

IEKP-KA/93-6

**Bestimmung von α_s aus
der Skalenverletzung in der
Fragmentationsfunktion bei
der e^+e^- -Annihilation**

Thomas Kußmaul

Diplomarbeit

Institut für experimentelle Kernphysik
Fakultät für Physik
Universität Karlsruhe (TH)

Karlsruhe, Mai 1993

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die Fragmentationsfunktionen bei der inklusiven Hadronproduktion $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ untersucht. Der Vergleich von Daten bei unterschiedlichen Energien ergab eine starke Skalenverletzung. Dieser Effekt kann zur Bestimmung der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung α_s ausgenutzt werden.

Mit Hilfe des exakten QCD-Matrix-Elements in 2.Ordnung wurde solch eine Bestimmung durchgeführt. Es wurden Daten von den Speicherringen PEP, PETRA, AMY und LEP bei $841 \text{ GeV}^2 \leq Q^2 \leq 8312 \text{ GeV}^2$ und $x(=p^h/p_{beam}) > 0.08$ verwendet.

Die Analyse ergab für die starke Kopplungskonstante einen Wert von

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.005$$

Der entsprechende QCD-Skalenfaktor lautet:

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 230 \pm 60 \text{ MeV}$$

„Die Physik erklärt die Geheimnisse
der Natur nicht, sie führt sie auf
tieferliegende Geheimnisse zurück.“
(C.F.v. Weizsäcker)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Quantenchromodynamik (QCD)	5
2.1	Das Quarkmodell	5
2.2	Die Lagrange-Dichte der QCD	8
2.3	Laufende Kopplungskonstante („running α_s “) und Renormalisierung .	10
2.4	Confinement und Jets	14
2.5	Der Prozeß $e^+e^- \longrightarrow$ Hadronen	15
3	Skalenverletzung	20
3.1	Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung	20
3.2	Skalenverletzung in der e^+e^- -Annihilation	24
3.3	Die Altarelli-Parisi-Gleichungen	30
3.4	Bestimmung von α_s aus der Skalenverletzung	34
3.4.1	Numerische Anpassung der Altarelli-Parisi-Gleichungen	34
3.4.2	Verwendung des QCD-Matrix-Elements 2.Ordnung	36
3.4.3	Entwicklung der Fragmentationsfunktionen nach Orthogonal- polynomen, Momente	37
4	Experimentelle Daten	39
4.1	Die Experimente	39
4.2	Das DELPHI-Experiment	40
4.2.1	Der LEP-Speicherring	40
4.2.2	Übersicht über den DELPHI-Detektor	41
4.2.3	Die supraleitende Spule	45
4.2.4	Die DELPHI-Spurdetektoren	45
4.2.5	Weitere DELPHI-Detektorkomponenten	48
4.3	Ereignisselektion und Detektorkorrektur	49

5	Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung	51
5.1	Der Monte-Carlo Generator und die zugehörigen Parameter	51
5.2	Die numerische Anpassung der Parameter	57
5.2.1	Grundlegendes zur Fitprozedur	57
5.2.2	Anpassungsschritte und Splineparametrisierung	60
5.2.3	Ergebnisse der Anpassung	62
5.3	Fehlerabschätzung	68
6	Schlußbemerkungen	76
A	Tabellen der Ergebnisse	79
B	$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ und $\alpha_s(M_Z^2)$	86
C	Der Glättungsalgorithmus 353QH,twice	87
D	Kubische Spline-Interpolation	89

Kapitel 1

Einführung

*Unser Wissen ist Stückwerk
(1.Korinther 13,9)*

„Was ist's, das die Welt in Innersten zusammenhält?“

Diese Frage beschäftigte nicht nur manchen Gelehrten der vergangenen Jahrhunderte, sondern ist auch eine der Grundlagen der Hochenergiephysik, einem großen Forschungsbereich der modernen Physik. Die Elementarteilchenphysik, wie die Hochenergiephysik auch noch genannt wird, beschäftigt sich mit den elementaren Bestandteilen der Materie und den Kräften (Wechselwirkungen) zwischen diesen. Das Ziel ist eine einheitliche Beschreibung der vielen beobachteten Phänomene durch möglichst wenige, allgemeingültige Gesetze und Prinzipien.

Dabei tritt neben die Frage nach den elementaren Kräften, die „die Welt im Innersten zusammenhalten“ auch die Frage nach den elementaren Teilchen, die als Grundbausteine für alle Materie, die uns umgibt und aus der wir bestehen, dienen. Die Antwort der Hochenergiephysik hierauf ist überraschend einfach:

Alle Materie ist aus elementaren Fermionen (Teilchen mit halbzahligem Spin) zusammengesetzt. Diese sind die Quarks (Ladung $+\frac{2}{3}$ bzw. $-\frac{1}{3}$) und die Leptonen (z.B. Elektronen mit Ladung -1 und Neutrinos mit Ladung 0), die ganzzahlige Ladung besitzen. Man vermutet heute 6 verschiedene Sorten von Quarks (Flavours), von denen das top-Quark bisher noch nicht experimentell nachgewiesen wurde.

Dazu korrespondierend sind auch 6 Leptonen bekannt. Quarks und Leptonen werden jeweils noch in 3 Generationen unterteilt. In Tabelle 1.1 sind diese elementaren Fermionen aufgelistet.

Die angesprochenen fundamentalen Bausteine können durch Austausch von Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) miteinander wechselwirken. Es gibt vier solcher Wechselwirkungen, die durch unterschiedliche Austauschteilchen — auch Feldquanten genannt — vermittelt werden. Außerdem unterscheiden sie sich deutlich durch Stärke und Reichweite. Jede dieser fundamentalen Wechselwirkungen läßt sich als Eichtheorie darstellen.

1. Einführung

Quarks			Leptonen	
u (up)	d (down)	1.Generation	e	ν_e
c (charm)	s (strange)	2.Generation	μ	ν_μ
t* (top)	b (bottom)	3.Generation	τ	ν_τ
$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	el. Ladung	-1	0

Tabelle 1.1: Die elementaren Fermionen

*noch nicht entdeckt

Die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird starke Wechselwirkung genannt. Als Austauschteilchen dienen hierbei die sogenannten Gluonen¹. Die zugehörige Theorie wird Quantenchromodynamik (QCD) genannt. Die starke Kraft koppelt dabei an alle Teilchen, die Farbladung tragen. Neben den Quarks sind dies auch die Eichbosonen der Theorie, die Gluonen. Das ist eine Besonderheit der nichtabelschen Eichtheorien, zu denen auch die QCD gehört. Außerdem spielen bei der starken Wechselwirkung alle aus Quarks zusammengesetzten Teilchen eine Rolle. Diese Teilchen, die Hadronen genannt werden, unterteilt man in zwei Gruppen.

Baryonen sind Hadronen mit halbzahligem Spin, die im wesentlichen aus 3 Quarks zusammengesetzt sind. Ihre bekanntesten Vertreter sind Protonen und Neutronen, die z.B. in Atomkernen zu finden sind. Die zweite Gruppe sind Teilchen mit ganzzahligem Spin, die aus Quark und Antiquark bestehen und Mesonen genannt werden. Einige wichtige Eigenschaften der starken Wechselwirkung werden in Kapitel 2 dargestellt.

Im Gegensatz zur starken Wechselwirkung, deren Reichweite auf einen Bereich von Femtometern ($=10^{-15}$ m) beschränkt ist, hat die elektromagnetische Wechselwirkung unendliche Reichweite. Sie wird vom Photon (γ) als Austauschteilchen übertragen und koppelt an alle Teilchen mit elektrischer Ladung. Dies wird in der Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben.

Die dritte fundamentale Wechselwirkung wird schwache Wechselwirkung genannt, da sie nur eine sehr kurze Reichweite hat. Als Austauschteilchen dienen die Bosonen W^+ , W^- und Z^0 . Alle Quarks und Leptonen besitzen eine schwache Ladung und spüren somit diese Wechselwirkung.

Es ist inzwischen gelungen, die schwache Wechselwirkung zusammen mit der elektro-

¹ von engl. glue = kleben

magnetischen in einem gemeinsamen elektroschwachen Modell darzustellen, das GWS-Modell (= Glashow-Weinberg-Salam Modell) genannt wird. Gemeinsam mit der QCD bildet dieses das Standardmodell. Man ist nun bestrebt, auch die starke Wechselwirkung mit den beiden anderen in einer „Grand Unified Theorie“ (GUT) zu vereinigen. Diese Vereinigung wäre ein wichtiger Schritt zu einer Theorie, die die verschiedenen Kräfte als unterschiedliche Aspekte der gleichen „fundamentalen Kraft“ beschreibt. Bei genügend hohen Energien wären alle Kräfte gleich.

Von der Einbeziehung der vierten fundamentalen Kraft, der Gravitation, in eine allumfassende Theorie ist man allerdings noch sehr weit entfernt. Für die uns aus dem Alltag vertrauteste Kraft, die zwischen Teilchen mit Masse wirkt, existiert noch kein Ansatz zu einer Eichtheorie. Beschrieben wird die Gravitation durch die Gesetze Newtons und die Allgemeine Relativitätstheorie von Einstein.

