull'opinione pubblica. Infatti

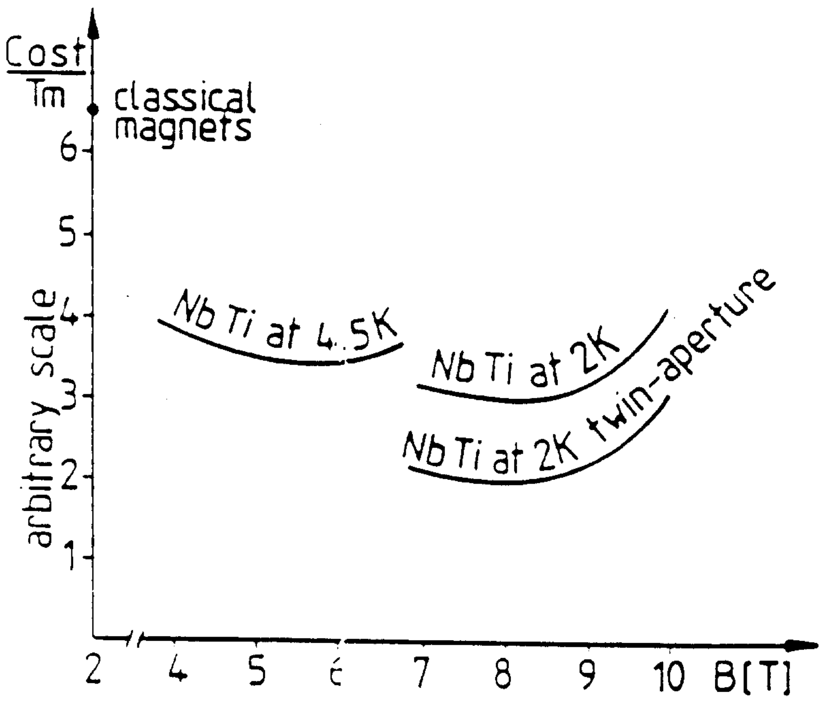



Figura 4.2: Andamento del costo di un magnete in funzione del campo magnetico prodotto.

con l'utilizzazione di magneti superconduttori la potenza dissipata é dovuta principalmente al sistema criogenico necessario per raffreddare i magneti. Si arriva così al risultato paradossale che la potenza richiesta per LHC sarà comparabile con quella utilizzata attualmente per le operazioni di SPS che pure opera ad un'energia venti volte inferiore e con una luminosità diecimila volte più piccola.
Per quanto riguarda i problemi prodotti da questi magneti, considereremo

in primo luogo quelli connessi al mantenimento delle proprietà di superconduttività. Questo stato dipende in maniera cruciale da tre parametri $T, B, \vec{J}$ che rappresentano la temperatura, il campo magnetico e la densità di corrente. Superando certi valori critici i materiali compiono la transizione che li riporta nel loro stato di conduttori normali. Molteplici sono i motivi che possono originare detta transizione. In primo luogo le particelle che incidono sui magneti depositano la loro energia provocando un surriscaldamento e dunque una transizione. é quindi necessario un efficiente sistema di collimatori [75, 76, 77] per l'assorbimento delle particelle prima che raggiungano i magneti. Anche la radiazione di sincrotrone rappresenta un pericolo per i magneti che devono essere opportunamente protetti con schermi.
Le elevate forze in gioco (dell'ordine di 400 t per metro) possono poi causare movimenti delle strutture che costituiscono i magneti provocando nuovamente una transizione a causa del calore prodotto dalla frizione dei vari componenti. Una conseguenza di questo meccanismo é il cosiddetto fenomeno del *training*: il magnete raggiunge gradualmente il campo massimo passando attraverso diversi processi di transizione allo stato di conduttore normale. Ciò é dovuto al movimento dei vari conduttori a seguito delle intense forze elettromagnetiche. Le diverse parti raggiungono delle situazioni di equilibrio in tempi diversi. Ogni volta che cessano i movimenti il magnete torna superconduttore e incrementa il campo prodotto. é ovviamente molto importante che questo meccanismo si verifichi una volta sola e non ogni volta la corrente é incrementata.
Passando a considerare il problema della qualità del campo prodotto dai magneti superconduttori, illustreremo la situazione considerando dei magneti standard, non del tipo due in uno [78, 79]. Da un punto di vista concettuale questo approccio é più che sufficiente per illustrare i fenomeni. Definito un sistema di coordinate cilindrico $(z, r, \theta)$, é noto che il potenziale vettore generato da una corrente $I$ parallela all'asse $z$ e posta a una distanza $a$ dall'origine ha solo componente lungo $z$ e vale

$$A_z(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{a}, \tag{4.2}$$

dove $R = [a^2 + r^2 - 2ar\cos(\phi - \theta)]$ é la distanza del punto $P$ dalla corrente. Se ipotizziamo che $r < a$, utilizzando lo sviluppo del logaritmo, otterremo per il potenziale vettore e le componenti del campo magnetico le seguenti espressioni

$$A_z(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\phi - \theta)], \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\cos[n(\phi-\theta)] \\ B_r &= -\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\sin[n(\phi-\theta)] \end{aligned} \quad . \tag{4.4}$$

Chiaramente $B_z = 0$, quindi anche nel seguito tralasceremo tale componente del campo magnetico. Se ora consideriamo invece una distribuzione di corrente angolare del tipo

$$I(\phi) = I_0 \cos\phi, \tag{4.5}$$

ripetendo quanto fatto in precedenza otteniamo per il campo magnetico la seguente espressione

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\cos[m(\phi-\theta)] \\ B_r &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\sin[m(\phi-\theta)] \end{aligned} \quad . \tag{4.6}$$

L'equazione precedente esprime il campo di un multipolo puro di ordine $2m$. Più precisamente si dice multipolo *normale*. Se si considera $I(\phi) = I_0 \sin\phi$ allora si ha il cosiddetto multipolo *skew*. In un magnete superconduttore non si riesce a riprodurre una distribuzione di corrente uguale a quella (4.5), ma si usano delle approssimazioni ottenute considerando degli strati di corrente. La qualità di una tale approssimazione si può quantificare utilizzando l'espansione generale in multipoli

$$\begin{aligned} B_\theta &= B_{rif}\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{n-1}(b_n\cos n\theta - a_n\sin n\theta) \\ B_r &= B_{rif}\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{n-1}(-a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) \end{aligned} \tag{4.7}$$

dove $B_{rif}$ é il campo di riferimento (nel caso di un dipolo é il campo dipolare) e $r_0$ é tipicamente una frazione dell'apertura del magnete (nel caso di LHC $r_0 = 10$ mm). Dunque in principio i vari coefficienti $a_n, b_n$ dovrebbero essere piccoli per avere una buon qualità di campo. Per inciso la relazione tra lo sviluppo (4.7) e l'analogo utilizzato nel capitolo precedente é facile da ricavare e risulta

$$k_n = \frac{(n-1)!}{r_0^{n-1}}b_n, \qquad j_n = \frac{(n-1)!}{r_0^{n-1}}a_n \tag{4.8}$$

Dall'analisi delle simmetrie dei campi multipolari puri segue che nel caso di approssimazioni reali a queste distribuzioni non tutti i termini nello sviluppo (4.7) sono presenti: ad esempio nel caso di un magnete a simmetria dipolare si avranno solo termini dispari normali. Se consideriamo ora il campo prodotto da un guscio di corrente compreso tra i raggi $a_1, a_2$ e di apertura angolare $2\phi_l$, si ricava che il termine $n$–esimo dello sviluppo in multipoli vale

$$b_n = (a_2 - a_1)\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\sin n\phi_l. \tag{4.9}$$

Dunque i coefficienti $b_n$ sono in generale diversi da zero. Se però si sceglie l'angolo $\phi_l$ opportunamente, é possibile annullare $b_3$. Ciò nonostante il primo termine non nullo, $b_5$, risulterà inaccettabilmente grande. é possibile ridurre anche questo utilizzando un secondo guscio di corrente adattato al primo e con una diversa apertura.angolare. Questo nuovo parametro libero potrà essere usato per annullare anche $b_5$. Un ulteriore accorgimento consiste nell'interporre una lamina non conduttrice tra i due gusci permettendo la riduzione anche di $b_7$ e $b_9$.

Ovviamente, qualora il valore dell'angolo $\phi_l$ non sia esattamente uguale a quello teorico, i termini $b_3, b_5$ non saranno annullati esattamente. Tipicamente per avere $b_3 \leq 1 \times 10^{-4}$ si devono avere tolleranze costruttive dell'ordine di 10 $\mu$m cosa difficilmente raggiungibile in pratica per magneti che hanno lunghezze superiori a 10m. Le forze magnetiche tra i vari conduttori che contribuiscono a generare i gusci di corrente non migliorano la situazione.

In aggiunta ai fenomeni di tipo geometrico dovuti all'approssimazione della distribuzione ideale (4.5),i termini $b_n, a_n$ hanno origine anche dalle *correnti persistenti*. Quando il campo magnetico prodotto non é particolarmente intenso, cosa che avviene all'iniezione del fascio nella macchina, le correnti persistenti giocano un ruolo chiave nella produzione di errori multipolari. Queste sono infatti responsabili della generazione di multipoli il cui campo si oppone alla crescita del campo magnetico. Nel caso specifico dei dipoli ancora una volta si ha che i termini prodotti sono di ordine dispari, in più $b_3$ risulta essere di gran lunga dominante sui rimanenti coefficienti.

Il fenomeno delle correnti persistenti non é certamente caratteristico dei materiali superconduttori. Tutte le volte che si ha una variazione di corrente si genera un campo elettromagnetico che si oppone a questa variazione. Nel caso di conduttori normali, però, queste correnti hanno un decadimento esponenziale. La decrescita é quindi molto rapida. Nel caso dei materiali superconduttori a causa della resistività uguale a zero, queste correnti non decadono in tempi brevi. La dipendenza temporale é all'incirca logaritmica e la ragione ha i suoi fondamenti nelle proprietà intrinseche dei superconduttori e in fenomeni quantistici quali il *flux creep*.

Per ridurre al massimo gli effetti prodotti dalle correnti persistenti si utilizzano per la fabbricazione dei cavi superconduttori complesse tecniche costruttive,quali l'immersione dei filamenti superconduttori in matrici di rame scarsamente conduttrici ed altri ancora.

## 4.2 Descrizione del modello studiato

Il fatto che LHC deve essere costruito nel tunnel di LEP, in cui si ha a disposizione uno spazio limitato, implica che la sua struttura deve seguire da vicino quella di LEP. LHC é una macchina con simmetria di ordine otto. é costituito da otto archi uniti tramite otto sezioni diritte. gli otto archi sono divisi in *pari* e *dispari*. Il fascio nel percorrere la circonferenza della macchina passa dalla parte interna a quella esterna per otto volte, in modo da non avere differenze di percorso tra i due fasci. Le inserzioni, suddivise in *dispari* e *pari* a causa delle lievi differenze tra i due tipi, hanno una lunga sezione rettilinea centrata sul punto di incrocio dei fasci. Le quattro inserzioni pari sono intercambiabili per funzione e sono concepite per accogliere gli esperimenti, mentre per quanto riguarda quelle dispari ve ne sono due con funzioni ben definite. L'inserzione numero tre, non molto differente da quelle sperimentali, é concepita con lo scopo di assorbire le particelle con elevata ampiezza prima che possano essere perdute nei magneti superconduttori. In questa regione si trova il sistema di collimatori deputati a raccogliere le particelle. Per quanto riguarda l'inserzione numero cinque, questa deve assolvere allo scopo di smorzare il fascio in caso di situazioni di emergenza. Lo schema generale delle inserzioni prevede, partendo dal punto di intersezione, un tripletto di quadrupoli, quindi il dipolo con la funzione di separare i fasci e nuovamente un tripletto di quadrupoli. Tra le inserzioni e gli archi si trovano i soppressori di dispersione.che sono costituiti da quattro quadrupoli intercalati con tre dipoli dello stesso tipo di quelli usati nella cella FODO della macchina. Vi é, poi, un ulteriore dipolo lungo $\approx 9$ m.
Per quanto riguarda gli archi, questi sono costituiti da 24 celle regolari. La loro struttura é mostrata in figura 4.4. La cella é stata modificata rispetto a quanto previsto nella precedente versione [80]. Questi cambiamenti sono stati apportati in s eguito ai test sul comportamento dei dipoli prodotti, i quali hanno dimostrato una notevole difficoltà a raggiungere il campo richiesto di 10T. Per ovviare a questo problema si é dunque provveduto ad allungare i dipoli in modo da poter diminuire il campo magnetico richiesto senza variare sensibilmente l'energia della macchina. In definitiva si hanno sei dipoli per cella (MB nella figura) lunghi $\approx 13$ m. Il campo massimo previsto é di 9.5 T ed ogni dipolo produce una curvatura di 4.8 mrad. All'estremità di

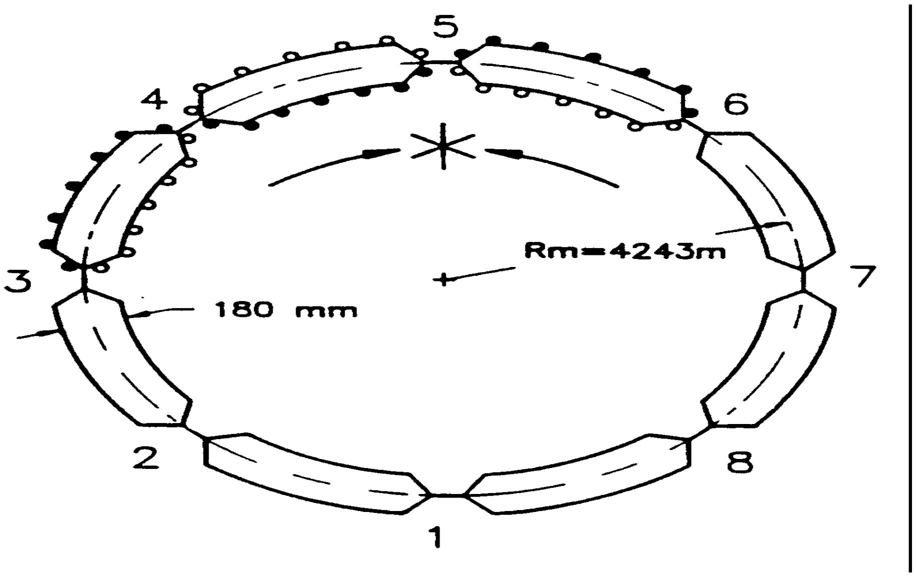



Figura 4.3: Struttura generale di LHC.