Alle vier fundamentalen Wechselwirkungen sind in Tabelle 1.2 mit einigen Eigenschaften aufgeführt.

Wechselwirkung	starke	elektromagnetische	schwache	Gravitation
Austauschteilchen	8 Gluonen	Photon	$W^\pm, Z^0$	Graviton*
koppelt an	Farbladung (Quarks)	elektrische Ladung	schwache Ladung (Quarks, Leptonen)	Masse
Reichweite	10^{-15} m	∞	10^{-18} m	∞
Beispiel	Kräfte in p und n Kernkräfte (Überbleibsel)	Elektrizität Kräfte im Atom el. magn. Wellen	β -Zerfall	Schwerkraft Planetenbewegung

Tabelle 1.2: Die fundamentalen Wechselwirkungen

*bisher unbekannt

Die verschiedenen Wechselwirkungen und Theorien spielen nicht nur bei der Untersuchung der kleinsten Teilchen eine große Rolle, sondern sie erlauben auch wichtige Aussagen über Entstehung und Entwicklung des Universums. Nach dem Modell vom heißen Urknall („big bang“) war das Weltall kurz nach seiner Entstehung sehr dicht komprimiert, und es herrschten deshalb sehr hohe Temperaturen ($> 10^{32}$ K). Durch Expansion kühlte das Universum im Laufe von Jahrillionen ab. Die beim heutigen, kühlen Universum vorhandenen vier fundamentalen Kräfte waren in den ersten Sekundenbruchteilen der Entwicklung des Alls wegen der großen Energien gleich. Elementare Fragestellungen, wie z.B. die nach der Ursache des Ungleichgewichts zwischen Materie und Antimaterie, fallen in diese Phase und sollen in Zukunft

1. Einführung

mit Hilfe von GUT-Theorien enträtselt werden. Auch für die Erforschung der anschließenden Entwicklungsstufen des Universums leistet die Elementarteilchenphysik große Dienste.

Um die verschiedenen fundamentalen Theorien zu prüfen, ihre Parameter zu messen und auf die vielen noch offenen Fragen im Bereich der Elementarteilchen und der Kosmologie Antworten zu finden, muß man Experimente durchführen.

Da wir uns im Bereich kleinster Teilchen (d.h. bei sehr kleinen Abständen) bewegen, ist eine große Auflösung nötig, um das Gewünschte zu „sehen“. Diese Forderung ist gleichbedeutend mit einer großen Energie, was auch den Namen „Hochenergiephysik“ als Synonym für „Elementarteilchenphysik“ erklärt. Ein weiterer Grund für die Verwendung hoher Energien liegt darin, daß viele der Bausteine, die man erzeugen will, eine große Masse haben, d.h. es wird nach $E = mc^2$ viel Energie zur Materiebildung benötigt.

Die geforderten Energiebereiche erreicht man mit Hilfe von Beschleunigern, in denen geladene Teilchen wie Elektronen oder Protonen durch elektrische Felder auf hohe Energien beschleunigt werden. Es gibt Linearbeschleuniger und Kreisbeschleuniger. Von besonderer Bedeutung sind die Speicherringe, in denen die Teilchen nicht auf ein festes Target geschossen werden, sondern in denen zwei Teilchenstrahlen, die den Ring in entgegengesetzter Richtung umlaufen, in bestimmten Bereichen mit hoher Energie aufeinanderstoßen. So werden z.B. beim LEP²-Speicherring am CERN³ in Genf Elektronen und Positronen, die den Ring entgegengesetzt durchlaufen, bei einer Energie von jeweils ca. 45 GeV zur Reaktion gebracht. Man erhält somit eine Schwerpunktsenergie um 90 GeV.

Um ein Experiment durchzuführen, werden außerdem noch entsprechende Nachweisgeräte für die entstandenen Teilchen benötigt. Diese Detektoren stellen wegen ihrer hohen technischen Anforderungen immer neue und komplexe Aufgaben an die Entwicklung in der Elektronik und Technik.

Man hofft, mit den erwähnten komplizierten Apparaten den vielen noch offenen Fragestellungen experimentell auf die Spur zu kommen. So ist z.B. eine der wichtigen Fragen in der Theorie der starken Wechselwirkung (QCD) die Größe der Kopplungskonstanten α_s . Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll eine Methode aufgezeigt werden, wie diese Konstante mit Hilfe der sogenannten Skalenverletzung — einem wichtigen Effekt in der QCD — bestimmt werden kann.

²LEP = Large Electron Positron collider

³CERN = Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire

Kapitel 2

Quantenchromodynamik (QCD)

Mit der Entdeckung des Atomkerns durch die Streuexperimente von Rutherford in den Jahren 1906 bis 1913 begann die Erforschung der kleinsten Bausteine der Natur. Nachdem man durch diese Versuche erkannte, daß ein Atom nicht ein unteilbarer Grundbaustein der Materie ist, sondern aus Elektronen besteht, die um einen kleinen, die ganze Masse tragenden Atomkern „kreisen“, folgte bald dessen Untersuchung. Man kam zu dem Ergebnis, daß der Kern aus geladenen Protonen und den elektrisch neutralen Neutronen aufgebaut ist. Dies warf die Frage auf, warum der Kern zusammenhalten kann, obwohl die Protonen sich aufgrund ihrer elektrischen Ladung abstoßen. Es mußte außer der elektrischen Kraft noch eine stärkere, auf kurzen Abständen wirkende „Kernkraft“ geben. Verschiedene Modelle wurden entwickelt, um diese Wechselwirkung zwischen den Nukleonen (=Kernbausteinen) erklären zu können. Das bekannteste stammt von Yukawa, der die Kernkraft durch Austausch von Pionen beschrieb.

Heute weiß man, daß die Kernkraft nur ein Überbleibsel der starken Kraft ist, die die Bausteine der Nukleonen, nämlich die Quarks, zusammenhält. Analog zu den Van-der-Waals Kräften bei der elektromagnetischen Wechselwirkung werden Kernkräfte durch inhomogene Verteilungen der starken Ladung im Proton oder Neutron verursacht.

Zur Beschreibung der starken Kraft wurde ab den 60er Jahren die Theorie der Quantenchromodynamik entwickelt. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Theorie werden in diesem Kapitel beschrieben.

2.1 Das Quarkmodell

Um 1964 waren schon etwa 100 Hadronen bekannt. Neeman, Gell-Mann und Zweig versuchten diese schematisch zu ordnen. Sie faßten dazu die Teilchen nach Isospin

2. Quantenchromodynamik (QCD)

und Hyperladung zu Multipletts zusammen. Aus gruppentheoretischen Überlegungen ergab sich die Idee, die vielen Teilchen als Bindungszustände von fundamentalen Bausteinen, den Quarks, zu beschreiben. Durch verschiedene Kombinationen der damals postulierten drei Quarksorten u, d und s erhielt man die Baryonen als ein System aus drei Quarks (z.B. Abbildung 2.1). Die Mesonen können als verschiedene Quark-Antiquark Zustände aufgefaßt werden (z.B. Abbildung 2.2).

Bis heute hat man viele weitere hadronische Teilchen entdeckt, deren Existenz ausschließlich nach obigem Bauprinzip mit den heute bekannten fünf Quarksorten u, d, s, c, b erklärt werden kann. Das als sechste Quark erwartete Top-Quark konnte aufgrund seiner großen Masse bisher noch nicht nachgewiesen werden.

Mit Hilfe des Quarkmodells ist es gelungen, die vielen hundert Hadronen durch wenige Grundbausteine zu beschreiben. Zu den Erfolgen des Modells gehört auch die richtige Vorhersage von bisher unbekannten Teilchen. So wurde z.B. die Existenz des aus drei s-Quarks bestehenden Ω^- lange vor seiner Entdeckung vorausgesagt.

Die Quarks selbst sind Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und drittelzahliger elektrischer Ladung (siehe auch Tabelle 2.1). Sie wurden bisher nie als freie Teilchen beobachtet, was die Theorie bestätigt, die besagt, daß Quarks nur in gebundenen Zuständen auftreten können. Neben der elektrischen Ladung tragen die Quarks eine starke Ladung, die auch Farbe genannt wird. Es sind drei solcher Farbladungen bekannt, die man in Analogie zur Farbenlehre rot, blau und grün (r,b,g) nennt.

Generation	Flavour	Masse*	el. Ladung	Quantenzahlen
1	u (up)	$\approx 350 \text{ MeV}$	$+2/3$	$I_3 = +1/2$
	d (down)	$\approx 350 \text{ MeV}$	$-1/3$	$I_3 = -1/2$
2	c (charm)	$\approx 1.8 \text{ GeV}$	$+2/3$	$C = +1$
	s (strange)	$\approx 550 \text{ MeV}$	$-1/3$	$S = -1$
3	t (top)**	$> 91 \text{ GeV}^\dagger$	$+2/3$	$T = +1$
	b (bottom)	$\approx 4.5 \text{ GeV}$	$-1/3$	$B = -1$

Tabelle 2.1: Die Quarks.