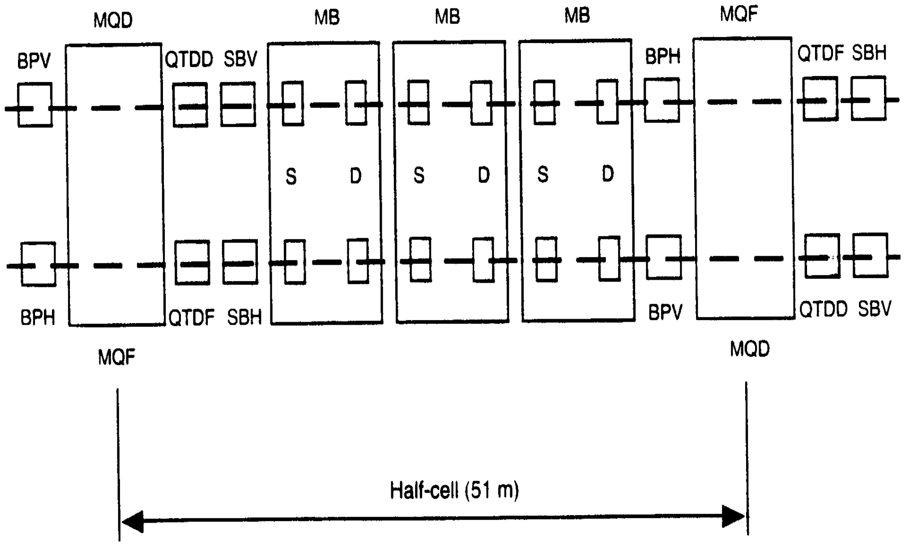



Figura 4.4: Struttura della semi-cella FODO di LHC.

ogni dipolo si trovano i magneti correttori (S e D in figura). Si tratta di sestupoli e decapoli con il compito di correggere gli errori prodotti dai dipoli. In corrispondenza dei quadrupoli principali (MQD e MQF) si hanno dei piccoli quadrupoli per regolare l'avanzamento di fase della macchina (QTDF e QTDD) con incluso anche un correttore ottupolare e una coppia di monitors (BPV e BPH). Infine si hanno dei correttori sestupolari e dipolari (SBV e

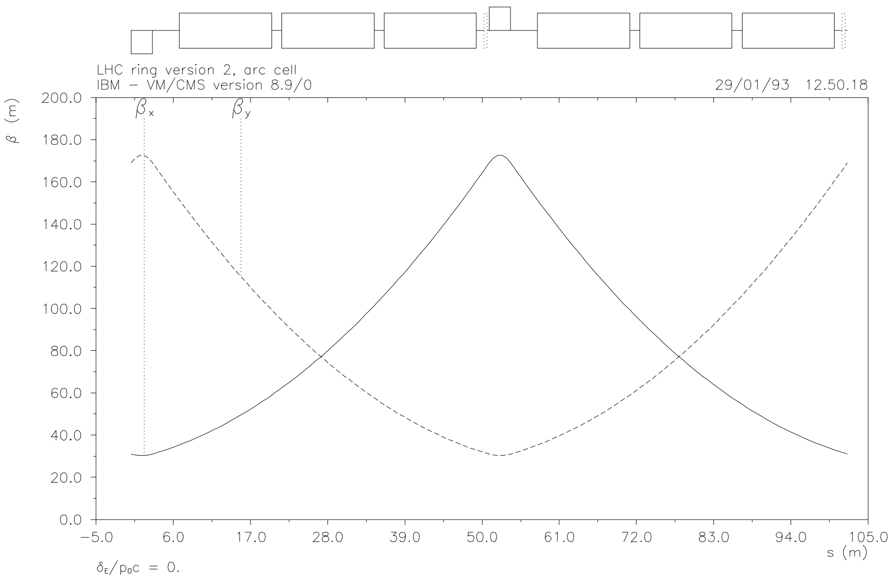



Figura 4.5: Funzioni ottiche lineari di una cella FODO.

SBH). Le funzioni ottiche lineari $\beta_x, \beta_y$ di una cella FODO sono mostrate in figura 4.5. Per il calcolo dei valori dei correttori, descritto nel prossimo paragrafo, si sono considerati solo gli errori sistematici normali nei dipoli. I quadrupoli, ulteriori sorgenti di termini multipolari, sono stati considerati senza errori. Gli errori utilizzati nei calcoli sono mostrati nella tabella 4.2.

Dalla tabella 4.2 risultano alcune notevoli regolarità. I termini multipolari di ordine pari hanno un doppio segno. Questo significa che a seconda del tipo di arco, pari o dispari, l'errore ha segno positivo o negativo. é questa una simmetria che deriva dalla struttura due-in- uno dei magneti. Proprio a causa di questa proprietà si é deciso di considerare, nel contesto del calcolo dei correttori, l'errore ottupolare uguale a zero in quanto questo cambio di segni produce una autocompensazione globale di $b_4$ come é stato osservato in studi precedenti. La consistenza di questa ipotesi é stata verificata e verrà discussa nel seguito. Anche gli errori dipolari e quadrupolari non sono stati

| Ordine | Iniezione $B = 0.58T$ | Campo medio $B = 2.5T$ | Collisione $B = 9.5T$ |
|---|---|---|---|
| n | $b_n$ | $b_n$ | $b_n$ |
| 1 | 5.00 | 5.00 | 5.00 |
| 2 | $\pm 1.15$ | $\pm 1.13$ | $\pm 0.85$ |
| 3 | $-2.19$ | $-0.071$ | 2.61 |
| 4 | $\pm 0.11$ | $\pm 0.11$ | $\pm 0.07$ |
| 5 | 0.34 | 0.04 | 0.04 |
| 6 | $\pm 0.001$ | $\pm 0.001$ | $\pm 0.002$ |
| 7 | 0.035 | 0.02 | 0.02 |
| 8 | $\pm 0.002$ | $\pm 0.002$ | $\pm 0.002$ |
| 9 | 0.007 | 0.005 | 0.005 |

Tabella 4.1: Errori multipolari nei dipoli espressi di LHC in unità di $10^{-4}$ e riferiti a $r_0 = 10$ mm.

considerati. In definitiva ci si é concentrati sull'effetto di $b_3, b_5$ controllando l'influenza di $b_7, b_9$ sui risultati ottenuti.

## 4.3 Risultati della correzione

Prima di cominciare la descrizione dei risultati ottenuti, vorremmo fare alcune precisazioni. Per quanto concerne il numero di correttori indipendenti, é ovvio che in linea di principio si può arrivare ad avere sei sestupoli nella cella più due sestupoli cromatici. Nel caso dei decapoli si hanno solo i correttori all'estremità dei dipoli e quindi si possono sfruttare al più sei decapoli.
Avere degli elementi indipendenti significa alimentarli con circuiti indipendenti il che implica costi addizionali non indifferenti. Quindi la minimizzazione del tune shift deve essere attuata anche considerando il problema di sfruttare il numero minimo di elementi correttori possibile. Per questo motivo si sono sempre considerati indipendenti solo gli elementi appartenenti ad una semi-cella. Questo significa avere cinque sestupoli indipendenti e tre decapoli. Dopo avere controllato l'influenza del numero di elementi sulla qualità delle correzioni, si é giunti alla conclusione che ridurre ulteriormente il numero di elementi disponibili non avrebbe peggiorato le correzioni e, per contro, permetteva un notevole risparmio di circuiti d'alimentazione. In definitiva i calcoli dettagliati si sono effettuati considerando la situazione in cui si hanno tre sestupoli indipendenti (due sestupoli cromatici e uno nella cella) più un solo decapolo.
Per quanto concerne il tipo di funzioni minimizzate, si é deciso di lavorare su due tipi di componenti del tune shift, ossia le componenti che dipendono solamente dall'ampiezza e quelle puramente dipendenti dalla deviazione del momento. Questo significa che si sono considerate funzioni del tipo $\chi_{i,0}$ o $\chi_{0,i}$. La tecnica di minimizzazione usata é stata quella ordine per ordine. Si tenga presente che, come si può dedurre dalla tabella 3.1, i contributi di sestupoli e decapoli (siano essi errori o correttori) entrano nel tune shift ad ordini differenti. Questo significa che é possibile introdurre la sola componente sestupolare dell'errore ($b_3$) e correggerla utilizzando i correttori corrispondenti. Introducendo i valori calcolati in questo modo per i sestupoli e aggiungendo gli errori decapolari, si determinano le intensità dei correttori decapolari.
Indipendentemente dal tipo di correzione considerata, effetti di ampiezza o di momento, bisogna sempre annullare la cromaticità lineare. Questa rappresenta il contributo al tune shift di ordine zero negli invarianti e lineare in $\delta$ (deviazione del momento delle particelle). Come si vede nella tabella 3.1, questo contributo del tune shift dipende linearmente dai sestupoli e dai quadrupoli (che sono la sorgente principale di questo effetto). In generale,

quindi, si può affermare che la condizione di annullamento della cromaticità lineare impone una relazione tra gli $n$ correttori sestupolari, del tipo

$$\begin{array}{rcl} \xi_x + a_1 K_{3,1} + \ldots a_5 K_{3,n} & = & 0 \\ \xi_y + \hat{a}_1 K_{3,1} + \ldots \hat{a}_5 K_{3,n} & = & 0\text{'} \end{array} \tag{4.10}$$

dove con $\xi_{x,y}$ si é indicata la cromaticità naturale della macchina. Per correggere questo effetto si utilizzano i due sestupoli laterali a fianco dei quadrupoli. Questo per avere una correzione localizzata vicino alla sorgente dell'errore. Questo significa che il valore dei sestupoli cromatici rimane determinato secondo la relazione

$$\begin{array}{rcl} K_{3,D} & = & \alpha_0 + \alpha_1 K_{3,1} + \ldots \alpha_1 K_{3,n} \\ K_{3,F} & = & \alpha_0 + \alpha_1 K_{3,1} + \ldots \alpha_1 K_{3,n} \end{array}. \tag{4.11}$$

dove con $K_{3,D}, K_{3,F}$ si sono indicati i sestupoli vicini ai quadrupoli focalizzanti e defocalizzanti rispettivamente. Chiaramente nel membro destro della (4.11) compaiono gli $n-2$ sestupoli rimanenti.
Ciò significa che nel nostro schema si ha un solo sestupolo libero a causa della necessità di imporre la condizione (4.10). Non resta altro che utilizzarlo per minimizzare o $\chi_{1,0}$ o $\chi_{0,1}$, in quanto abbiamo troppi coefficienti del tune (tre nel caso della dipendenza dall'ampiezza e due per la dipendenza da $\delta$) perchè si possa annullarli tutti contemporaneamente.

In figura 4.6 sono riportati i grafici con il tune shift orizzontale e verticale in funzione dell'ampiezza prima e dopo le correzioni operate utilizzando le forme normali. In questo caso si sono introdotti solo gli errori di tipo sestupolare. Si sono considerate tre situazioni differenti. In un primo caso si é corretto solo la cromaticità lineare della macchina, trascurando completamente gli effetti non lineari. Si sono dunque sfruttati solamente i sestupoli cromatici, mentre i rimanenti correttori sono stati posti uguali a zero. Nelle altre due situazioni analizzate si sono minimizzati anche gli effetti non lineari fino al primo ordine nel tune shift utilizzando tutti i correttori sestupolari a disposizione. In un caso si é lavorato con $\chi_{1,0}$, mentre nel secondo $\chi_{0,1}$. Le curve continue rappresentano il tune shift calcolato utilizzando le forme normali, mentre i punti sono ottenuti attraverso delle simulazioni numeriche definendo il tune shift come avanzamento di fase medio. Nelle simulazioni si é utilizzato un numero di iterazioni pari a circa $2 \times 10^3$, sufficiente cioé, per avere una precisione dell'ordine di $5 \times 10^{-3}$. Come si vede l'accordo tra le curve teoriche e i punti ottenuti con le simulazioni é più che buono in tutto l'intervallo di ampiezze. I valori dei correttori sestupolari permettono di ridurre il tune shift nella macchina dovuto agli errori. Si potrebbe obbiettare che il guadagno é marginale, visto che si ha un miglioramento in un piano

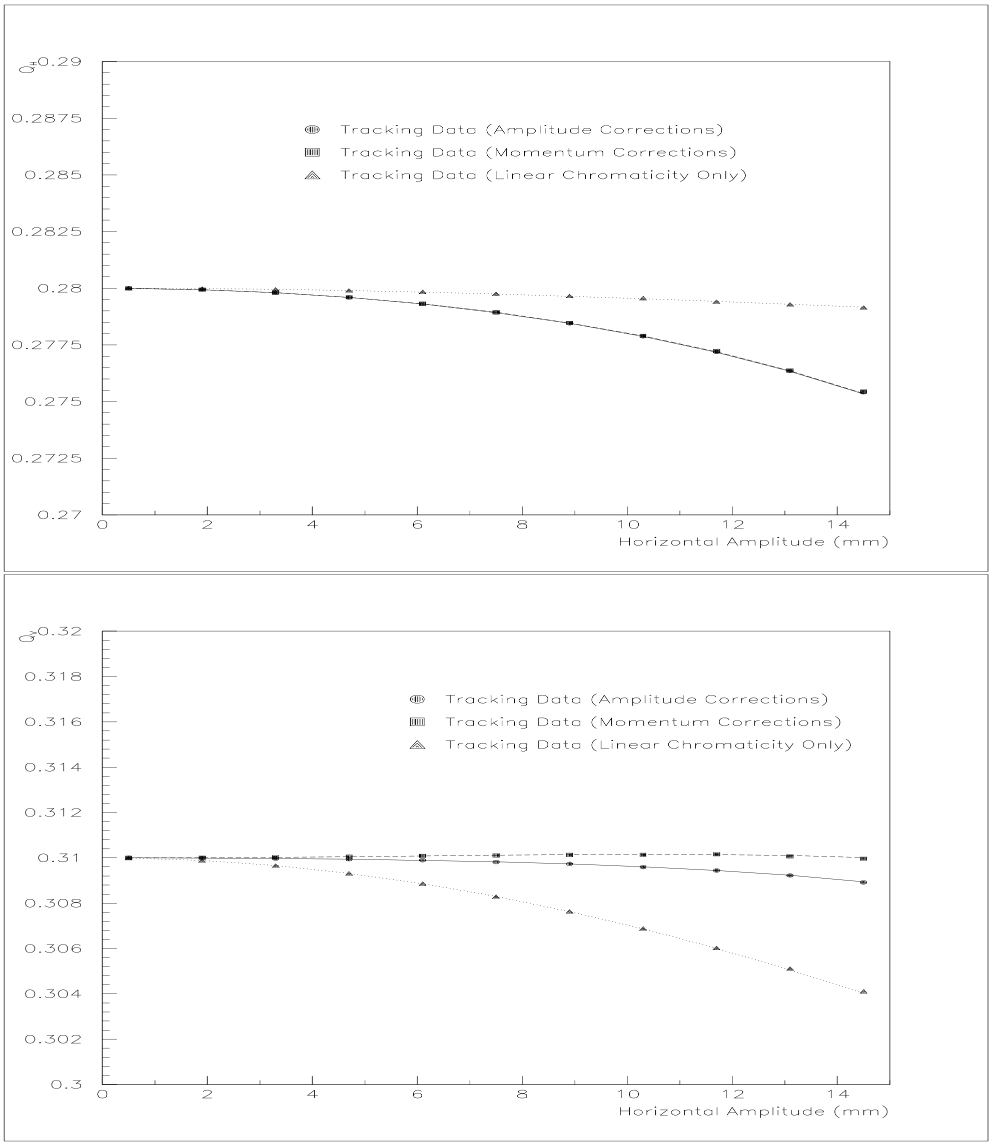



Figura 4.6: Correzione dell'errore $b_3$ in condizione di bassa energia utilizzando i correttori sestupolari.