Die aufgeführten Quantenzahlen sind in der starken Wechselwirkung erhalten:

I_3 = dritte Komponente des Isospins, S= Strangeness, C= Charm, B= Bottomness, T= Topness. Nichtaufgeführte Quantenzahlen sind 0.

*Da Quarks nicht frei existieren, ist ihre Masse nicht eindeutig definiert. Die Angaben in der Tabelle ergeben sich aus Mesonmassen (nach [1]).

**noch nicht entdeckt

[†]nach [2]

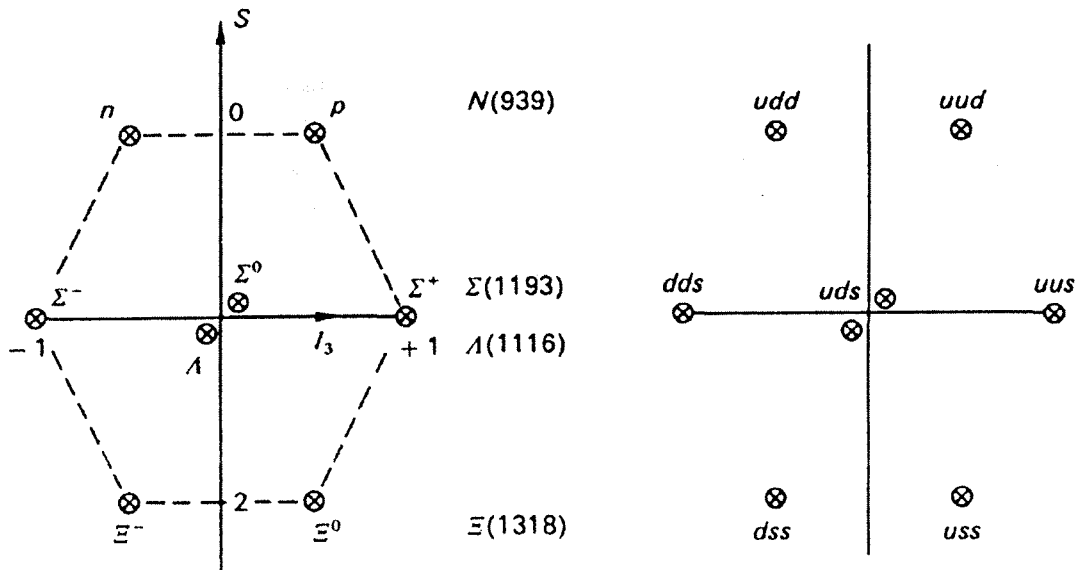


Abbildung 2.1: Baryonen aus u -, d - und s -Quarks mit Spin-Parität $\frac{1}{2}^+$. Links sind die beobachteten Teilchen und rechts der Quarkinhalt angegeben. [1]

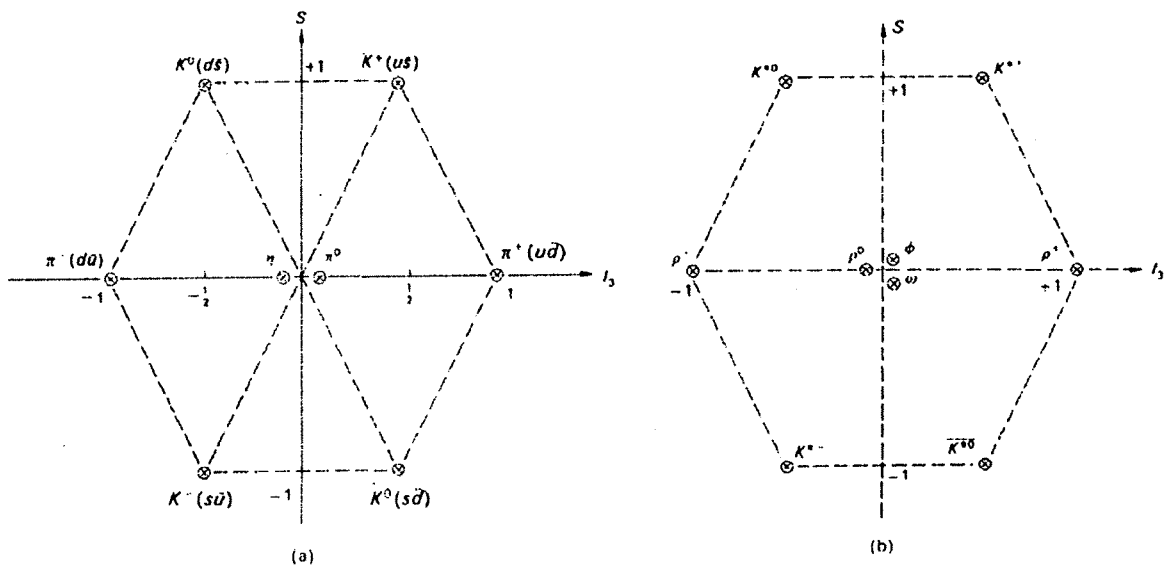


Abbildung 2.2: Mesonen aus u -, d - und s -Quarks mit Spin-Parität 0^- (a) bzw. 1^- (b). Die Quarkzusammensetzungen aus (a) gelten auch für (b). [1]

2. Quantenchromodynamik (QCD)

Eine Kombination aller drei Farben oder von Farbe und zugehöriger Antifarbe ergibt ein farbloses („weißes“) Teilchen.

Hadronen tragen nach außen hin keine Farbladung. Deshalb sind für Mesonen nur die farblosen Kombinationen ($q_{Farbe} \bar{q}_{\overline{Farbe}}$) möglich. Entsprechend gibt es Baryonen nur als ($q_r q_b q_g$) bzw. ($\bar{q}_r \bar{q}_b \bar{q}_g$), d.h. in Kombinationen, die alle drei Farben enthalten. Der Farbfreiheitsgrad, ursprünglich eingeführt, um das Pauli-Prinzip in Zuständen wie ddd (mit $J = \frac{3}{2}$) zu retten, kann auch explizit nachgemessen werden. Dazu wird das Verhältnis R von hadronischem zu myonischem Wirkungsquerschnitt in der e^+e^- -Annihilation verwendet:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (2.1)$$

Wird R ohne Farben berechnet, so fehlt der Faktor 3. Die Existenz von drei Farben ist also experimentell gesichert.

Die Wechselwirkung zwischen den farbigen Quarks wird durch 8 Eichbosonen übertragen, die Gluonen genannt werden. Diese masselosen Austauscheteilchen tragen selbst Farbe und Antifarbe, was zur Folge hat, daß sie auch untereinander wechselwirken. Diese wichtige Gluonselfkopplung hat große Auswirkungen auf die weiteren physikalischen Eigenschaften der starken Wechselwirkung.

2.2 Die Lagrange-Dichte der QCD

Die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen wird in einer Eichtheorie, der Quantenchromodynamik, beschrieben. Vorbild war das einfachste Beispiel einer quantisierten Feldtheorie, die Quantenelektrodynamik. Diese wurde zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung eingeführt und ist eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien überhaupt. Dabei wird die unitäre Eichgruppe $U(1)$ verwendet, die zu einem masselosen Eichboson — dem Photon — führt.

Die Eichgruppe der QCD ist nicht die $U(1)$ -, sondern die $SU(3)$ -Gruppe. Die Generatoren dieser Gruppe sind acht 3×3 -Matrizen, die sogenannten Gell-Mann-Matrizen λ_a , $a = 1, \dots, 8$. Diese Matrizen kommutieren nicht. Es handelt sich folglich um eine nichtabelsche Gruppe.

$$\text{Mit } T_a = \frac{\lambda_a}{2} \text{ gilt: } [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

Dabei sind die f_{abc} die Strukturkonstanten der Gruppe.

Um die Lagrange-Dichte zu erhalten, geht man von einem kinetischen Term für die Quarks aus [3]:

$$\mathcal{L}^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j) q^j(x) \quad (2.2)$$

Hierbei läuft die Summe über alle Flavours. Die Quarkfelder q^j besitzen drei Farbkomponenten:

$$q^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \end{pmatrix}$$

Wir fordern Invarianz unter der folgenden lokalen Eichtransformation im Farbraum:

$$q^j(x) \longrightarrow U(x) q^j(x) = e^{i\alpha_a(x) T_a} q^j(x) \quad , \quad T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (2.3)$$

Um diese zu erfüllen wird eine kovariante Ableitung eingeführt:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + ig T_a G_\mu^a$$

Die Vektorfelder G_μ^a beschreiben gerade die Gluonfelder. Ihre Transformationsvorschrift lautet:

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a - f_{abc} \alpha_b G_\mu^c \quad (2.4)$$

Schließlich fügen wir noch einen eichinvarianten Term für die kinetische Energie dieser Eichfelder hinzu, der den Gluonfeldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ enthält.