di fase e un leggero peggioramento nell'altro. Questo fatto ha però una spiegazione ben precisa. Gli errori sono stati posti in tutti i dipoli della macchina, anche in quelli che si trovano nei soppressori di dispersione. In questa zona non si hanno dei magneti correttori. Risulta dunque che i correttori posti nelle celle FODO di LHC devono servire a minimizzare anche quegli effetti che sono prodotti in regioni lontane dell'acceleratore. Viene così a cadere il concetto di correzione locale: il correttore ha lo scopo di curare gli errori nelle immediate vicinanze. Se questo concetto risulta falso, allora il metodo perde la sua efficacia. Per verificare questa spiegazione si sono trascurati gli errori nel dipolo corto che si trova nelle inserzioni, e si é osservato come cambiano i valori dei correttori in conseguenza di questo cambiamento. In figura 4.7 si é riportato il risultato ottenuto per un errore sestupolare più grande di quello precedente, pari a $b_3 = -3.80 \times 10^{-4}$. Come in precedenza le curve continue rappresentano i risultati teorici delle correzioni, mentre i punti sono ottenuti con simulazioni numeriche con gli stessi parametri indicati in precedenza. é immediato notare come la correzione sia migliore nel caso in cui si sono trascurati gli errori nei dipoli corti. Questo é imputabile principalmente al fatto che le correzioni diventano sempre più locali. Ciò é confermato anche dai valori dei correttori sestupolari nella cella FODO che tendono a convergere al valore $-b_3$, come si avrebbe con uno schema perfettamente locale di correzione.
Nei grafici precedenti si sono sempre mostrati i valori del tune shift in funzione dell'ampiezza. Per quanto riguarda la dipendenza da $\delta$, si ha che gli errori sestupolari non introducono degli effetti rilevanti. Risulta infatti che per $\delta = \pm 2.0 \times 10^{-3}$ sia ha un tune shift minore o uguale a $4 \times 10^{-4}$ e quindi detta variazione é ben al di sotto delle tolleranze richieste. La situazione descritta si é presentata in tutti gli schemi di correzione riguardanti gli errori sestupolari. Per motivi di brevità non si é dunque ritenuto opportuno presentare i grafici relativi.
Avendo determinato i valori dei correttori sestupolari, é possibile introdurre nella macchina gli errori decapolari e procedere alla loro correzione. Anche in questa situazione non si ha un numero sufficiente di parametri liberi per annullare completamente il tune shift, bisogna dunque procedere a minimizzare le funzioni $\chi_{2,0}, \chi_{0,2}$. La minimizzazione é alquanto semplice in questo caso, poichè il secondo ordine del tune shift dipende linearmente da $K_5$, sia per quanto riguarda la dipendenza dall'ampiezza, che quella dal momento. Nel primo caso, per essere precisi, si ha che il gradiente decapolare entra nell'espressione del tune shift come termine di interferenza con i sestupoli. Essendo però il valore di tutti i sestupoli già fissato, in definitiva si ha una dipendenza lineare dai decapoli. Questo fatto risulta avere notevoli conseguenze, in quanto il valore dei correttori decapolari necessari per min-

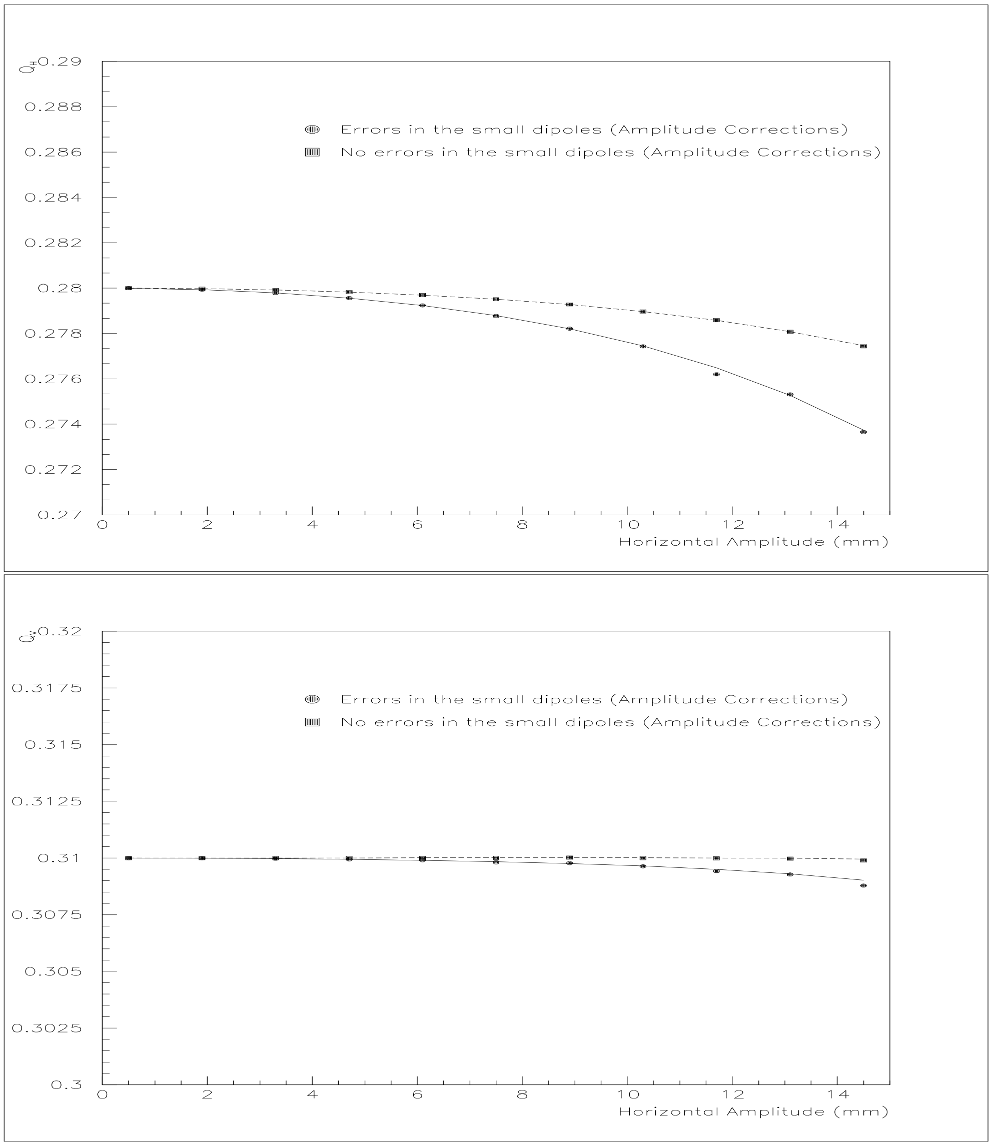



Figura 4.7: Confronto tra due differenti schemi di correzioni ottenuti includendo (curva continua) o meno (curva tratteggiata) gli errori sestupolari nel dipolo corto dei soppressori di dispersione.

imizzare $\chi_{2,0}$ dipende in maniera sensibile dal contenuto sestupolare della macchina. In figura 4.8 sono riportati i grafici del tune shift in funzione dell'ampiezza relativi alle correzioni con decapoli nel caso di bassa energia. Le diverse situazioni rappresentate dalle curve si riferiscono ai seguenti casi

**i)** Effetto degli errori decapolari sulle correzioni sestupolari, senza introdurre alcun correttore.

**ii)** Correzioni degli effetti in ampiezza.

**iii)** Correzioni degli effetti di momento.

Gli ultimi due casi sono stati considerati per le due possibili configurazioni di sestupoli correttori (minimizzazioni di $\chi_{1,0}$ o di $\chi_{0,1}$). Nella prima situazione si vede come l'accordo tra curve teoriche e dati numerici non sia buono come in precedenza. Questo é dovuto al fatto che l'errore $b_5$ non corretto introduce dei termini di ordine elevato che sono visibili nel tracking, ma non con le forme normali a causa dell'ordine finito di approssimazione. Incrementando ragionevolmente l'ordine utilizzato, per non incorrere in problemi di divergenza delle serie implicate, la discrepanza viene risolta. Detto disaccordo si risolve anche introducendo i correttori: in questo caso i due modi di determinare il tune shift danno risultati concordi. Si osserva anche come le differenze nei possibili tipi di correzioni con decapoli siano per lo più riconducibili alle differenze tra gli schemi sestupolari su cui si basano. é infine importante osservare come, dopo la correzione, la curva che rappresenta il tune shift coincide con ottima approssimazione con quella relativa al caso in cui si hanno solo sestupoli (errori e correttori) in LHC. Questo significa che la correzione con i decapoli é efficiente e permette di annullare quasi completamente il contenuto decapolare. Si noti come questo sia differente con quanto visto per i sestupoli, dove le correzioni non erano completamente ottimizzate a causa degli effetti non locali. Per i decapoli detti effetti sono molto meno importanti, in quanto, come é stato detto in precedenza, si tenta di correggere un effetto che é lineare in $K_5$. Per i sestupoli, invece, il termine che si dove minimizzare dipende da $K_3^2$. Questo spiega il perchè se le correzioni sono solo quasi locali i sestupoli ne risentono in maniera maggiore dei decapoli.

Per concludere l'analisi della correzione degli errori decapolari, si mostra in figura 4.9 l'effetto sul tune shift come funzione di $\delta$. Si distingue chiaramente il notevole contributo in $\delta^3$ tipico dei decapoli. Questo effetto può comunque essere ridotto notevolmente con la procedura utilizzata. Ciò anche se, con un solo decapolo indipendente, non é possibile annullare completamente il tune shift.

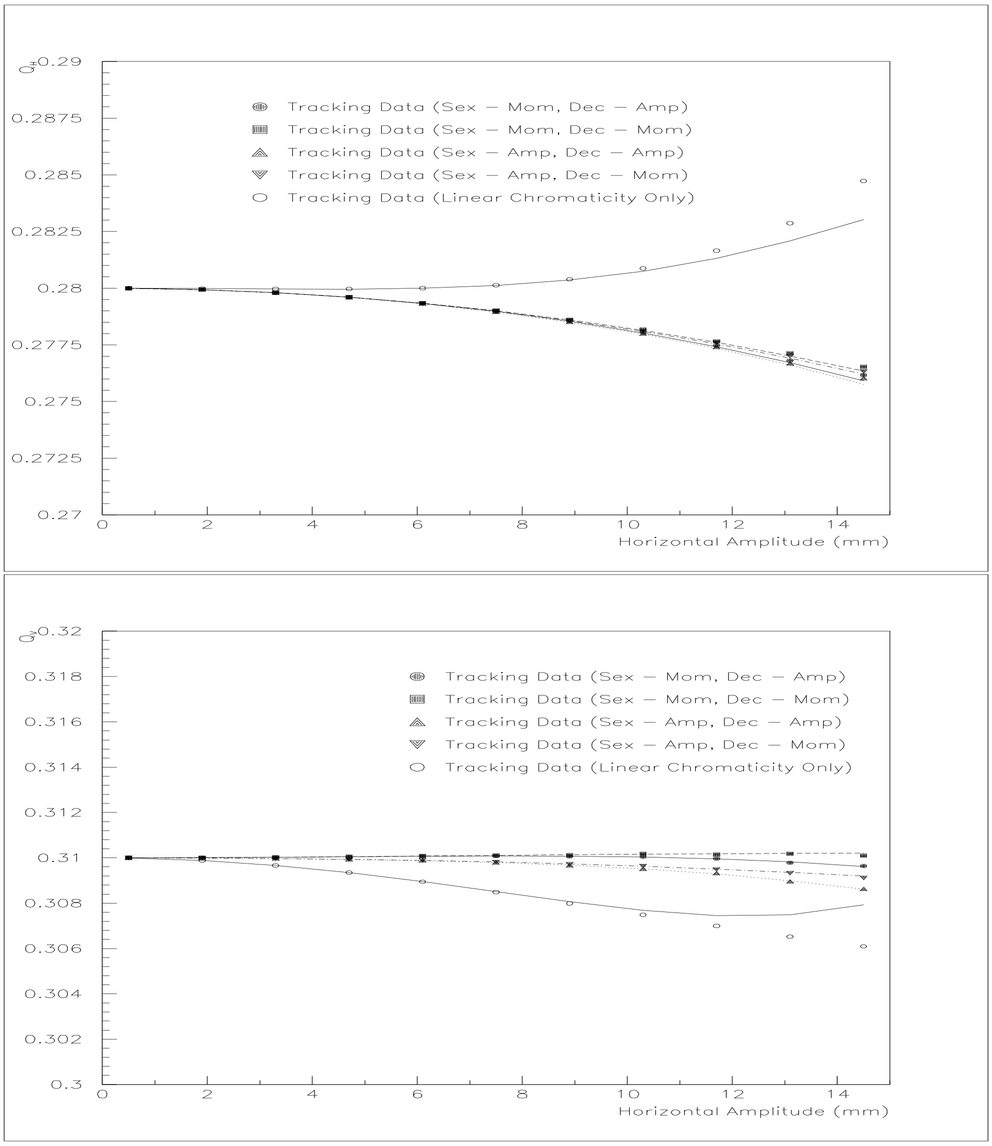



Figura 4.8: Correzione dell'errore $b_5$ utilizzando i correttori decapolari nella situazione di bassa energia.

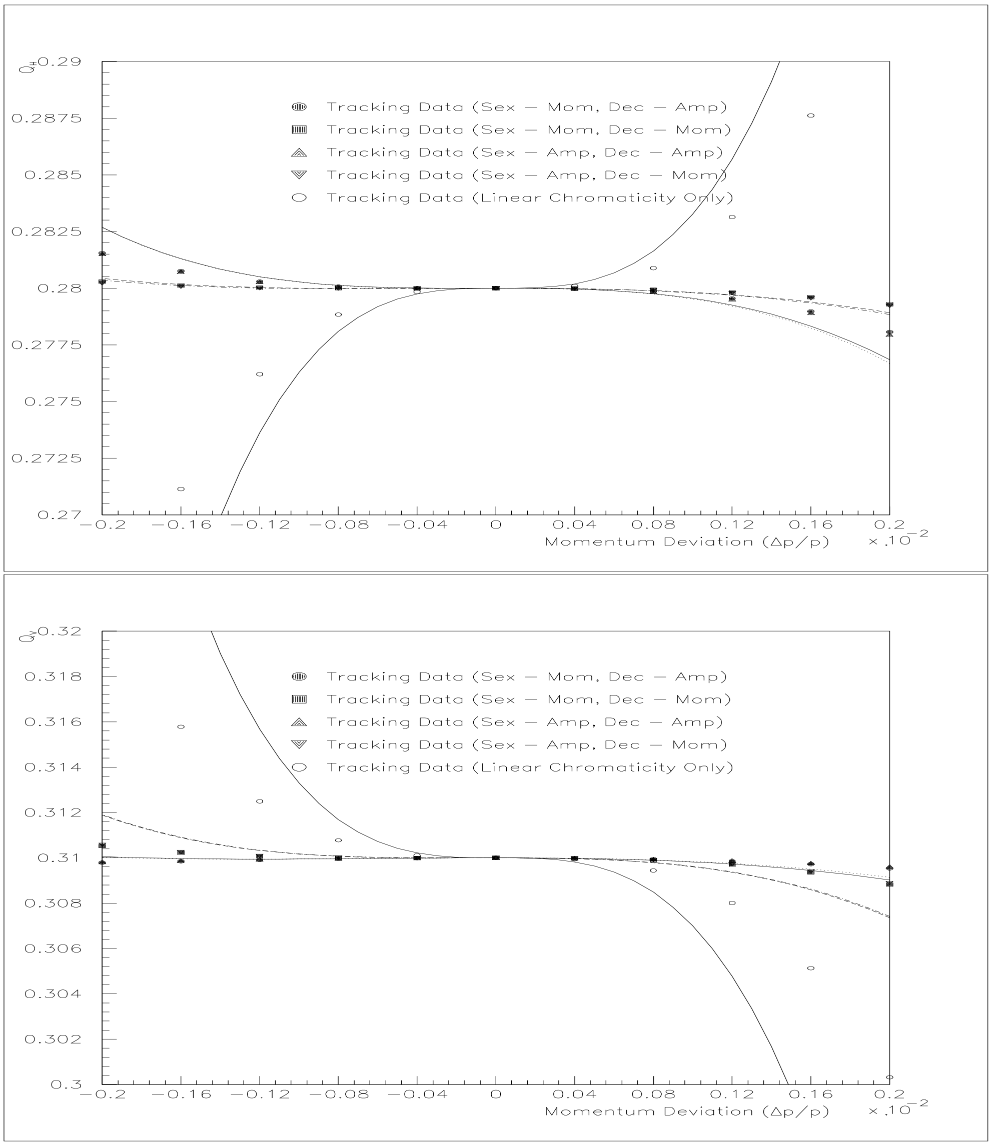



Figura 4.9: Correzione dell'errore $b_5$ utilizzando i correttori decapolari nella situazione di bassa energia.

| Correttore | Gradiente Integrato (Minimizzazione $\chi_{i,0}$) | Gradiente Integrato (Minimizzazione $\chi_{0,i}$) |
|---|---|---|
| Sestupolo Cromatico (Defocusing) | $-0.744 \times 10^{-1}$ | $-0.805 \times 10^{-1}$ |
| Sestupolo Cromatico (Focusing) | $0.132 \times 10^{-1}$ | $0.901 \times 10^{-2}$ |
| Sestupolo di Cella (S) | $-0.283 \times 10^{-1}$ | $0.302 \times 10^{-1}$ |
| Decapolo di Cella (D) (Minimizzazione di $\chi_{2,0}$ ) | $-4.06 \times 10^{2}$ | $-4.05 \times 10^{2}$ |
| Decapolo di Cella (D) (Minimizzazione di $\chi_{0,2}$ ) | $-3.77 \times 10^{2}$ | $-3.770 \times 10^{2}$ |

Tabella 4.2: Gradienti dei correttori sestupolari e decapolari utilizzati per compensare gli errori all'iniezione.

Infine i valori dei correttori calcolati utilizzando le forme normali nella situazione descritta sono riportati in tabella 4.3.

Per calcolare gli schemi di correzione precedenti si sono trascurati gli effetti indotti da errori di ordine superiore quali ad esempio $b_7$ e $b_9$. Un controllo é stato fatto per verificare la loro influenza sul tune shift corretto. Per quanto mostrato nella tabella 3.1 i gradienti legati a $b_7, b_9$, non hanno alcuna influenza su $\chi_{i,0}, \chi_{0,i}$ $i = 1, 2$. L'unica possibilità per introdurre degli effetti agli ordini più bassi nel tune shift é considerare contributi che dipendono sia dall'ampiezza che dal momento. In questo caso si vede che $b_7$ contribuisce a $\chi_{1,4}, \chi_{2,3}$, mentre $b_9$ a $\chi_{1,6}, \chi_{2,5}$. Per verificare l'effetto di questi errori si é dunque determinato il tune shift per particelle aventi una deviazione dal momento nominale diversa da zero. In particolare si é considerato $\delta = \pm 1.25 \times 10^{-3}$ essendo questo il valore tipico per LHC.

Anche il valore dell'errore é stato fatto variare in un intervallo compreso tra zero ed il valore presentato nella tabella 4.2. I risultati sono riportati in figura 4.10 per quanto riguarda $b_7$. Si tenga presente che in questa situazione il tune shift é stato calcolato in maniera puramente numerica, e le linee continue hanno l'unico significato di unire i punti ottenuti con i tracking. Come si vede l'influenza é notevole soprattutto a grandi ampiezze dove l'introduzione di questi errori induce instabilità (le oscillazioni sono dovute a condizioni iniziali instabili). Dunque é probabile che l'influenza di questi errori trascurati si manifesti soprattutto nel determinare l'apertura dinamica su tempi lunghi. Per valori fino a circa 8 mm sembra non essere rilevante la presenza di $b_7, b_9$. In questa regione caso dominano i termini dovuti ai sestupoli e decapoli, che contribuiscono a $\chi_{1,3}, \chi_{3,2}$, che, peraltro, non sembrano produrre un effetto drammatico, in quanto il tune shift a 8 mm é dell'ordine di $2 \times 10^{-3}$. Nella situazione di campo magnetico intermedio, corrispondente a circa 2.5T, gli errori sono praticamente trascurabili. Il loro effetto é stato controllato numericamente e dai risultati ottenuti non si é ritenuto opportuno procedere ad una correzione degli effetti prodotti da questi termini.
Incrementando il valore del campo magnetico fino al suo massimo si ha una nuova situazione per quanto riguarda gli errori. Il valore di $b_3$ cambia segno in quanto le correnti persistenti, che costituivano la sorgente principale dell'errore sestupolare a bassa energia, cedono il posto agli errori dovuti alle imperfezioni geometriche dei magneti. Si noti infatti il cambio di segno caratteristico di questo cambiamento. Questo fatto introduce dei mutamenti nel comportamento della macchina. La cromaticità lineare risulta cambiata così come il segno del termine quadratico del tune shift. Per quanto riguarda $b_5$, il suo valore é notevolmente diminuito rispetto alla situazione a bassa energia. Questa diminuzione é semplicemente dovuta all'aumento di energia. Nonostante queste differenze, utilizzando le forme normali é possibile anche in questo caso correggere in maniera opportune gli effetti degli errori sul tune shift.
Nel nostro studio é stata analizzata anche un'ultima situazione relativa la caso di alta energia. Prima di passare nella fase di collisione dei due fasci, l'ottica della macchina viene cambiata. La nuova configurazione ha il compito di raggiungere la massima luminosità possibile diminuendo la sezione trasversa del fascio nel punto di collisione. Questo si ottiene diminuendo il valore della funzione $\beta$ in tale punto. Detta diminuzione avviene agendo sui una serie di quadrupoli speciali. In questa configurazione il comportamento della macchina cambia completamente. La cromaticità naturale, dovuta al contributo dei quadrupoli nelle inserzioni, aumenta di circa tre volte. Saranno dunque richiesti sestupoli cromatici con un campo estremamente intenso, i quali, a loro volta, oltre a correggere la cromaticità lineare produrranno forti

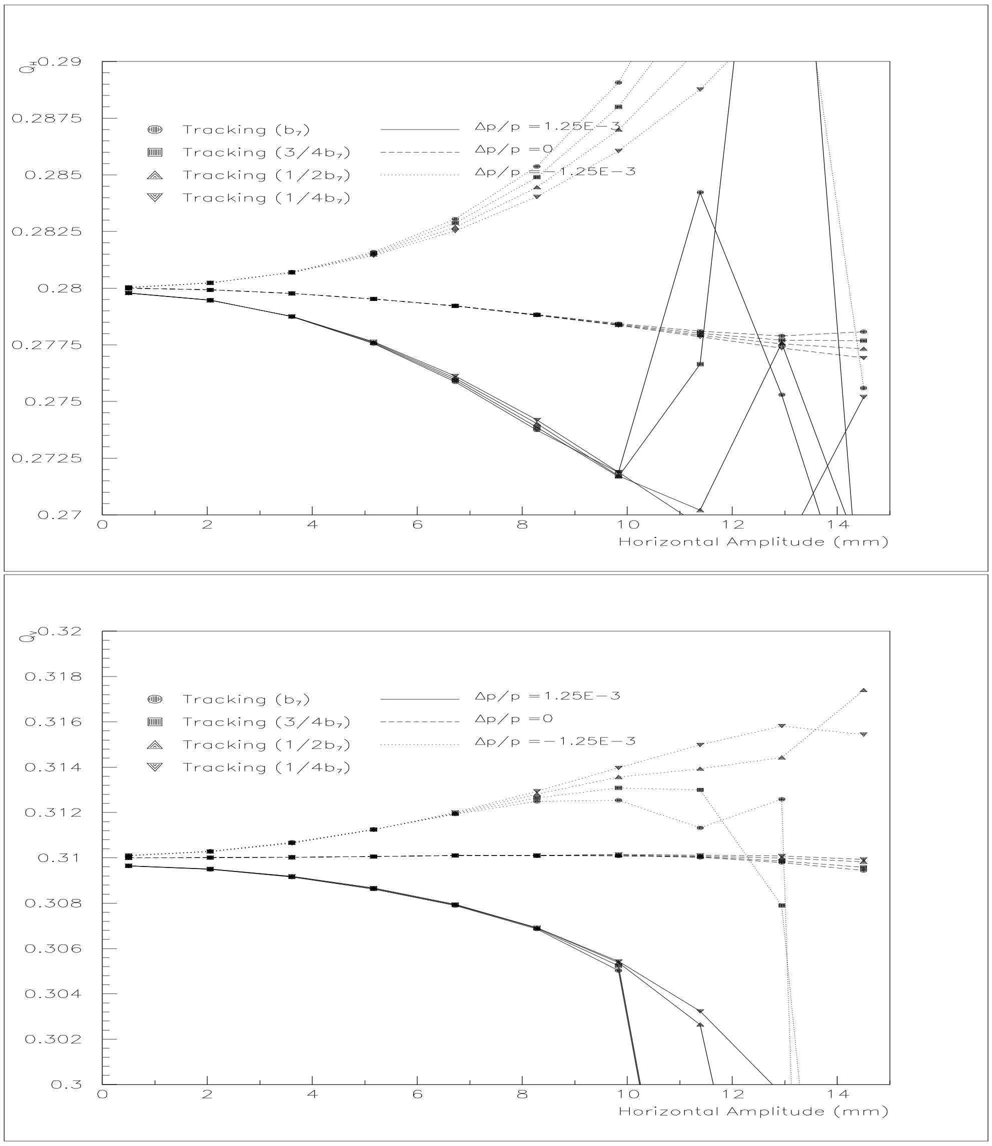



Figura 4.10: Effetto degli errori $b_7$ sullo schema di correzione determinato in precedenza in condizioni di bassa energia.

effetti non lineari. La struttura ottica della macchina, poi, non é certamente ottimizzata per la correzione di tali effetti. I correttori sestupolari sono infatti localizzati nella cella FODO della macchina e dunque non si trovano posizionati in vicinanza dell'errore da correggere. Di conseguenza l'eventuale tentativo di correzione é destinato a dare risultati peggiori di quelli ottenuti i precedenza. Per tale motivo in questo caso ci siamo semplicemente limitati a tentare di utilizzare i correttori sestupolari per correggere il tune shift come funzione dell'ampiezza. I risultati sono riportati in figura 4.11 in cui appare manifestamente come le correzioni non siano particolarmente efficaci. In questa situazione si potrebbe avere un miglioramento utilizzando un numero maggiore di sestupoli cromatici.indipendenti, disposti in modo tale da cancellare vicendevolmente i diversi contributi. é opportuno sottolineare il fatto che, nonostante il tune sifht non sia corretto al livello delle situazioni precedenti, nondimeno in collisione la regione fisica occupata dal fascio é estremamente ridotta rispetto ai casi precedenti e quindi si dovrebbe avere una compensazione con la scarsa efficacia delle correzioni ottenute. Prima di passare a descrivere il comportamento dei valori numerici dei correttori calcolati utilizzando le forme normali, vorremmo descrivere brevemente alcune altre situazioni che si sono analizzate, ma di cui non riporteremo i dati per ragioni di spazio. Per quanto concerne l'errore sestupolare si ha che la differenza tra i valori di $b_3$ a bassa ed alta energia é fissata per un magnete. Utilizzando opportuni accorgimenti costruttivi é però possibile variare a piacere il valore a bassa energia. Nel nostro caso il valore relativamente basso riportato nella tabella 4.2 prevede già l'uso di detti accorgimenti. Per motivi di risparmio potrebbe essere utile abbandonare queste correzioni aumentando il valore di $b_3$ all'iniezione, ma diminuendolo ad alta energia. Per simulare questa nuova situazione abbiamo considerato un valore estremamente elevato a bassa energia, pari a $b_3 = -3.80$ da cui risulta un valore ad alta energia $b_3 = 1.00$. Il risultato delle correzioni non é cambiato di molto. Anche in questa situazione é possibile calcolare dei correttori che permettano di ridurre gli effetti non lineari entro termini accettabili.
Come si é accennato in principio, uno degli scopi di questa analisi era anche la determinazione del numero minimo di correttori necessari per avere una riduzione sufficiente degli effetti non lineari sul tune shift. In questo contesto si sono considerati anche altri schemi ottenuti utilizzando un numero inferiore di elementi.

**Schema A** In questo schema si sono considerati solo i due sestupoli cromatici e l'unico decapolo indipendente.

**Schema B** In questo schema si sono utilizzati unicamente i due sestupoli cromatici e, invece di considerare un unico decapolo indipendente, si

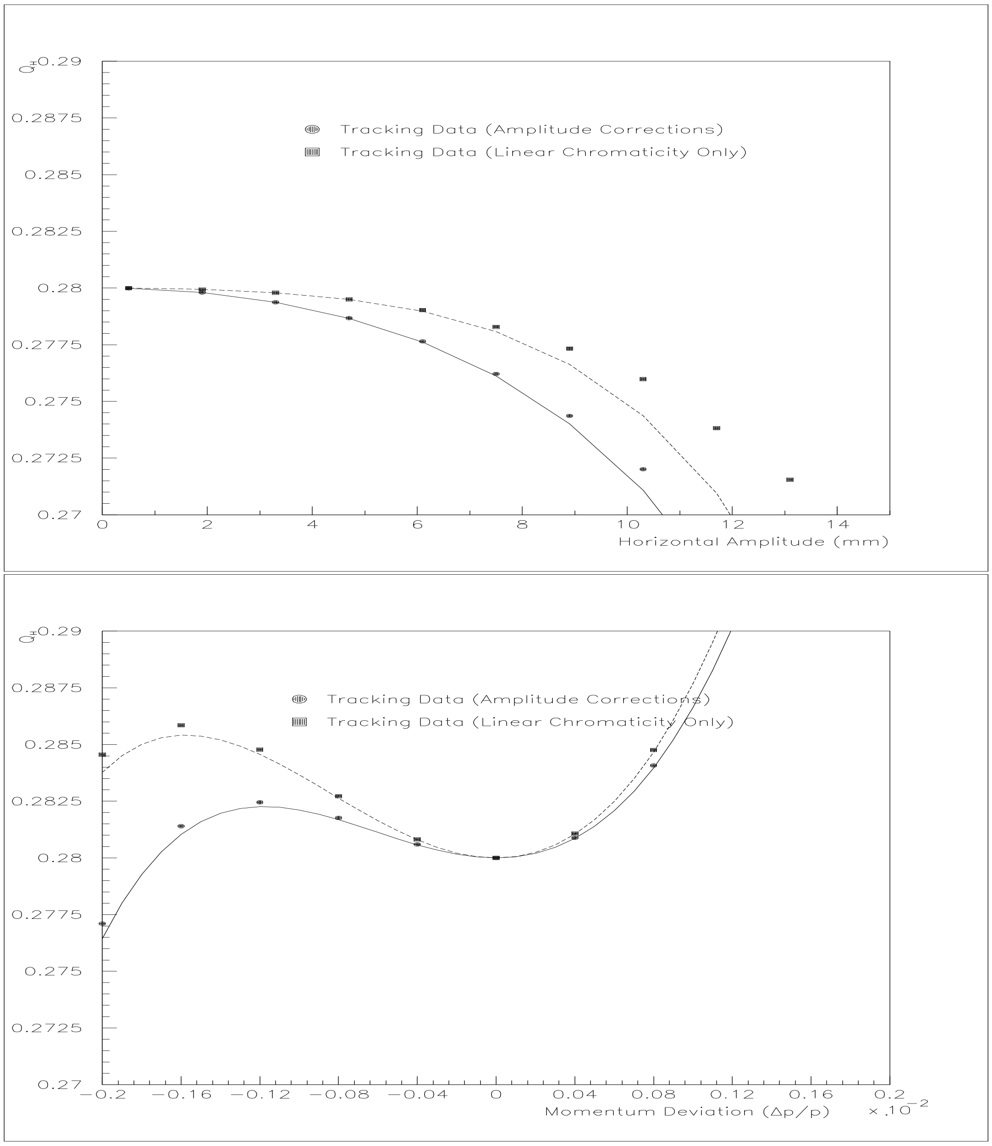



Figura 4.11: Correzione con sestupoli dell'errore $b_3$ in collisione con $\beta^*$ minima.

sono considerati due decapoli indipendenti ai lati dei quadrupoli (una sorta di decapoli cromatici). In questo caso dunque i correttori vicino ai dipoli si sono completamente trascurati.