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.5)$$

Das Ergebnis für die eichinvariante Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik lautet dann ([3]):

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j) q^j(x) - g \sum_{j=1}^f \bar{q}^j(x) \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a q^j(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

Der erste Teil beschreibt hierbei die Quarks, der dritte die Gluonen und der zweite die Kopplung zwischen beiden. Die Konstante g entspricht der Kopplungskonstanten. Meist bezeichnet man aber $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ als die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung.

2. Quantenchromodynamik (QCD)

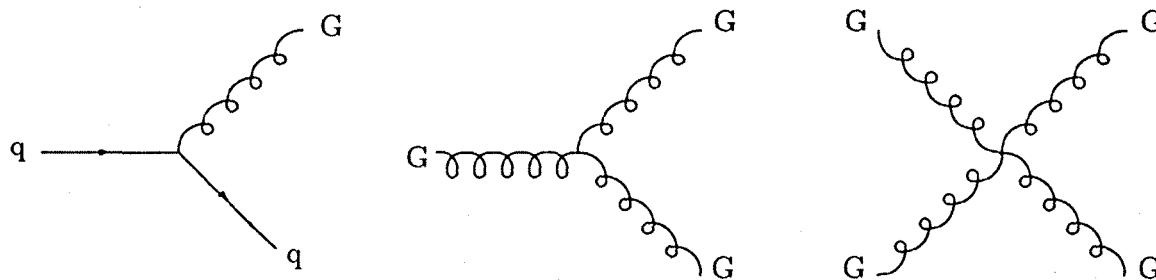


Abbildung 2.3: Die elementaren Feynmangraphen der QCD, die neben freiem Quark und freiem Gluon in $\mathcal{L}_{QCD}$ enthalten sind.

Links eine Quark-Gluon-Wechselwirkung ($q\bar{q} \rightarrow g$), in der Mitte der Tripel-Gluon Vertex und rechts der 4-Gluonen Vertex.

Die Zusatzterme mit den f_{abc} in Gleichung (2.4) und bei den Feldstärketensoren $G_{\mu\nu}^a$ in Gleichung (2.6) zeigen, daß eine nichtabelsche Gruppe vorliegt. Sie beinhalten gerade die oben erwähnte Selbstkopplung der Gluonen.

Wegen der Selbstwechselwirkung der Gluonen gibt es bei den elementaren QCD-Feynmangraphen in Abbildung 2.3 auch solche, die nur aus Gluonen bestehen. Den Vertex mit 3 Gluonen ($g \rightarrow gg$) nennt man auch Triple-Gluon Vertex, $g \rightarrow ggg$ entspricht einem 4-Gluon Vertex.

2.3 Laufende Kopplungskonstante („running α_s “) und Renormalisierung

Die Kopplungskonstante α_s wird nicht als echte Konstante, sondern als „laufende“ Kopplungskonstante benutzt, deren Wert von der verwendeten Energieskala abhängt. Ähnliches gibt es auch in der QED. Dort nimmt die Kopplung α mit der Energie zu. Eine laufende Kopplungskonstante wird verwendet, da der Versuch, „nackte“ Kopplungen, Ladungen oder Massen — α_0, e_0, m_0 — zu definieren, wegen der Selbstenergiebeiträge zu Unendlichkeiten führt. Man muß deshalb diese Größen durch die renormierten, physikalisch wirklich meßbaren Größen ersetzen. Dabei wird α bei einer Energie q^2 durch α bei einem q_0^2 ausgedrückt. „Nackte“ Kopplungen werden also vermieden.

Wenn man sich überlegt, welche elektrische Ladung — was im wesentlichen α entspricht — eine zur Messung verwendete Probeladung q wirklich „sieht“, so wird das Verhalten von $\alpha(q^2)$ verständlich. Durch Vakuumpolarisation entstehen aus den Photonen, die ständig absorbiert oder emittiert werden, für kurze Zeit e^+e^- -Paare.

2.3. Laufende Kopplungskonstante („running α_s “) und Renormalisierung

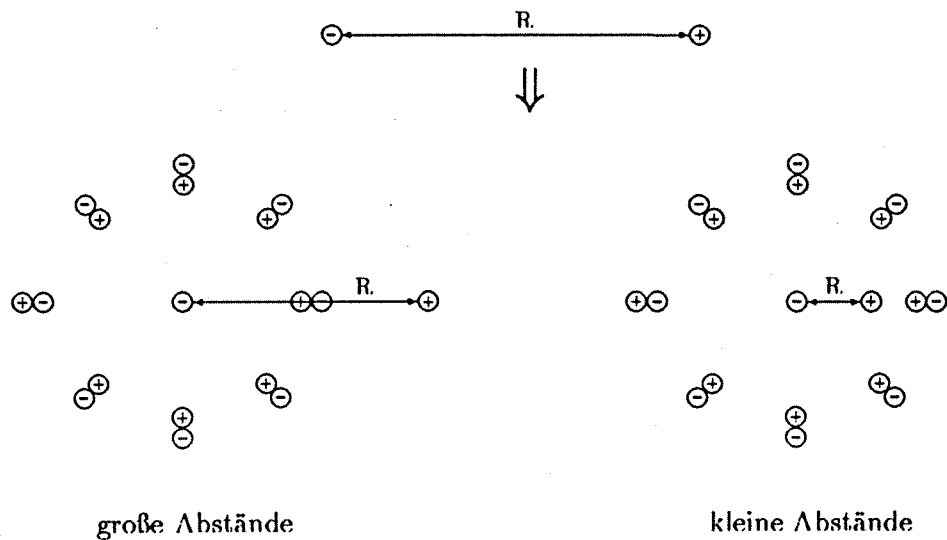


Abbildung 2.4: Ladungsmessung.

Bei großer Entfernung R sieht die Probeladung wegen der Abschirmung weniger „nackte“ Ladung als bei kurzen Abständen. Dies hat zur Folge, daß die Kopplungskonstante der QED energieabhängig ist.

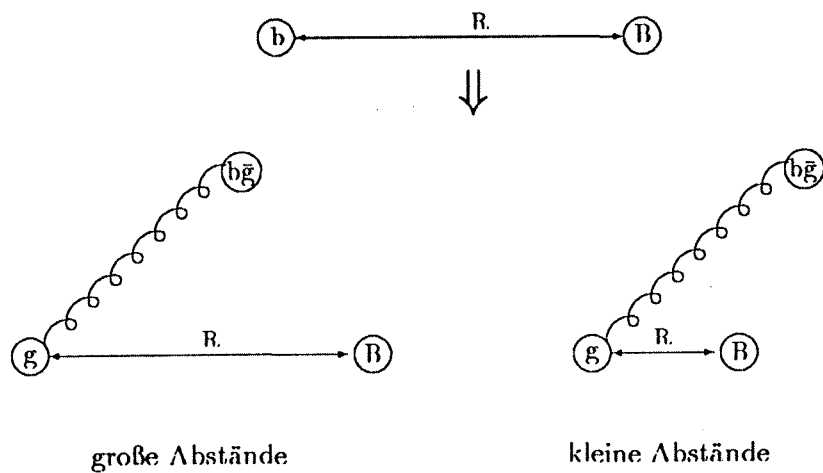


Abbildung 2.5: Antiabschirmeffekt durch die Gluonen.

Neben virtuellen Quarks spielen in der QCD auch virtuelle Gluonen eine Rolle. Da diese die Farbe (hier blau) nach außen tragen, „sieht“ eine auf blau empfindliche Sonde B bei großem Abstand R mehr blau als bei geringen Entfernungen.

2. Quantenchromodynamik (QCD)

Diese virtuellen, geladenen Teilchen schirmen, vergleichbar mit einem Dielektrikum, die zu messende Ladung nach außen ab („shielding“-Effekt), d.h. bei größeren Abständen ($\hat{=}$ kleineren Energien) erkennt q nur eine abgeschirmte Ladung. Bei kleineren Abständen — d.h. größeren Energien — befindet man sich näher an der „nackten“ Ladung und hat weniger Abschirmung (Abbildung 2.4). Folglich nimmt die so gemessene Ladung mit der Energie zu.

Die QCD zeigt ein anderes Verhalten. Zunächst hat man auch analog zu der QED einen Abschirmeffekt der Farbladung, der durch virtuelle Quark-Antiquark-Paare entsteht. Doch die Gluonen, die von dem zu messenden Probequark absorbiert oder emittiert werden, können nicht nur kurzzeitig in $q\bar{q}$ -Paare, sondern wegen der Gluonselfkopplung auch in Gluonpaare übergehen. Diese virtuellen Gluonen tragen selbst Farbladung und bewirken somit ein „Nachaußentragen“ der Farbe (Abbildung 2.5). Dies hat einen Antiabschirmeffekt („antishielding“-Effekt) zur Folge. Bei hohen Energien ($\hat{=}$ kleinen Abständen) „sieht“ man weniger Farbe. Die Kopplungskonstante α_s nimmt mit der Energie ab (Abbildung 2.6).

Mit der Renormalisierung zur Beseitigung der Divergenzen erhält man für α_s in 1.Ordnung [5]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} (11 - \frac{2}{3}N_f) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (2.7)$$

N_f ist die Flavourzahl und Q_0 eine Bezugsenergie.