In ambedue i casi gli effetti di momento sono stati corretti senza incontrare difficoltà, mentre per quanto riguarda la dipendenza dall'ampiezza non sempre si é riusciti ad ottenere risultati soddisfacenti. Come conseguenza si é deciso di mantenere il numero di correttori utilizzati fino ad ora.
Riguardo ai valori dei correttori presentati si possono notare i seguenti fatti

**i)** Il valore del correttore sestupolare centrale (posto ad una estremità dei dipoli) utilizzato per correggere il tune shift in funzione dell'ampiezza, risulta essere circa uguale al valore dell'integrale dell'errore sestupolare corrispondente, $K_3^C = K_3^E$. Le differenze sono dovute al fatto che gli errori sono stati posti in tutti i dipoli della macchina, dunque anche nei soppressori di dispersione dove, al contrario, non ci sono correttori. Ciò significa che non siamo nella situazione di avere correzioni veramente locali e a conferma di ciò si osserva che il valore di $K_3^C$ é ovunque maggiore dell'errore dovendo tenere conto anche dei contributi che provengono dal resto della macchina.

**ii)** Le differenze tra i valori che i sestupoli cromatici assumono nelle varie situazioni sono legate alle variazioni dei correttori centrali a causa della relazione lineare imposta dall'annullamento della cromaticità (4.11).

**iii)** Anche per i decapoli vale la regola che il gradiente del correttore tende all'integrale dell'errore. In questo caso, però, il contributo decapolare al tune shift che si vuole ridurre ha una natura differente a seconda che si consideri la dipendenza da $\delta$ o dall'ampiezza. Nel primo caso, infatti, il tune shift ha una dipendenza lineare da $K_5$. I valori dei sestupoli determinati in precedenza entrano nel termine costante della relazione. La dipendenza dai sestupoli risulta quindi debole in questo caso. Nella seconda situazione, invece, il termine che contribuisce al tune shift rappresenta l'interferenza tra sestupoli e decapoli, come si vede dalla tabella 3.1. In questo caso si ha una forte dipendenza dai valori dai sestupoli che sono stati determinati in precedenza.

## 4.4 Analisi degli effetti ottupolari

In precedenza si é affermato che l'errore ottupolare si autocompensa lungo la macchina a causa del cambio di segno negli archi pari e dispari. Per studiare questo fatto si é proceduto nel seguente modo. In primo luogo, considerando solamente l'errore sestupolare nei dipoli, si sono fissati i valori dei sestupoli laterali SBV, SBH in modo da annullare la cromaticità lineare. I correttori sestupolari vicino ai dipoli sono stati posti uguali a zero. Utilizzando il programma di tracking SIXTRACK si é calcolato il tune shift in funzione dell'ampiezza nelle seguenti quattro situazioni

**i)** Solo errore sestupolare.

**ii)** Errore sestupolare e ottupolare con alternanza di segno.

**iii)** Errore sestupolare e ottupolare senza alternanza di segno ($b_4 < 0$).

**iv)** Errore sestupolare e ottupolare senza alternanza di segno ($b_4 > 0$).

I risultati sono riportati in figura 4.12 per una versione di LHC leggermente differente da quella considerata in precedenza. Anche gli errori utilizzati sono differenti, essendo uguali a

$$b_3 = -3.0 \qquad b_4 = 0.05,$$

dove i valori riportati si riferiscono sempre a $r_0 = 10$ mm e sono espressi in unità di $10^{-4}$. Le curve in questo caso rappresentano semplicemente l'interpolazione dei punti ottenuti tramite le simulazioni numeriche. Il risultato é chiaro. L'alternanza dei segni produce realmente una autocompensazione dell'effetto degli ottupoli. La curva ottenuta in questo caso coincide infatti con quella ottenuta senza errore ottupolare fino ad ampiezze elevate. Per quanto riguarda i rimanenti casi, si ha che per piccole ampiezze le curve relative a valori positivi e negativi di $b_4$ sono esattamente simmetriche rispetto a quella relativa al caso $b_4 = 0$. Un tentativo per spiegare questi fatti può essere fatto rifacendoci alla dipendenza dei vari ordini del tune shift dai coefficienti $b_3, b_4$.
Quanto mostrato nella tabella 3.1 può essere sintetizzato nella seguente maniera. Se consideriamo un termine del tipo

$$\prod_{l=1}^{n} (K_{m_l})^{p_l} \tag{4.12}$$

contribuisce all'ordine $i$ del tune shift pari a

$$i = \frac{1}{2} \left[ \sum_{l=1}^{n} p_l (m_l - 2) \right] . \tag{4.13}$$

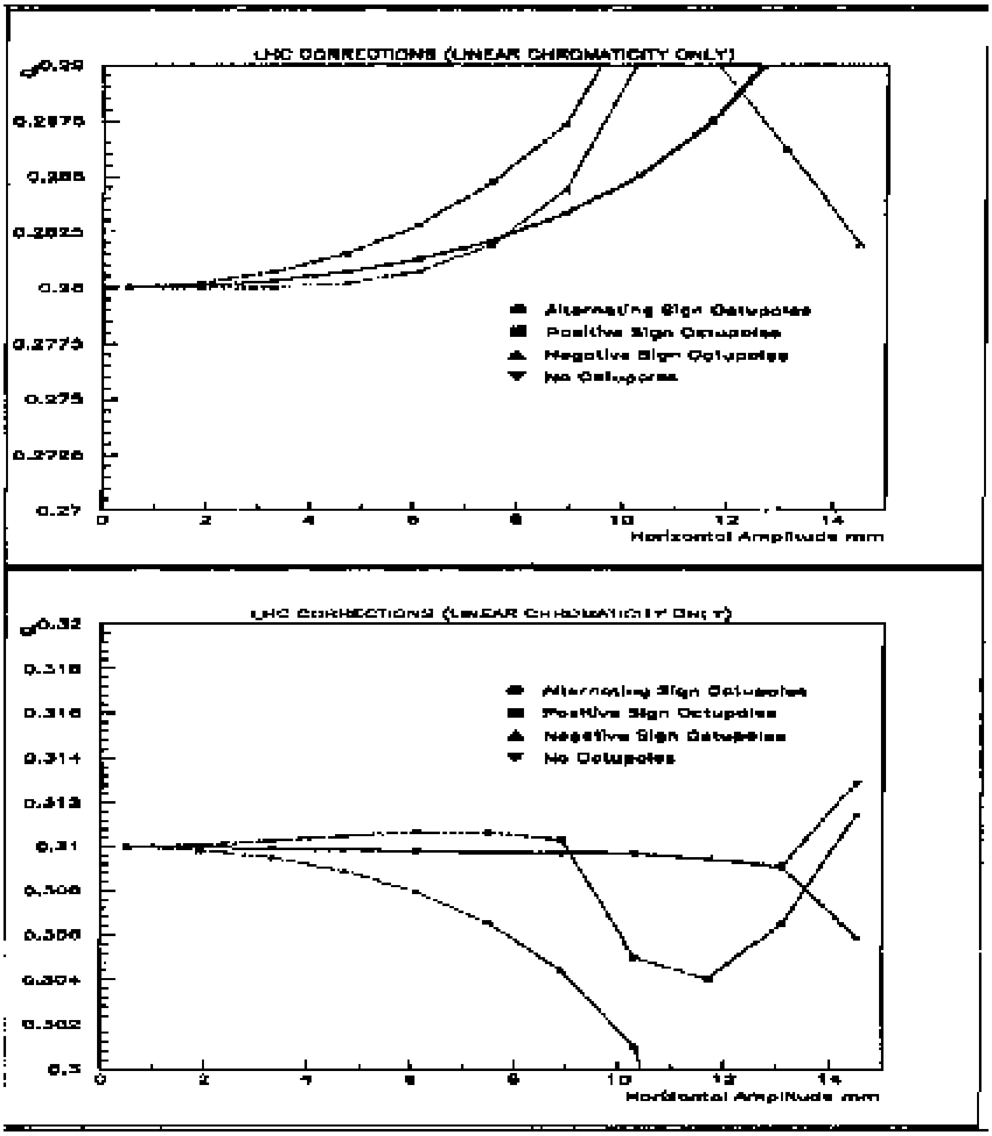



Figura 4.12: Tune orizzontale e verticale per differenti valori degli errori ottupolari.

Qualora il valore di $i$ calcolato utilizzando l'espressione precedente non sia intero, significa che il termine considerato non dà contributo a tale ordine. Nel caso si abbiano solo sestupoli e ottupoli, allora i termini ammessi all'ordine $i$-esimo sono del tipo $K_3^{2j}K_4^{i-j}$ $0 \leq j \leq i$. Tra tutti i termini chiaramente i dominanti saranno quelli con $j = 0$ e $j = i - 1$ in base ai valori di $b_3, b_4$. Essenzialmente rimarranno solo il termine sestupolare puro e un termine di interferenza lineare nell'ottupolo. Questo spiega in primo luogo perchè il cambio di segno provoca una autocompensazione quasi perfetta dell'errore ottupolare: il termine lineare si annulla e dunque ad ogni ordine rimane solo il contributo del sestupolo più piccole correzioni dovute ai termini trascurati. Anche le rimanenti curve possono essere interpretate nella stessa maniera. Nel caso in cui il valore di $b_4$ é costante si ha che il tune é dato da

$$\nu_{x,y} \approx \nu_{x,y}^3 + K_4\bar{\nu}_{x,y}, \tag{4.14}$$

dove $\nu_{x,y}^3$ rappresenta il tune shift dovuto al solo contributo del sestupolo, mentre $\bar{\nu}_{x,y}$ indica la somma di tutti i termini del tipo $K_3^{2(i-1)}K_4$. Il segno di $K_4$ spiega dunque le differenze delle due curve relative a $K_4 > 0$ e $K_4 < 0$. Come ultimo commento vorremmo sottolineare come piccole deviazioni dalla legge che prevede l'alternanza di segno nei differenti archi, produce notevoli variazioni del tune shift in quanto l'effetto degli ottupoli é approssimativamente lineare a tutti gli ordini. Ciò implica che nella situazione reale in cui i magneti sono prodotti da ditte differenti e quindi con errori necessariamente diversi, difficilmente si potrà fare affidamento su questa autocompensazione naturale. Dunque sembra necessario prevedere anche dei correttori ottupolari nello schema della macchina.

# Capitolo 5

# Effetti di Trasporto in Macchine Acceleratrici Circolari

Come é stato descritto in dettaglio nel capitolo precedente l'uso dei magneti superconduttori nelle macchine acceleratrici porta a una serie di fenomeni non lineari che possono generare delle instabilità nel fascio. L'uso di magneti correttori é un accorgimento che mira ad ampliare la regione nello spazio delle fasi in cui il moto é approssimativamente lineare. Così facendo si vuole evitare il possibile attraversamento di risonanze dovuto al tune shift. L'effetto negativo delle non linearità non si manifesta d'altronde solo nelle generazione del tune shift, ma anche in una serie di fenomeni di trasporto cui i fasci possono andare soggetti in particolari condizioni. Consideriamo ad esempio le piccole fluttuazioni che si hanno nella corrente che alimenta i magneti. Queste variazioni sono praticamente inevitabili e sono dovute ai processi di raddrizzamento. L'effetto combinato di queste fluttuazioni e delle componenti non lineari della dinamica possono produrre fenomeni di trasporto, per cui particelle che si trovano in una regione stabile si spostano lentamente verso l'esterno fino a raggiungere regioni in cui vengono definitivamente perse. Dunque questo significa che si generano una serie di deboli instabilità il cui effetto si fa sentire sul lungo periodo. Risulta dunque estremamente importante per il funzionamento di una macchina superconduttrice quale LHC la corretta progettazione del sistema di alimentazione dei magneti, in modo da ridurre al massimo le fluttuazioni di corrente.
Per arrivare a definire le specifiche cui dovranno soddisfare le alimentazioni in LHC, si é intrapreso un programma di esperimenti su SPS volti a misurare gli effetti sul moto delle particelle di forti non linearità introdotte in maniera controllata, in concomitanza con fluttuazioni nella corrente che alimenta i

magneti, anche queste prodotte artificialmente. In questo capitolo intendiamo descrivere gli esperimenti che sono stati fatti assieme ai dati ricavati. In più presenteremo i risultati ottenuti con simulazioni numeriche che dovrebbero servire per interpretare i dati sperimentali ed estrapolare i risultati nel caso di LHC.