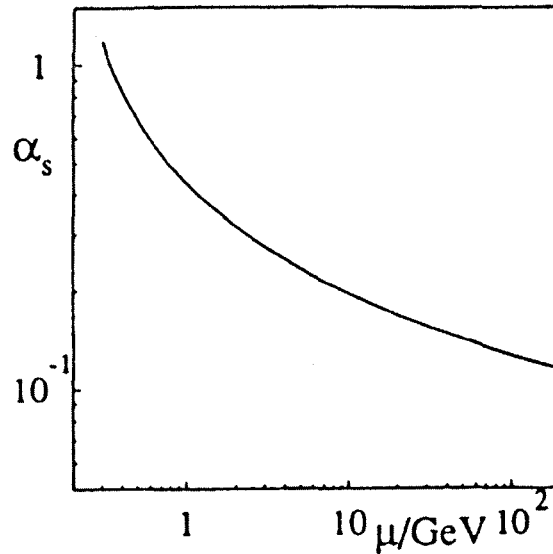


Abbildung 2.6: Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstanten α_s (nach [4]).

2.3. Laufende Kopplungskonstante („running α_s “) und Renormalisierung

Statt Q_0 kann man einen Skalenparameter Λ verwenden. Bei Berücksichtigung der zweiten Ordnung hängt dieser vom verwendeten Renormalisierungsschema ab. Meist wird das sogenannte $\overline{MS}$ -Schema (Schema der modifizierten minimalen Subtraktionen) verwendet. Außerdem hängt Λ noch von der Flavourzahl ab. Wenn im folgenden von Λ gesprochen wird, so ist immer $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ gemeint, d.h. Λ im $\overline{MS}$ -Schema mit $N_f = 5$.

Die endgültige Gleichung für die laufende Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$ lautet in der 2.Ordnung [6]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \left(1 - \frac{6(153 - 19N_f) \ln \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{(33 - 2N_f)^2 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \right) \quad (2.8)$$

Ist der aus dem Experiment zu bestimmende Skalenfaktor Λ bekannt, so kann mit Gleichung (2.8) α_s bei jeder Energie in 2.Ordnung berechnet werden. Eine Bestimmung von Λ entspricht also einer Bestimmung von α_s .

Das Verhalten von α_s zeigt, daß für asymptotisch große Q^2 $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ gilt. In diesem Energiebereich verhalten sich die Quarks folglich wie freie Teilchen. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als Asymptotische Freiheit („asymptotic freedom“).

Die Renormalisierungsskala:

Zum Ausrechnen von physikalischen Größen bei Prozessen verwendet man oft die Störungstheorie. Dabei wird die interessierende Observable V nach der Kopplungskonstanten entwickelt:

$$V = a_0 + a_1\alpha_s + a_2\alpha_s^2 + a_3\alpha_s^3 + \dots \quad (2.9)$$

Die Koeffizienten a_i werden bei einer Energie Q^2 in einem bestimmten Renormalisierungsschema berechnet. Bei Verwendung einer Renormalisierungsskala μ mit $\mu^2 \neq Q^2$ muß die Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu^2)$ benutzt werden. Ebenso sind die Koeffizienten a_i von der Skala abhängig. Dennoch bleibt die gesamte Reihe (2.9) gleich, da μ kein physikalischer Parameter ist und deshalb den Wert der physikalischen Größe V nicht beeinflussen darf. Bricht man (2.9) hingegen aufgrund der Unkenntnis von höheren Ordnungen nach dem i -ten Term ab, so bleibt eine Abhängigkeit von der verwendeten Renormalisierungsskala. Dies zeigt, daß die unbekannten höheren Ordnungen und das Abhängen von der Skala eng miteinander verknüpft sind.

In der optimierten Störungstheorie („optimized perturbation theory“) [7] versucht man, den Einfluß der höheren Ordnungen durch entsprechende Wahl der Renormalisierungsskala zu minimieren.

2. Quantenchromodynamik (QCD)

Beim Übergang von der Skala Q^2 zu einer Skala $\mu^2 = f \cdot Q^2$ gilt für die neuen Koeffizienten a'_i [4]:

$$a'_i = \sum_{j=0}^{i-1} c_i^j |\ln(f)|^j$$

Dabei werden die Zahlen c_i^j aus den a_i berechnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0 \\ a'_1 &= a_1 \\ a'_2 &= a_2 + a_1 \frac{33 - 2N_f}{12\pi} \ln f \\ a'_3 &= a_3 + \left(a_1 \frac{6(153 - 19N_f)}{(12\pi)^2} + 2a_2 \frac{33 - 2N_f}{12\pi} \right) \ln f + a_1 \frac{(33 - 2N_f)^2}{(12\pi)^2} (\ln f)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Den Faktor f nennt man Renormalisierungsfaktor. Mit $\alpha'_s = \alpha_s(fQ^2)$ ergibt sich für die Observable (in 3.Ordnung):

$$V = a'_0 + a'_1 \alpha'_s + a'_2 \alpha'^2_s + a'_3 \alpha'^3_s \quad (2.11)$$

2.4 Confinement und Jets

Die Störungsrechnung funktioniert nur, solange die Kopplungskonstante klein bleibt, was für α_s bei großen Energien erfüllt ist. Bei niedrigeren Energien wird α_s aber so groß, daß keine Störungsrechnung mehr durchgeführt werden kann. Man verwendet in diesem Bereich Modelle.

Die Zunahme von α_s mit Verringerung der Energie ($\cong$ Vergrößerung des Abstands) hat das „Confinement“ der Quarks zur Folge. „Confinement“ bedeutet, daß die Quarks in farbneutralen Hadronen eingeschlossen sind, also nicht als freie Teilchen existieren können. Beim Versuch der Trennung bildet sich zwischen den farbigen Quarks ein Feldschlauch (String) aus Gluonen. Dieser nimmt um so mehr Energie auf, je weiter man die Quarks voneinander entfernt. Man kann dies durch einen linearen Anteil am Potential beschreiben: $V \propto r$ (d.h. die Energiedichte im String ist konstant). Irgendwann reicht die Energie aus, um $q\bar{q}$ -Paare zu bilden. Die neuen Teilchen rekombinieren mit den ursprünglichen, und das ganze setzt sich so lange fort, bis nur noch Hadronen übrig bleiben. Diese sind farblos und koppeln deshalb nicht mehr an einen String.

Das Confinement hat zur Folge, daß bei einem Prozeß, bei dem primär Quarks und Antiquarks sowie Gluonen entstehen, im Endzustand nur Hadronen zu sehen sind.

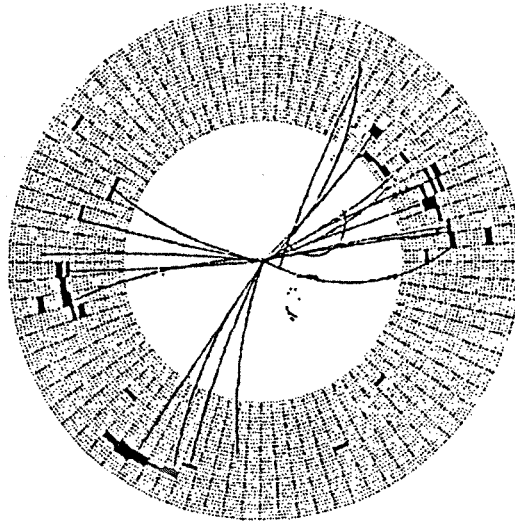


Abbildung 2.7: 3-Jet-Ereignis bei 31 GeV [3].

Man erkennt deutlich, daß die Teilchen in 3 Bündeln vom Reaktionspunkt wegfliegen.

Der Übergang von diesen Partonen genannten Teilchen zu Hadronen wird auch als Fragmentation bezeichnet. Der Impuls der Partonen wird dabei auf die Hadronen verteilt. Da bei der Fragmentation nur geringe Transversalimpulse bezüglich der primären Richtung hinzukommen, erhält man ein ganzes Bündel hadronischer Teilchen. Man spricht hierbei von einem Jet. Im Experiment sieht man an Stelle der Quarks solche Jets von Teilchen, wie in Abbildung 2.7 ersichtlich.

Die Anzahl der bei der Fragmentation entstehenden Hadronen hängt von der Energie ab. Bei 91 GeV (LEP-Energie) erhält man im Mittel bei einem Ereignis ca. 21 geladene Teilchen. Diese Zahl nennt man (geladene) Multiplizität.

2.5 Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

Von großer Wichtigkeit für Tests der QCD ist die Annihilation von Elektron und Positron über γ oder Z^0 in ein Quark-Antiquark-Paar, das in Hadronen fragmentiert. Man kann diesen Prozeß in 4 Phasen aufteilen (Abbildung 2.8) [4]:

- (I) Bildung eines $q\bar{q}$ -Paares
- (II) Abstrahlung von Gluonen, Aufspaltung von Gluonen in $q\bar{q}$ -Paare
- (III) Fragmentation der Quarks und Gluonen in Hadronen
- (IV) Zerfall der instabilen Teilchen

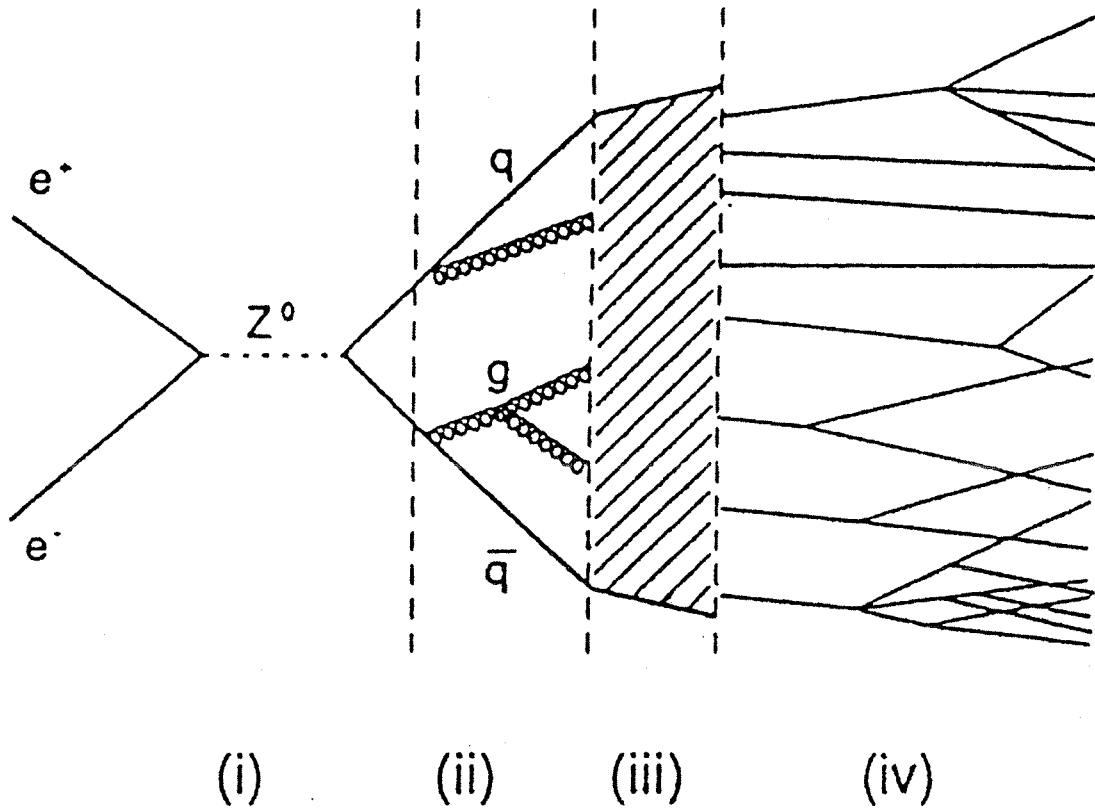


Abbildung 2.8: Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ in 4 Phasen.

(I) Bildung eines $q\bar{q}$ -Paares ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$)

Aus Elektron und Positron entsteht ein $q\bar{q}$ -Paar über ein γ oder Z^0 . Dieser Prozeß kann mit der elektroschwachen Theorie berechnet werden. Dabei werden die Kopplungen der einzelnen Quarkflavours an γ und Z^0 benutzt. Für die Kopplung an γ ist die elektrische Ladung verantwortlich. Die Kopplung an das Z^0 wird durch V (Vektorkopplung) und A (Axialvektorkopplung) beschrieben, in die neben der Ladung auch die 3.Komponente des schwachen Isospins und $\sin^2 \theta_W$ ¹ eingehen.

Hat man Energien im Bereich der Z^0 -Masse, so wird das Z^0 -Boson resonant erzeugt. Da die Kopplungen der verschiedenen Flavours an γ und Z^0 unterschiedlich sind, erhält man bei 91 GeV (d.h. auf dieser Resonanz) eine andere Flavourzusammensetzung als in Energiebereichen, in denen nur das γ eine Rolle spielt.

¹ $\sin^2 \theta_W \approx 0.23$

θ_W wird schwacher Mischungswinkel genannt.

(II) Abstrahlung von Gluonen / Aufspaltung von Gluonen in $q\bar{q}$ -Paare

Genau wie ein elektrisch geladenes Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein Photon abstrahlen kann, können Quarks (d.h. Teilchen mit Farbladung) Gluonen abstrahlen. Diese Gluonen können analog der Vakuumpolarisation eines Photons ($\gamma \rightarrow e^+e^-$) in ein Quark-Antiquark-Paar aufspalten ($g \rightarrow q\bar{q}$). Wegen der Gluon-selbstkopplung ist außerdem eine Aufspaltung in zwei Gluonen möglich ($g \rightarrow gg$). Von den sekundären Quarks und Gluonen kann wieder Gluonstrahlung bzw. Aufspaltung ausgehen usw. Man erhält eine Kaskade von Quarks und Gluonen. Die mathematische Behandlung hiervon kann auf zweierlei Arten geschehen:

• Matrix-Element:

Man rechnet dabei die Wirkungsquerschnitte explizit bis zu einer bestimmten Ordnung in Störungstheorie. In 1.Ordnung und für masselose Quarks gilt für das Matrix-Element [6]:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (2.12)$$

Dabei ist $x_i = \frac{2E_i}{E_{CM}}$ der Energieanteil der Partonen an der Strahlenergie.

Vollständige Matrix-Element-Rechnungen gibt es bisher nur bis zur 2.Ordnung in α_s , [8][9][10][11], da die Zahl der zu berücksichtigenden Feynmandiagramme mit jeder Ordnung stark anwächst.

Bei einem Matrix-Element zweiter Ordnung besteht der Endzustand aus maximal 4 Partonen (siehe Graphen in Abbildung 2.9).

• Leading-Log-Approximation:

Bei der Leading-Log-Näherung werden nur die führenden logarithmischen Terme aller Ordnungen, nicht aber Schleifendiagramme berücksichtigt. Dies entspricht einer rekursiven Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß ein Quark ein Gluon abstrahlt bzw. daß ein Gluon in $q\bar{q}$ oder gg aufspaltet. Wegen der hierdurch entstehenden Kaskade von Quarks und Gluonen, ähnlich einem elektromagnetischen Schauer, spricht man auch von Parton-Schauer. Der Endzustand besteht aus vielen Partonen (Abbildung 2.10).

2. Quantenchromodynamik (QCD)

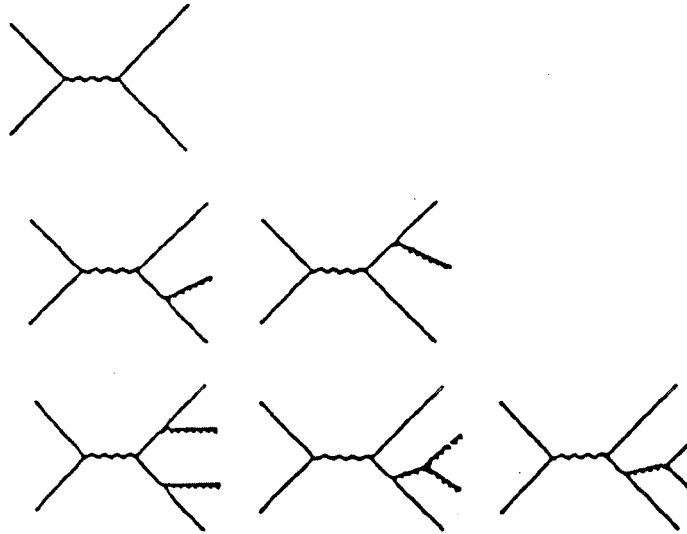


Abbildung 2.9: Feynmangraphen für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \text{Quarks} + \text{Gluonen}$ mit einem Matrix-Element 2.Ordnung.

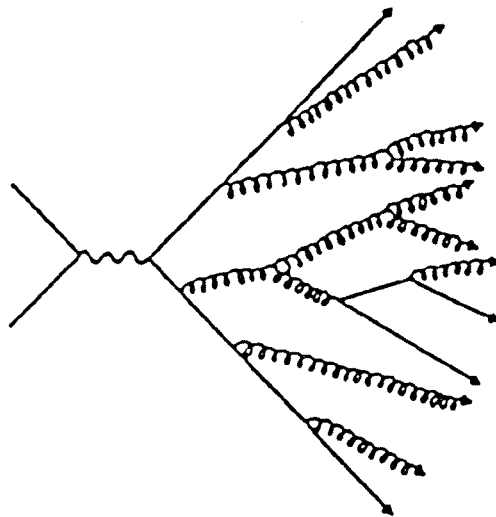


Abbildung 2.10: Beispiel für einen Feynmangraphen in Parton-Schauer Näherung für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \text{Quarks} + \text{Gluonen}$.

(III) Fragmentation der Quarks und Gluonen in Hadronen

Da wir uns bei der Fragmentation in Energiebereichen befinden, in denen keine Störungstheorie angewendet werden kann, sind wir auf phänomenologische Modelle angewiesen.