## 5.1 L'esperimento di diffusione in SPS

Come é stato detto nell'introduzione la macchina su cui vengono effettuati gli esperimenti di dinamica non lineare é SPS. Le ragioni di questa scelta sono molteplici. In primo luogo questo acceleratore é ben conosciuto a causa del lungo periodo di operazioni e ha il pregio di essere una macchina estremamente lineare. Lavorando ad una energia compresa tra 100 e 250 GeV gli effetti di carica spaziale sono trascurabili, mentre gli effetti di saturazione dei magneti non sono ancora importanti. L'energia tipicamente usata negli esperimenti di diffusione é pari a 120 GeV, un valore che permette di avere l'intensità massima per i campi non lineari. L'uso di fasci di bassa intensità, dell'ordine di $10^{12}$ protoni, permette una minimizzazione di effetti collettivi quali le interazioni elettromagnetiche tra il fascio e la camera a vuoto.
Queste particolari condizioni sperimentali permettono di controllare in maniera accurata gli effetti non lineari presenti in SPS. Dunque le non linearità dominanti sono quelle introdotte artificialmente usando gli otto sestupoli che, in condizione di operazione normale, servono per l'estrazione lenta del fascio. La polarità di questi campi é scelta in modo da minimizzare gli effetti dovuti alla risonanza 1/3 che, come noto, é proprio eccitata dai sestupoli. La corrente di alimentazione di questi magneti é fissata a 140A che corrisponde ad un valore del gradiente sestupolare pari a

$$B''\ell/B\rho = 0.28\mathrm{m}^{-2}$$

Il secondo ingrediente fondamentale di questi esperimenti é la fluttuazione nell'alimentazione dei magneti. In primo luogo una serie di filtri capacitivi vengono impiegati per ridurre il più possibile l'influenza della frequenza 50 Hz e delle sue armoniche e subarmoniche. In secondo luogo una modulazione artificiale viene introdotta nell'alimentazione di un quadrupolo speciale che ha il compito di simulare la lenta variazione dei parametri lineari della macchina. La modulazione introdotta é di tipo sinusoidale con la possibilità di variare a piacere sia l'ampiezza che la frequenza e anche di introdurre più frequenze simultaneamente. Le frequenze tipiche che vengono utilizzate in questo genere di esperimento sono $9, 40, 180$ Hz.
Con l'esperienza acquisita durante la serie di esperimenti condotti, ci si é resi

conto che, per il successo delle misure, é necessario che sia l'orbita chiusa che l'accoppiamento lineare siano corretti al meglio. Infatti qualora l'orbita chiusa non sia stata corretta opportunamente, le distorsioni possono introdurre effetti non lineari spurii. Un residuo accoppiamento lineare può poi essere estremamente dannoso per quanto concerne la stabilità del fascio e il risultato delle misure.

Un ulteriore fenomeno che deve essere controllato per la buona riuscita dell'esperimento é la cromaticità lineare e non lineare della macchina. A causa della differente energia delle varie particelle che compongono il fascio la loro dinamica sarà differente. In particolare ciò produrrà una distribuzione dei valori assunti dal tune. Dal momento che l'esperimento stesso prevede l'introduzione artificiale di una modulazione per generare un allargamento nello spettro di frequenze coperto dal tune, se lo spettro naturale non é sufficientemente stretto si ha che l'effetto introdotto artificialmente é completamente coperto da altre cause. Per risolvere questo problema si é dovuto trovare un modo di minimizzare gli effetti cromatici in SPS. Nella macchina sono previste a tale scopo un massimo di cinque famiglie indipendenti di sestupoli. Utilizzando le forme normali e la procedura che é stata descritta nel precedente capitolo, si é provveduto a calcolare i valori dei sestupoli correttori in modo da ridurre la dipendenza del tune dalla variazione percentuale del momento. In figura 5.1 sono presentati i risultati della correzione. Come si vede usando solamente quattro famiglie indipendenti di sestupoli é possibile ridurre drasticamente la componente quadratica nel tune. Si tenga presente che in SPS si ha $\Delta p/p \approx \pm 1.3 \times 10^{-3}$ e quindi dai grafici si desume che, senza le correzioni, la distribuzione del tune avrebbe una larghezza $\Delta Q_h \approx 6.0 \times 10^{-3}$ ben maggiore di quella che viene introdotta artificialmente con la modulazione.

Le misure vere e proprie richiedono la manipolazione del fascio in varie maniere. Per determinare la dipendenza dei fenomeni di trasporto dall'ampiezza nello spazio delle fasi, bisogna deflettere il fascio in modo da spostarne il centro nel punto prescelto. Questo viene fatto con un *kicker*, elemento di tipo elettrostatico, utilizzato normalmente per l'estrazione veloce del fascio. Generalmente viene impressa al fascio una deflessione in senso orizzontale, mentre la posizione verticale viene lasciata invariata. La misurazione della velocità di diffusione avviene con l'ausilio di una serie di collimatori e di rivelatori che permettono di evidenziare le particelle che vengono perse in quanto assorbite dai collimatori stessi. In una prima fase in cui il fascio si trova in una situazione stabile, evidenziata dalla mancanza di grosse perdite e da una vita media dell'ordine di decine di ore, i collimatori orizzontale e verticale vengono avvicinati al fascio stesso fino a quando non si osservano delle perdite di intensità pari a circa $1,2\%$ dell'intensità totale; in questo

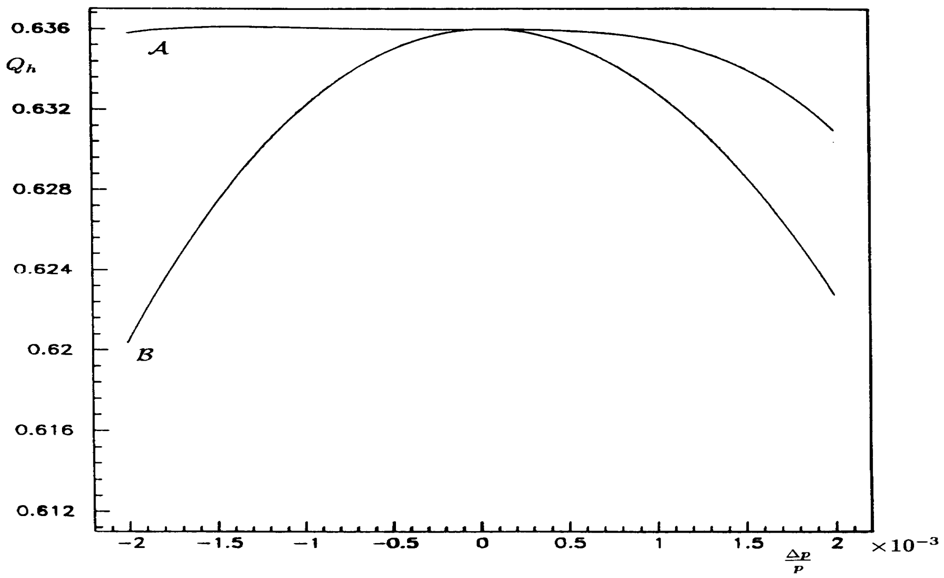



Figura 5.1: Dipendenza del tune dal momento delle particelle. Le due curve sono calcolate utilizzando le forme normali. La curva $\mathcal{B}$ si riferisce alla situazione prima delle correzioni, mentre quella $\mathcal{A}$ riporta l'effetto delle correzioni. In questo caso si sono utilizzate solo quattro famiglie indipendenti di sestupoli.

modo si definisce meglio il bordo del fascio eliminando l'alone di particelle con elevata ampiezza. In un secondo tempo i collimatori vengono ritratti ad una certa distanza, tipicamente ci si porta ad un paio di millimetri all'esterno della posizione precedente e le perdite cessano completamente. A questo punto avviene la misura del tempo necessario alle particelle par riempire lo spazio che é stato ripulito dai collimatori. Questo tempo si identifica con l'intervallo temporale necessario per osservare nuovamente una diminuzione di intensità. Effettuata la misurazione i collimatori vengono di nuovo inseriti all'interno del fascio, fino a raggiungere la posizione iniziale, in modo da poter stabilire se le perdite sono avvenute in direzione verticale o orizzontale. Questo ultimo fatto é importante per capire se nella macchina vi sono fenomeni dovuti ad accoppiamenti residui (quali ad esempio deflessione in orizzontale e diffusione in verticale).
Nel 1991 un esperimento di questo tipo ha permesso di ottenere una serie di misure complete relative alla dipendenza dei fenomeni di trasporto dall'ampiezza della modulazione introdotta [38]. In questo caso si é utilizzata

una frequenza di 9 Hz e si sono considerati tre valori differenti per l'ampiezza di modulazione. I risultati sperimentali sono presentati in tabella 5.1. Come

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ampiezza della modulazione ($\Delta Q$) | $1.10 \times 10^{-3}$ | $1.65 \times 10^{-3}$ | $2.20 \times 10^{-3}$ |
| Tempo di diffusione (min) | 6.7 | 3.1 | 0.7 |

Tabella 5.1: Valori del tempo di diffusione in funzione dell'ampiezza della modulazione. La frequenza usata é 9 Hz. L'ampiezza cui si riferiscono le misure é 14.3 mm.

si vede si ha una forte dipendenza dall'ampiezza della modulazione: un raddoppio di ampiezza produce una diminuzione di un fattore dieci del tempo di diffusione. Nel caso dell'ampiezza di modulazione minore, l'andamento dell'intensità del fascio in funzione del tempo é mostrato in figura 5.2. La prima parte della curva si riferisce alla situazione in cui i collimatori sono stati ritratti dopo aver ripulito il fascio. In questa circostanza non si hanno perdite e dunque l'intensità rimane costante. Quando le particelle hanno

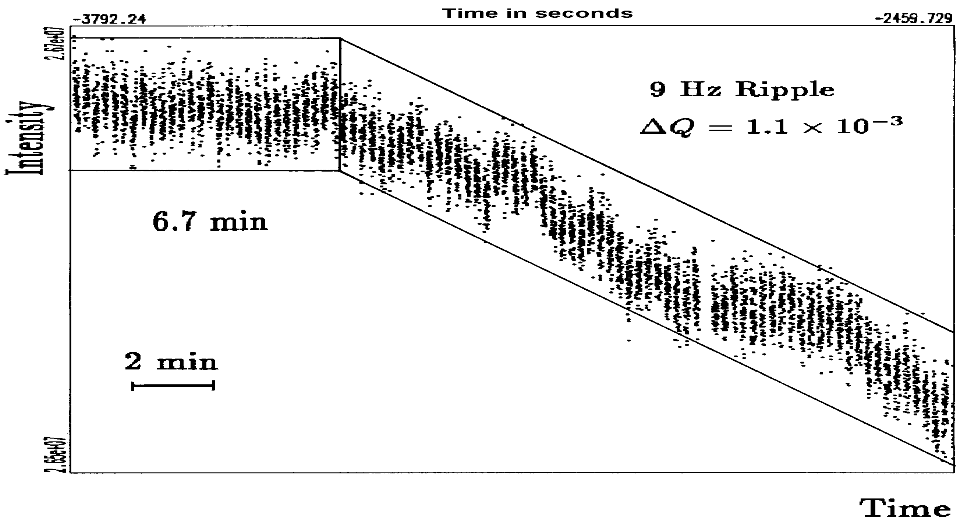



Figura 5.2: Dipendenza dell'intensità del fascio dal tempo dopo la ritrazione dei collimatori.

riempito lo spazio vuoto racchiuso dai collimatori e cominciano ad incidere su di essi, le prime perdite iniziano a verificarsi. Da questo momento in poi il tasso di diminuzione dell'intensità del fascio é costante come si vede nella seconda parte della curva.
Un secondo effetto che é stato rilevato durante l'esperimento riguarda l'influenza di più frequenze. In questo caso si é notato che la diminuzione della stabilità del fascio é drammatica come si può osservare in figura 5.3. Utilizzando una sola frequenza di modulazione, 9 Hz, con l'ampiezza intermedia, si ha che la vita media del fascio passa da un valore praticamente infinito a $\tau = 7$ ore. Se a questo punto si introducono simultaneamente due frequenze $9, 180$ Hz con una ampiezza pari a $\Delta Q = 0.8 \times 10^{-3}$, in modo che la somma delle ampiezze sia simile a quella che si aveva nella situazione con una sola modulazione, la vita media raggiunge un valore $\tau = 2$ ore. La spiegazione di questa situazione può essere data in termini di risonanze prodotte dalle due frequenze. Un ruolo fondamentale gioca la differenza tra le due frequenze, cioé la possibilità di distinguere tra una frequenza veloce ed una lenta. Ciò sarà illustrato più in dettaglio nel prossimo paragrafo in cui si illustreranno i risultati numerici ottenuti dalle simulazioni dell'esperimento descritto.

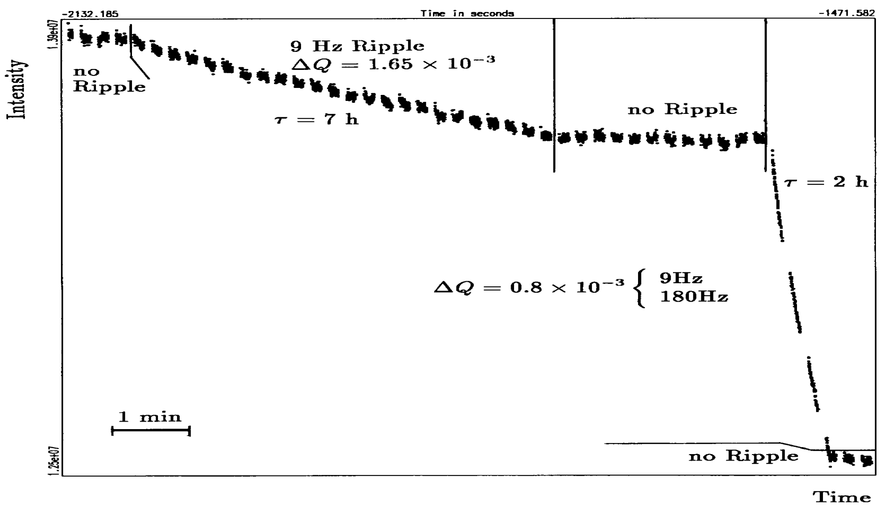



Figura 5.3: Effetto di due frequenze sulla stabilità del fascio. Si noti come spegnendo la modulazione la vita media del fascio diventi praticamente infinita (le perdite si annullano).

## 5.2 Risultati delle simulazioni numeriche

Per cercare di interpretare i dati sperimentali ottenuti si sono fatte delle simulazioni numeriche per tentare di riprodurre il comportamento di SPS. Il modello usato consisteva nella macchina completa, senza alcuna ipotesi semplificativa. L'orbita chiusa misurata durante l'esperimento é stata introdotta per completezza. Le quantità fisiche che si sono analizzate sono state essenzialmente due: l'apertura dinamica e il bordo tra la regione dei moti regolari e caotici. Il concetto di apertura dinamica é collegato con la posizione nello spazio delle fasi in cui si ha la prima perdita di particelle. Nel programma di simulazione questo si verifica quando si ha una condizione di overflow. Più delicata é la situazione riguardante il bordo della regione regolare. Come é ben noto, una caratteristica del moto regolare consiste nel fatto che la distanza tra due condizioni iniziali arbitrariamente vicine aumenta linearmente nel tempo. Al contrario in una regione caotica l'aumento é di tipo esponenziale. Gli esponenti di Lyapunov permettono di rilevare se la regione dello spazio delle fasi é caotica o regolare e sono definiti nella seguente maniera: supponendo che $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}$ siano due condizioni iniziali vicine, indichiamo con $d(\mathbf{x}_0, t)$ la distanza tra le due traiettorie al tempo $t$. La rapidità esponenziale con cui due traiettorie vicine divergono può essere misurata da

$$\sigma(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to \infty} \lim_{\quad \to 0} \frac{1}{t} \log \frac{d(\mathbf{x}_0, t)}{d(\mathbf{x}_0, 0)}. \tag{5.1}$$

Il limite precedente esiste sempre ed é finito. Ovviamente nel caso di orbite regolari si avrà che $\sigma(\mathbf{x}_0) = 0$. I coefficienti di Lyapunov sono legati alla quantità $\sigma(\mathbf{x}_0)$ definita in precedenza.