Das wichtigste Fragmentationsmodell ist das der String-Fragmentation. Dabei wird im Prinzip der in Kapitel 2.4 beschriebene Vorgang verwendet. Zwischen farbigen Teilchen, die sich voneinander entfernen, bildet sich ein Farbstring aus, der immer mehr potentielle Energie aufnimmt. Reicht diese Energie zur Bildung eines sekundären $q\bar{q}$ -Paares, so bricht der String auseinander, und das ganze wiederholt sich mit den verbleibenden Stringteilen, bis nicht mehr genügend Energie zur $q\bar{q}$ -Paarbildung vorhanden ist. An den Bruchstellen bilden sich aus beieinanderliegenden Quarks und Antiquarks Mesonen. Baryonen können über Diquarkpaare entstehen. In diesen Hadronisierungsprozeß geht eine Skalenfunktion ein, die die Verteilung von Energie und Longitudinalimpuls der gebildeten Hadronen angibt. Diese Funktion wird auch oft Fragmentationsfunktion genannt². Genauer über Form, Parametrisierung und Bedeutung wird in Kapitel 5.1 beschrieben.

Ein anderes, älteres Fragmentationsmodell, die Unabhängige Fragmentation („Independent Fragmentation“) [13], hat inzwischen an Bedeutung verloren. In diesem Modell wird angenommen, daß jedes Parton unabhängig von den anderen durch wiederholte Bildung von $q\bar{q}$ -Paaren fragmentiert, wobei auch eine Skalenfunktion verwendet wird. Da andere Ansätze — insbesondere die String-Fragmentation — die Daten besser beschreiben, werden die „Unabhängigen Modelle“ heute kaum noch verwendet.

(IV) Zerfall der instabilen Teilchen

Nach der Hadronisierung sind viele Mesonen und Baryonen vorhanden, die aber oft nur eine geringe Lebensdauer besitzen. Die Zerfälle dieser instabilen Teilchen schließen sich direkt an die Fragmentation an. Sie können mit Hilfe der Verzweigungsverhältnisse für die unterschiedlichen Zerfallskanäle der Teilchen nach elektroschwacher und starker Theorie beschrieben werden.

Schließlich bleiben nur stabile Hadronen übrig, die man im Detektor nachweisen kann. Die beschriebenen Zwischenstufen sind dem Experiment (leider) nicht zugänglich. Man „sieht“ nur die Reaktion $e^+e^- \rightarrow (\text{stabile}) \text{Hadronen}$ und muß sich zur genaueren Beschreibung die Zwischenstufen über Theorie, Modelle und Simulation beschaffen.

²Um eine klare Unterscheidung zu der in Kapitel 3.2 definierten Fragmentationsfunktion zu gewährleisten, wird im folgenden (z.B. Kapitel 5.1) wie in [12] nur der Name Skalenfunktion verwendet.

Kapitel 3

Skalenverletzung

3.1 Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung

Von großer Bedeutung für das Quarkbild der Hadronen und die Entwicklung der QCD sind die Experimente zur tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung. In diesem Gebiet wurde auch zum erstenmal eine Skalenverletzung („scaling violation“), verursacht durch QCD-Effekte, wie z.B. Gluonbremsstrahlung, gemessen und später zu einer präzisen Bestimmung der starken Kopplungskonstanten α_s verwendet [14]. Für die Beschreibung der tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung wurde das Partonmodell entwickelt. Es sagt aus, daß diese als Streuung des Leptons an punktförmigen Konstituenten des Nukleons (den Partonen) beschrieben werden kann (Abbildung 3.1). Diese Konstituenten können mit den Quarks identifiziert werden.

Der Wirkungsquerschnitt z.B. der Elektron-Proton-Streuung

$$e^- + p \longrightarrow e^- + X$$

kann mit Hilfe sogenannter Strukturfunktionen ausgedrückt werden [1]:

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{EM} \left[W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.1)$$

Hierbei sind W_1 und W_2 zwei Strukturfunktionen für die Beiträge der beiden Polarisationszustände des ausgetauschten Photons. Die Variablen ν und q stehen für die übertragene Energie bzw. den Viererimpulsübertrag. θ ist der Streuwinkel des Elektrons im Laborsystem.

Falls die Lepton-Parton-Streuung eine punktförmige Wechselwirkung ist, dürfen die Strukturfunktionen in (3.1) nicht von q^2 abhängen, sondern lediglich von einer

3.1. Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung

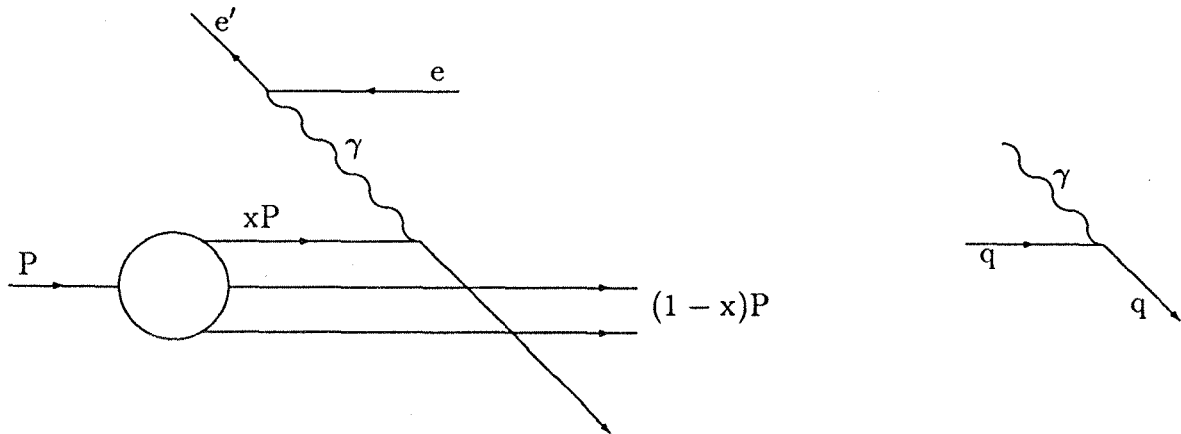


Abbildung 3.1: Tiefinelastische Streuung im Partonmodell.

Das Elektron streut an einem Konstituenten des Nukleons, der den Impuls xP trägt. Die anderen Partonen bleiben von der Streuung unberührt.

Rechts der Graph $O(\alpha)$ dieses Prozesses.

dimensionslosen Variablen $x = \frac{q^2}{2M\nu}$. Bei großen Energien (dies entspricht gerade einer punktförmigen Lepton-Parton Wechselwirkung) spielen nämlich die Massen keine Rolle mehr, und es ist somit keine Abhängigkeit von einer Massen- oder Längenskala vorhanden. Mathematisch bedeutet dies, daß die Funktionen $W(q^2, \nu)$ im Grenzfall $q^2 \rightarrow \infty$ und $\nu \rightarrow \infty$ endlich bleiben. Dieses 1967 von Bjorken postulierte Verhalten wird Skaleninvarianz genannt.

Man erhält für große Energien ($|q| \gg M_{\text{Nukleon}}$):

$$\begin{aligned} W_1(q^2, \nu) &\longrightarrow F_1(x) \\ \frac{\nu}{M} W_2(q^2, \nu) &\longrightarrow F_2(x) \end{aligned} \quad \text{mit } x = \frac{q^2}{2M\nu}$$

Diese Funktionen F_1 und F_2 gehen an Stelle von W_1 und W_2 in obigen Wirkungsquerschnitt (3.1) ein.

Durch eine leichte Rechnung kann man zeigen, daß die Variable x in einem System, in dem das Targetnukleon einen großen Dreierimpuls hat („infinite momentum frame“), gerade dem Anteil des gestreuten Partons am Viererimpuls des Nukleons entspricht:

$$p_{\text{Parton}} = xP$$

Im Laborsystem, in dem das Nukleon ruht, entspricht x einer Art Massenverhältnis von Parton- und Nukleonmasse: $x = \frac{m}{M}$. Das heißt, daß die Funktionen $F(x)$ in gewissem Sinne die Verteilung der Nukleonmasse auf die Partonen beschreiben.