In campo acceleratoristico la conoscenza di quantità correlate con gli esponenti di Lyapunov può dare utili informazioni circa il tipo di dinamica che si ha in una regione dello spazio delle fasi. L'idea é che questi esponenti possano essere degli indicatori sensibili della posizione dell'apertura dinamica. In SIXTRACK é implementato un metodo per la determinazione di quello che potrebbe essere chiamato uno pseudo– esponente di Lyapunov. Infatti, stante la difficoltà a calcolare numericamente il limite richiesto dalla definizione (5.1), si considerano due condizioni iniziali differenti con distanza dell'ordine di $10^{-6}$ e si determina l'evoluzione della distanza angolare. Se l'andamento temporale di questa distanza é approssimativamente lineare significa che le condizioni iniziali sono in una regione regolare, altrimenti si considera la regione caotica. Ovviamente il test non é conclusivo, in quanto l'evoluzione é seguita solo per un tempo finito, ciò nonostante la quantità introdotta é comunque significativa.

Il numero massimo di giri simulato é stato pari a $2.6 \times 10^7$ corrispondente a un periodo di rivoluzione in SPS di circa 10 minuti. Come prima cosa si é determinata la dipendenza del bordo della regione caotica e dell'apertura dinamica sia in funzione dell'ampiezza di modulazione, che della frequenza. Nel primo caso i risultati sono riportati in figura 5.4. Sia l'apertura dinamica

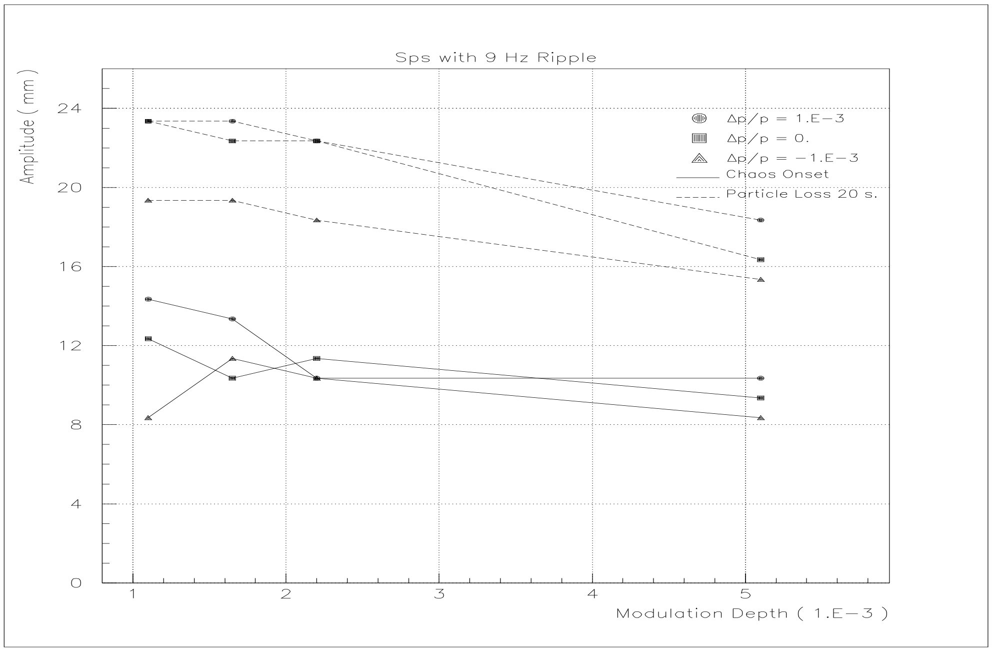
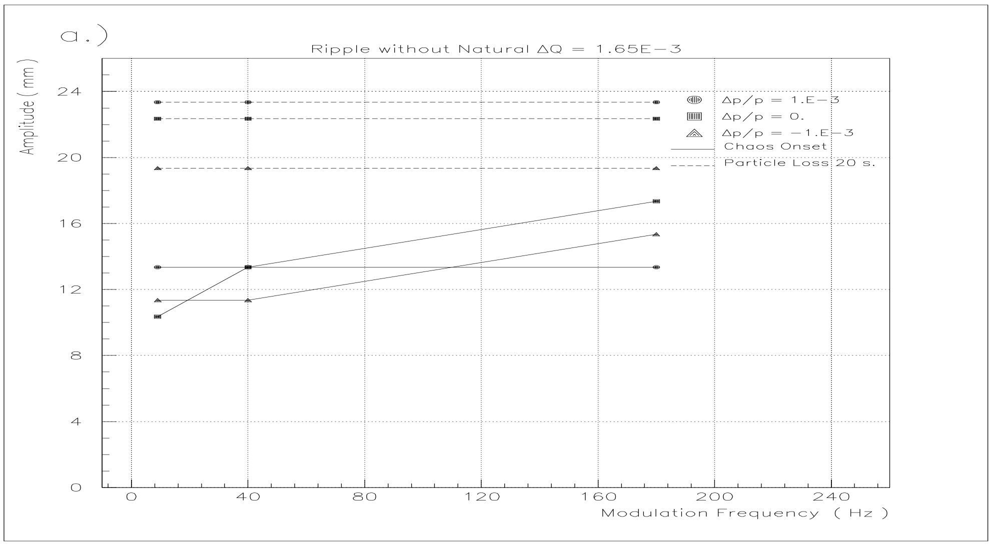



Figura 5.4: Dipendenza dell'apertura dinamica (curva tratteggiata) e del bordo della regione caotica (curva continua) dall'ampiezza della modulazione. La frequenza in questo caso vale 9 Hz.

(curva tratteggiata) che il bordo della regione caotica (curva continua) sono rappresentati in tre situazioni differenti relative a tre valori possibili del momento delle particelle.($\delta p/p = \pm 1.0 \times 10^{-3}$ e $\delta p/p = 0$). Come si vede il caso relativo a $\delta p/p < 0$ é differente dagli altri due. L'apertura dinamica mostrata si riferisce al caso in cui si hanno perdite in tempi inferiori a 20 secondi. Dai risultati é possibile affermare che sia l'apertura dinamica che la regione caotica si tendono verso l'origine all'aumentare dell'ampiezza della modulazione. Questa tendenza é sicuramente più marcata per la prima quantità, dove si ha una chiara e costante diminuzione. Questo fatto non deve stupire, in quanto all'aumentare dell'ampiezza della modulazione, aumenta l'intervallo di frequenze coperto dal tune e dunque la probabilità di attraversare una risonanza spiega la riduzione della zona stabile e della maggior caoticità.
Per quanto riguarda la dipendenza dalla frequenza di modulazione, i risultati in figura 5.5 mostrano quanto ottenuto. Nella parte a.) si vede come



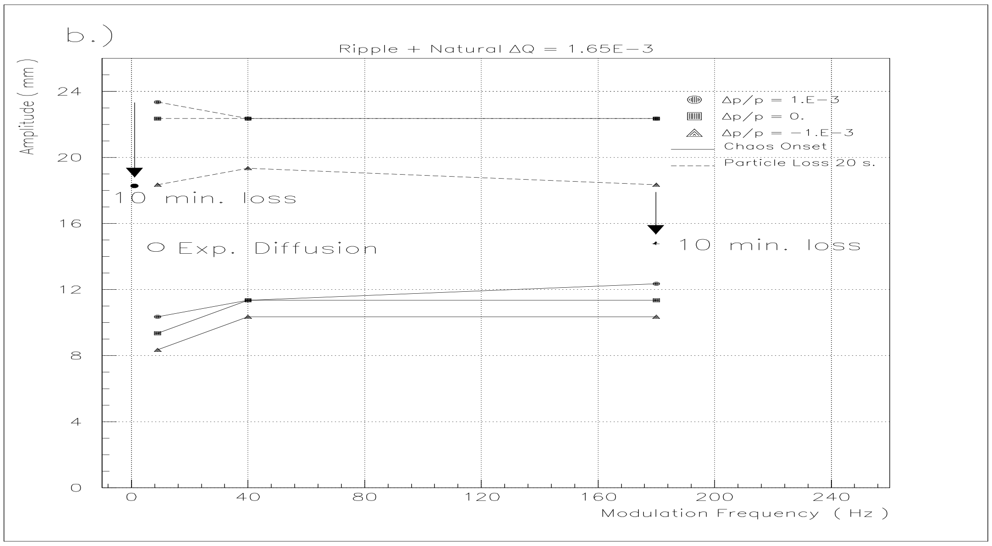




Figura 5.5: Dipendenza dell'apertura dinamica (curva tratteggiata) e del bordo della regione caotica (curva continua) dalla frequenza di modulazione. L'ampiezza usata é $1.65 \times 10^{-3}$. Nella parte a.) é stata considerata una sola frequenza di modulazione, mentre in b.) é stata aggiunta una seconda frequenza corrispondente a 50 Hz.

l'apertura dinamica sia praticamente indipendente dalla frequenza della modulazione. Questo effetto é stato già osservato in [37]. In quella situazione, infatti, si notava che l'apertura dinamica é effettivamente differente a seconda della frequenza di modulazione, ma per apprezzare questa differenza bisogna arrivare ad un numero di giri estremamente elevato, ben più elevato di quanto é stato fatto in questa situazione. In questo caso, infatti, l'apertura dinamica é riferita ad un tempo dell'ordine dei 20s, corrispondente a circa $9 \times 10^5$ giri in SPS. Per distinguere le differenze tra frequenze dell'ordine dei 9 Hz e 180 Hz, bisogna spingersi fino a circa $10^7$ giri.
Per quanto riguarda, invece, la curva relativa al bordo tra la regione regolare e quella caotica, si ha una chiara tendenza a raggiungere l'apertura dinamica all'aumentare della frequenza di modulazione. In particolare é interessante notare come le frequenze basse aumentino la regione caotica. Questo può essere compreso in termini di sovrapposizione di risonanze, utilizzando il criterio di Chirikov [81]. Prima di passare a considerare la parte b.) della figura 5.5 vorremmo considerare la tabella 5.2. In essa sono riportati i valori ottenuti tramite le simulazioni numeriche dell'apertura dinamica considerata per un numero crescente di giri. I due valori presentati per ogni ampiezza di modulazione e intervallo temporale si riferiscono all'intervallo ottenuto considerando i tre valori del momento già citati. Come mostrato in tabella 5.1 ad una ampiezza di 14.3 mm occorrono circa 6.7 min per raggiungere il collimatore nel caso dell'ampiezza di modulazione più piccola. Considerando questo tempo uguale al tempo necessario perchè la particella venga persa, abbiamo che i dati mostrati in tabella 5.2 non sono in buon accordo con i risultati sperimentali. Il punto é che il fenomeno di trasporto indotto dalla modulazione é troppo debole nelle simulazioni numeriche rispetto a quanto osservato negli esperimenti. Per tentare di migliorare l'accordo si é introdotta una seconda frequenza di modulazione uguale a 50 Hz. L'idea é che, per quanto gli accorgimenti sperimentali possano aver ridotto questa componente naturale nella corrente di alimentazione, pure una piccola influenza é inevitabile. Infatti nonostante l'ampiezza scelta per questa seconda modulazione sia stata solo di $2.5 \times 10^{-4}$ dunque almeno cinque volte più piccola rispetto al valore minimo della modulazione principale, cionondimeno gli effetti sono stati vistosi. Ritornando a considerare la parte b.) della figura 5.5 dove si sono considerate le stesse modulazione che nella parte a.) aggiungendo però anche la frequenza di 50 Hz, si nota immediatamente l'effetto di questa seconda frequenza. Addirittura anche la curva che rappresenta l'apertura dinamica sembra dipendere maggiormente dalla frequenza di modulazione. Per quanto riguarda il bordo della regione in cui si hanno moti regolari, si ha nuovamente che le frequenze più basse creano una zona caotica di dimensioni maggiori. Globalmente questa secondo tipo di curva é molto più vicino all'origine in

| Ampiezza della modulazione ($\Delta Q$) | $1.10 \times 10^{-3}$ | $1.65 \times 10^{-3}$ | $2.20 \times 10^{-3}$ |
|---|---|---|---|
| Instabilità entro 20s | $19 - 23$ | $18 - 23$ | $18 - 22$ |
| Instabilità tra 20s e 2min. | $17 - 19$ | $17 - 19$ | $17 - 19$ |
| Instabilità tra 2min. e 10min. | – | $17 - 19$ | $15 - 19$ |

Tabella 5.2: Valori dell'apertura dinamica (in mm) per differenti intervalli di tempo e per varie ampiezze di modulazione.

questa situazione che in quella con una sola frequenza. In questa seconda figura si sono anche visualizzati i risultati sperimentali. Come si vede il punto sperimentale, corrispondente ad una frequenza di 9 Hz ed una ampiezza di 14.3 mm, non coincide con quello ottenuto con le simulazioni in cui si ha che l'ampiezza di 18 mm é instabile su intervalli di tempi dell'ordine dei dieci minuti.
Ancora una volta, nonostante l'introduzione di una seconda frequenza di modulazione abbia permesso di migliorare l'accordo tra dati sperimentali e numerici, l'effetto di trasporto é sottostimato nelle simulazioni numeriche.
Da ultimo vorremmo mostrare i dati relativi all'analisi di Fourier delle orbite nel caso in cui si abbia una sola o due frequenze di modulazione. Questi dati sono riportati nella figura 5.6. Nella parte a.) si ha una sola frequenza di modulazione, mentre nella parte b.) si ha in aggiunta anche la componente a 50 Hz. L'introduzione della seconda modulazione produce una nuova serie di picchi attorno a quelli esistenti in precedenza. In più, analizzando la regione racchiusa dai cerchi, si nota come la seconda distribuzione sia notevolmente più larga della prima. Questo spiega la maggior caoticità dovuta all'aggiunta della seconda frequenza.

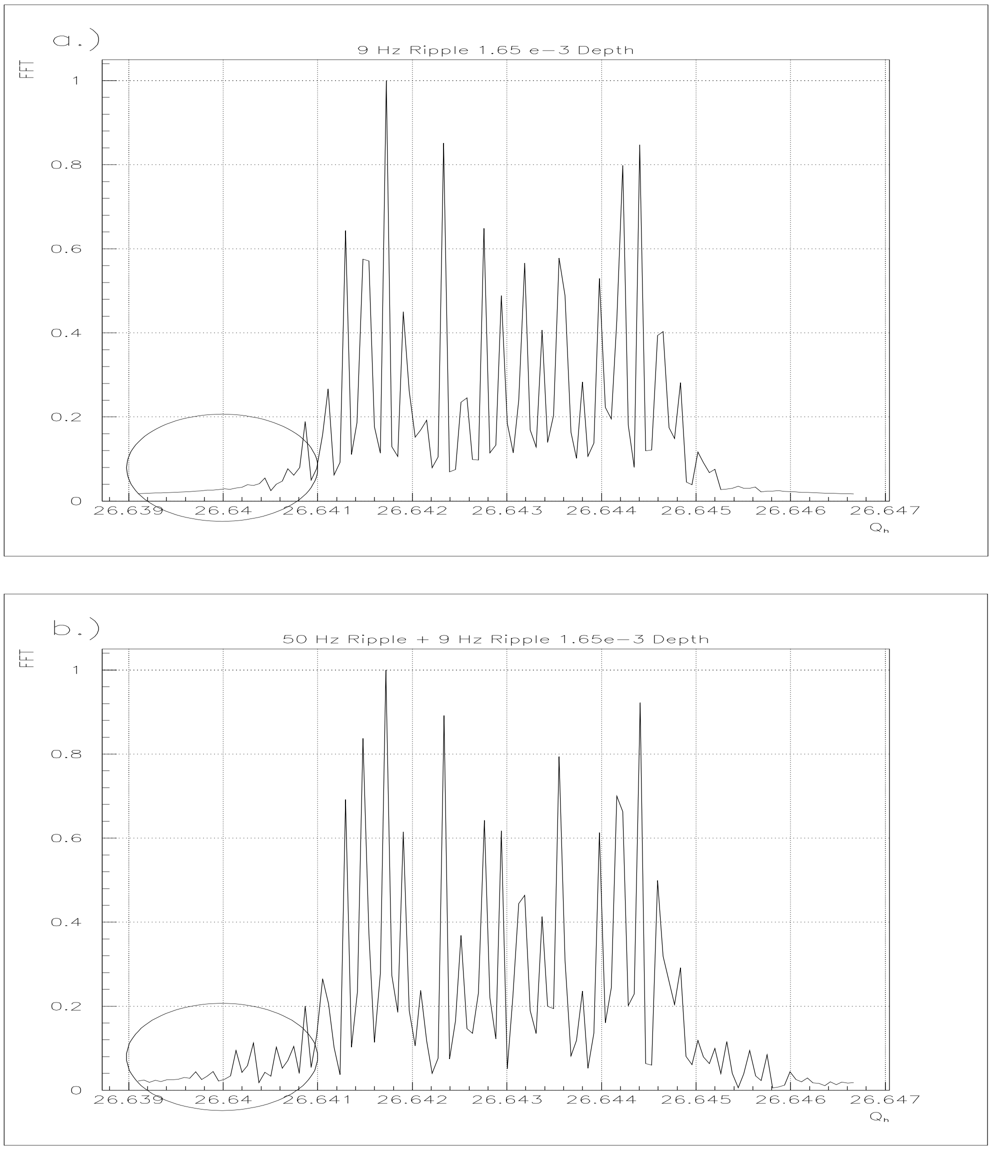



Figura 5.6: Analisi di Fourier di un orbita di SPS ottenuta con delle simulazioni numeriche. Nella parte a.) si ha una sola frequenza di modulazione 9 Hz con ampiezza $1.65 \times 10^{-3}$. Nella parte b.) invece si ha in aggiunta anche una seconda modulazione di frequenza pari a 50 Hz e con ampiezza $2.5 \times 10^{-4}$.

# Bibliografia


[1] E. Courant, H. Snyder: "*Theory of the Alternating–Gradient Synchrotron*" – Annals of Physics **3** 1, (1958).

[2] P. Hartman: "*A lemma in the theory of structural stability of differential equations*" – Proc. Amer. Math. Soc. **11** 610, (1960).

[3] D. M. Grobman: "*Homeomorphisms of systems of differential equations*" – Dokl. Akad. Nauk. **128** 880, (1959).

[4] N. N. Nekhoroshev: "*An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems*" – Russ. Math. Surveys **32** 1, (1977).

[5] L. Galgani, A. Giorgilli:"*Rigorous estimates for the series expansions of Hamiltonian perturbation theory*, Cel. Mech. **17** 95, (1985).

[6] P. Lochak: "*Stabilitè en temps exponentielles des systémes hamiltoniens proches des systémes integrables: rèsonances et orbites fermés*" – preprint Ecole Normale Superieur Paris, (1990).

[7] A. Bazzani, S. Marmi, G. Turchetti: "*Nekhoroshev estimates for isochronous nonresonant symplectic maps*" – Cel. Mech. **47** 333, (1990).

[8] H. Dulac: "*Recherches sur le points singuliers des equations differentielles*" – J. École Polytechnique **9** 1, (1904).

[9] V. I. Arnol'd: "*Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*" – Springer–Verlag, (1983).

[10] C. Siegel: "*Iteration of analytic functions*" – Ann. of Math. **43** 607, (1942).

[11] V. A. Pliss: "*On the reduction of an analytic system of differential equations to a linear form*" – Differential Equations **1** 111, (1965).

[12] H. Rüssmann: "*Über die iteration analytischer funktionen*" – J. Math. Mech. **17** 523, (1967).

[13] A. D. Brjuno: "*The analytical forms of differential equations; part I*" – Trans Mosk. Math. Soc. **25** 131, (1971).

[14] A. D. Brjuno: "*The analytical forms of differential equations; part II*" – Trans Mosk. Math. Soc. **26** 199, (1972).

[15] A. D. Brjuno: "*Local methods in nonlinear differential equations*" – Springer-Verlag, (1989).

[16] J. C. Yoccoz: "*Theoreme de Siegel, polynomes quadratiques et nombres de Brjuno*" – Astérisque, (1990).

[17] G. D. Birkhoff: "*Surface transformations and their dynamical applications*" – Acta Math. **43** 1, (1920).

[18] C. Siegel: "*On the integrals of canonical systems*" – Ann. of Math. **42** 806, (1941).

[19] C. Siegel: "*Über die existenz einer normalform analytischer hamiltonsher differentialgleichungen in der nähe einer gleichgewichtslosung*" – Math. Ann. **128** 144, (1952).

[20] J. Moser: "*Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations*" – Comm. Pure Appl. Math. **8** 409, (1955).

[21] J. Moser: "*The analytic invariants of an area–preserving mapping near an hyperbolic fixed point* " – Comm. Pure Appl. Math. **11** 257, (1956).

[22] J. Moser, C. L. Siegel: "*Lectures in celestial mechanics*" – Springer-Verlag, (1971).

[23] M. Hénon: "*Numerical study of quadratic area– preserving mappings*" – Quarterly of Appl. Math. **27** 291, (1969).

[24] A. J. Dragt: "*Nonlinear Dynamics and the beam-beam interaction*" – AIP Conf. Proc. **57** 143, (1979).

[25] A. Bazzani, A. Pisent, G. Turchetti: "*Normal forms for hamiltonian maps and future applications to accelerators*" – CERN Report SPS–AMF **87–38**, (1987).

[26] A. J. Dragt, J. M. Finn: "*Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps*"– J. Math. Phys. **17** 2215, (1976).

[27] M. Pusterla, G. Servizi, G. Turchetti: "*Non–linear beam–beam effects in present and future storage rings and generalized Birkhoff method on conservative mappings*" – IEEE Trans. Nucl. Sc. **30** 4 2642, (1983).

[28] A. Bazzani, P. Mazzanti, G. Servizi, G. Turchetti: "*Normal forms for Hamiltonian maps and nonlinear effects in a particle accelerator* Il Nuovo Cimento **102** B 51, (1988).

[29] A. Bazzani, G. Servizi, E. Todesco and G. Turchetti: "*Normal forms for symplectic maps and non–linear theory of betatronic motion*" – sottomesso come pubblicazione della serie CERN YELLOW REPORT.

[30] G. D. Birkhoff: "*Dynamical systems*" – Amer. Math. Soc. **8** 295, (1927).

[31] V. I. Arnol'd: "*Instability of dynamical systems with several degrees of freedom*" – Soviet Math. Dokl. **5** 581, (1964).

[32] D. Neuffer: "*Lumped correction of systematic multipoles in large synchrotrons*" – Part. Acc. **23** 21, (1988).

[33] W. Scandale, F. Schmidt, E. Todesco: "*Compensation of the tune shift in the LHC, using the normal form techniques* " – Part. Acc. **35**, 53, (1991)

[34] E. Todesco: "*Forme normali risonanti per mappe polinomiali e correzioni multipolari per LHC*" – Tesi di Laurea Università degli Studi di Bologna, (1990).

[35] L. Evans, J. Gareyte, A. Hilaire, W. Scandale, L. Vos: " *The non–linear dynamic aperture experiment in the SPS*" – Proceedings della Conferenza EPAC - Roma, (1988).

[36] J. Gareyte, A. Hilaire, F. Schmidt: "*Dynamic aperture and long–term stability in the presence of strong sextupoles in the CERN SPS*" – Prooceedings della Conferenza PAC - Chicago, (1989).

[37] D. Brandt, E. Brouzet, A. Faugier, J. Gareyte, W. Herr, A. Hilaire, W. Scandale, F. Schmidt, A. Verdier: "*Influence of the power supply ripple on the dynamic aperture of the SPS in the presence of strong non–linear fields*" – Proceedings della Conferenza EPAC - Nizza, (1990).

[38] X. Altuna et Al: "*The 1991 dynamic experiment at the CERN SPS*" – AIP Conf. Proc. **255**, (1991).

[39] M. Giovannozzi, S. Tzenov: "*Statistical description of nonlinear particle motion in cyclic accelerators*" – CERN Report **92–23**, (1992).

[40] A. Gerasimov: "*The applicability of diffusion phenomenology to particle losses in hadron colliders*" – CERN Report SL–AP **92–30**, (1992).

[41] G. Turchetti: "*Perturbative methods for hamiltonian maps*" – in Methods and applications of nonlinear dynamics, ed. W. A. Saenz, World Scientific, (1988).

[42] O. De Almeida, R. Douady, G. L. Da Silva Ritter: "*Analytical determination of unstable periodic orbits in area–preserving maps*" – Physica D **29** 181, (1987).

[43] E. Fontich, C. Simó: "*The splitting of separatrices for analytic diffeomorfisms*" – Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** 295, (1990).

[44] U. Kirchgraber, D. Stoffer: "*Chaotic behaviour in simple dynamical systems*" – SIAM Review **32** 424, (1990).

[45] V. K. Melnikov: "*On the stability of the center for time–periodic perturbations*" – Trans. Moskow Math. Soc. **12**, (1963).

[46] R. De Vogeleare: "*On the Structure of Symmetric Periodic Solutions of Conservative Systems with Applications*" – in Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol **4** 53, (1958).

[47] J. M. Finn: "*Integrals of canonical transformations and normal forms for mirror machines hamiltonian* " – Tesi di dottorato Università del Maryland, (1974)

[48] M. Giovannozzi: "*Analisi di stabilità per mappe hamiltoniane polinomiali e loro applicazioni alla fisica degli acceleratori*" – Tesi di Laurea Università degli Studi di Bologna, (1989).

[49] M. Giovannozzi, S. Marmi: "*Existence of complex invariant circles in the quadratic area–preserving map*" – Rendiconti di Matematica **9** 457,(1990).

[50] N. Buric, I. C. Percival, F. Vivaldi: "*Critical function and modular smoothing*" – Nonlinearity **3** 21, (1990).

[51] N. Buric, I. C. Percival: "*Modular smoothing and finite perturbation theory*" – Nonlinearity **4** 981, (1990).

[52] N. Buric, J. Cartwright, I. C. Percival, O. Piro: "*On modular smoothing and scaling functions for mode locking*" – Phys. Lett. A **163** 63, (1992).

[53] S. Marmi: "*Critical Functions for Complex Analytic Maps*" – J. Phys. A: Math. Gen. , (1990).

[54] M. Giovannozzi: "*Analysis of the stability domain for the Hénon map*", CERN Report SL–AP **92–23**, (1992) sottomesso per la pubblicazione su Phys. Lett. A.

[55] A. Bazzani, M. Giovannozzi, E. Todesco, G. Turchetti: "*Computation of the Dynamic Aperture of a One Dimensional Model of a Sextupole Nonlinearity, using Analytical Tools*" – Proceedings della conferenza EPAC - Berlino, (1992).

[56] M. Giovannozzi: "*Invariant manifolds and stability domain: some results for 1D maps*" – Proceedings del Workshop Stability of Particle Motion in Storage Rings, Brookhaven National Laboratory, Ottobre (1992).

[57] T. Bountis, G. Servizi, G. Turchetti, M. N. Vrahatis: "*A Procedure to Compute the Fixed Points and Visualize the Orbits of a 2D Map*" – CERN Report SL–AP **93-06**, (1993).

[58] M. N. Vrahatis: "*CHABIS: A mathematical software package for locating and evaluating roots of systems of nonlinear equations*" – ACM Trans. Math. Software **14** 330, (1988).

[59] R. D. Ruth: "*Single particle dynamics and nonlinear resonances in circular accelerators*" – Proceedings del Congresso Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators, Lecture Notes in Physics **247** 37, Springer-Verlag, (1985)

[60] J. Irwin: "*A multi–kick factorization algorithm for nonlinear maps*"– SSC Report **228**, (1989).

[61] R. Kleiss, F. Schmidt, F. Zimmermann: "*Experience with a simple Method to 'simplectify' Differential–Algebra Maps*"– CERN Report SL–AP **92–31**, (1992).

[62] R. Kleiss, F. Schmidt, Y. Yan, F. Zimmermann: "*On the Feasibility of Tracking with Differential–Algebra Maps in Long–Term Stability Studies for Large Hadron Colliders*"– CERN Report SL–AP **92–02**, (1992).

[63] R. Kleiss, F. Schmidt, F. Zimmermann: "*The Use of Truncated Taylor Maps in Dynamic Aperture Studies*"– CERN Report SL–AP **92–21**, sottomesso a Part. Acc. (1992).

[64] A. Bazzani, G. Turchetti: "*Normal forms for symplectic maps*" – Proceedings del Workshop Nonlinear Dynamics and stochastic processes II, eds. Livi-Vulpiani, World Scientific, (1988).

[65] A. Bazzani: "*Normal forms for symplectic maps in* $\mathbb{R}^{2n}$ " – Cel. Mech. **42** 107, (1988).

[66] A. Giorgilli, – Computer Physics Comm. **16** 331, (1979).

[67] M. Berz, E. Forest – LBL Accelerator & Fusion Reasearch Division internal report **25609 UC–414**, (1988).

[68] M. Berz, E. Forest, J. Irwin: "*Normal forms methods for complicated periodic systems: a complete solution using differential algebra and lie operators*" – Part. Acc. **24** 91, (1989).

[69] A. Bazzani, G. Turchetti: "*Polyn: a program for algorithmic manipulation of polynomials*" – CERN Report SL–AP **91–13**, (1991).

[70] F. Galluccio and W. Scandale: "*Compensation of the LHC lattice in the presence of systematic multipolar errors in the dipoles*" – CERN Report SPS–AMS **89–51**, (1989).

[71] F. Galluccio: "*Compensation of systematic multipolar errors in the LHC from the operational point of view*" – CERN Report SL–AP **90–12**, (1990).

[72] M. Berz: "*Differential–Algebraic description of beam dynamics to very high orders*" – Part. Acc. **24**, (1989).

[73] M. Giovannozzi, F. Schmidt: "*General Normal Forms Procedure to Correct Tune–Shift and Non–Linear Chromaticity*"– in preparazione.

[74] M. Giovannozzi: "*LHC Correction Scheme*"– Talk presentato al Workshop Stability of Particle Motion in Storage Rings, Brookhaven National Laboratory, Ottobre (1992).

[75] The LHC Study Group: "*Design study of the large hadron collider (LHC)*" – CERN **91–3** 115, (1991).

[76] P. J. Bryant: "*Some advantages of inclined collimators*"– CERN Report SL–AP **92–24**, (1992).

[77] P. J. Bryant, E. Klein: "*The design of betatron and momentum collimation systems*"– CERN Report SL–AP **92–40**, (1992).

[78] P. Schmüser: "*Superconducting magnets for particle accelerators*" – Rep. Prog. Phys. **54** 683, (1990).

[79] P. Schmüser: "*Magnetic measurements of the superconducting HERA magnets and analysis of systematic errors*" – DESY Report, HERA–P **92–01**, (1992).

[80] W. Scandale: "*The lattice of the LHC: Version 1* " – CERN Report SL–AP **91–03**, (1991).

[81] V. B. Chirikov: "*A universal instability of many–dimensional oscillator systems*" – Phys. Rep. **52** 265, (19 79).