3. Skalenverletzung

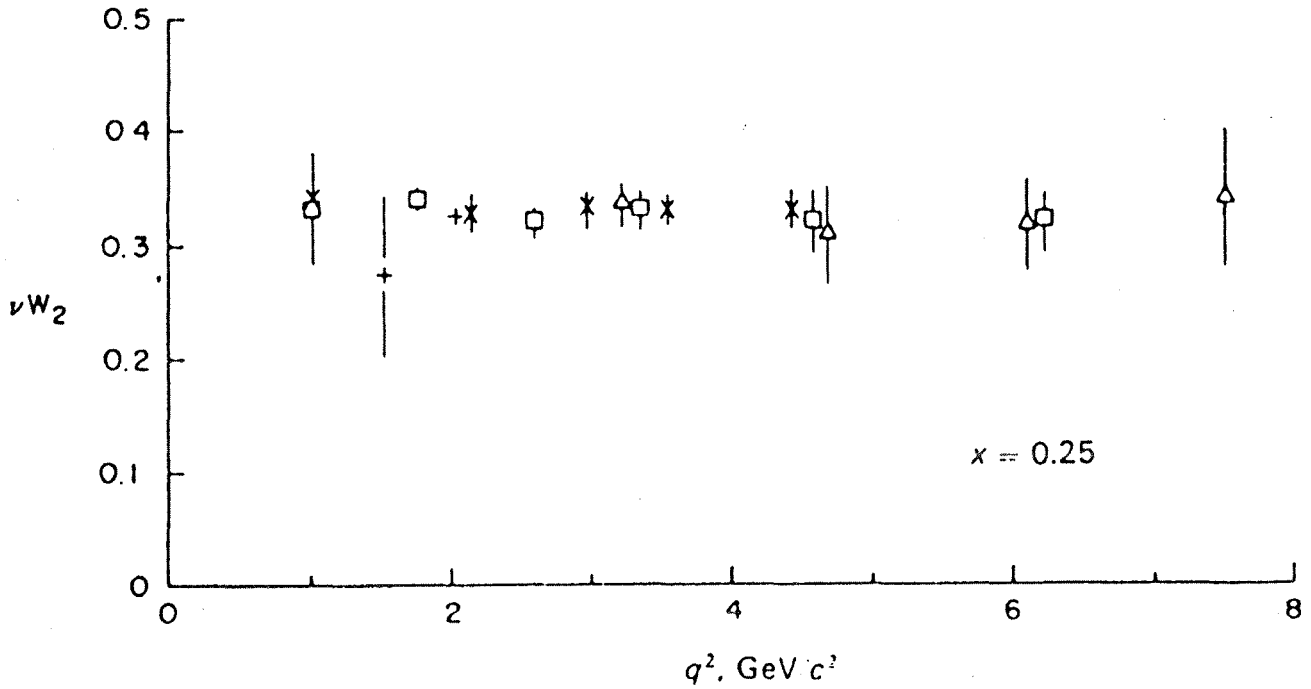


Abbildung 3.2: Skalenverhalten bei $x = 0.25$. Die Werte der Strukturfunktion hängen nicht von der Energie ab. (Daten vom SLAC [1])

In Abbildung 3.2 sieht man, daß die Skaleninvarianz bei $x = 0.25$ experimentell gut bestätigt ist.

Allerdings mißt man bei kleineren und größeren x Abweichungen von diesem Skalenverhalten. In Abbildung 3.3 würde exaktes Skalieren bedeuten, daß sich für alle x Parallelen zur Q^2 -Achse ergeben. Man sieht deutlich, daß dies nicht der Fall ist. F_2 steigt für kleine x mit Q^2 an und fällt für große x mit Q^2 ab.

Diese Eigenschaft wird Skalenverletzung genannt. Man kann sie mit Hilfe von Effekten in der QCD erklären.

Im Partonmodell werden weder Gluonbremsstrahlung noch virtuelle $q\bar{q}$ -Paare berücksichtigt. Diese liefern zu dem ursprünglichen Diagramm der Ordnung $O(\alpha)$ (Abbildung 3.1) noch Beiträge in α_s , z.B. der Ordnung $O(\alpha\alpha_s)$ oder $O(\alpha\alpha_s^2)$ (Abbildung 3.4) und zerstören das Skalenverhalten. Bei höherer Energie q^2 des Photons kann man besser auflösen und sieht neben den Valenzquarks mehr Gluonen und virtuelle $q\bar{q}$ -Paare. Diese $q\bar{q}$ tragen weniger Impuls, d.h. es werden mehr Partonen mit kleinem x gesehen. Durch Gluonbremsstrahlung nimmt der Impulsanteil der Valenzquarks ab, d.h. es gibt weniger Teilchen mit großem x . Diese beiden Effekte verursachen also genau das, was man in den Experimenten beobachten kann.

3.1. Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung

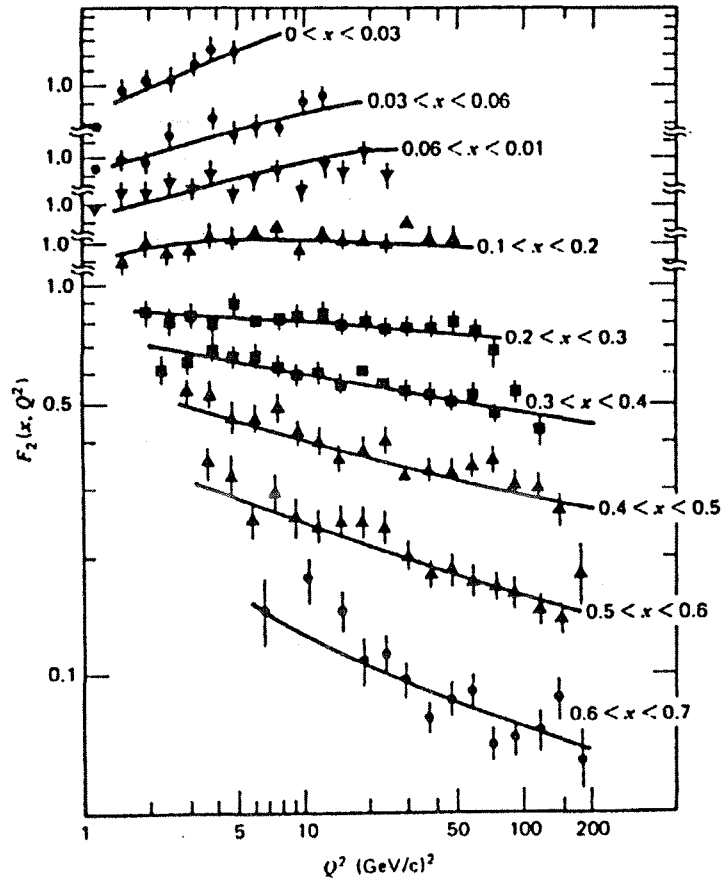


Abbildung 3.3: Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung. Man erkennt deutlich, daß sich die Werte der Strukturfunktion mit der Energie ändern. (Daten vom CDHS-Experiment am CERN [5])

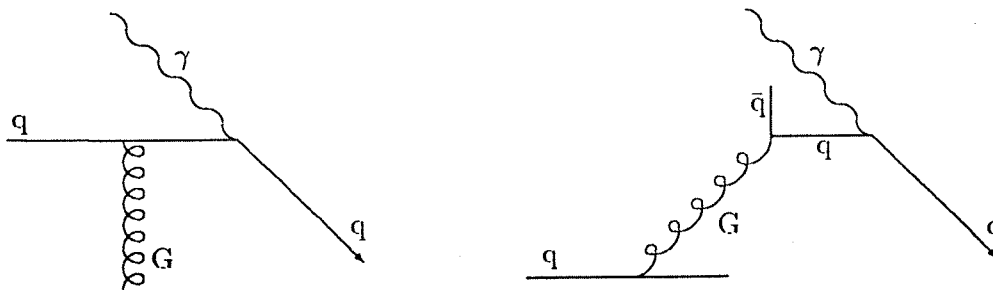


Abbildung 3.4: Beispiele für Beiträge in $O(\alpha_s)$ und $O(\alpha_s^2)$ zur tiefinelastischen Streuung, verursacht durch Gluonbremsstrahlung und Gluonenaufspaltung. Links streut das γ an einem Quark, das zuvor ein Gluon abgestrahlt hat. Rechts stammt das Quark, an dem gestreut wird, von einer Gluonenaufspaltung.

Quantitativ wird diese Energieabhängigkeit der Strukturfunktionen und damit des Wirkungsquerschnitts (3.1) durch die Altarelli-Parisi-Gleichungen formuliert. Diese sind für die e^+e^- -Annihilation in Kapitel 3.3 genauer erläutert.

Da die Skalenverletzung durch QCD-Effekte verursacht wird, die von der Größe der starken Kopplung α_s abhängen, ergibt sich die Möglichkeit, diesen Parameter aus der Differenz der Strukturfunktionen bei verschiedenen Energien zu messen.

3.2 Skalenverletzung in der e^+e^- -Annihilation

Bei der ep-Streuung befinden wir uns im raumartigen Bereich, d.h. das Austausch-Teilchen (Photon) ist raumartig.

Geht man nun in den zeitartigen Bereich, d.h. zur e^+e^- -Annihilation, über, so kann auch hier eine Skalenverletzung durch QCD-Effekte beobachtet werden. Die inklusive Hadronerzeugung $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ (Abbildung 2.8, Seite 16), bei der sämtliche geladenen Hadronen im Endzustand betrachtet werden, besteht wie in Kapitel 2.5 dargestellt, aus mehreren Phasen. Im Experiment sehen wir nur die hadronischen Endzustände. Die Beschreibung kann durch zwei kinematische Variablen erfolgen:

1. Durch das Betragsquadrat des Impulses, der vom leptonischen System (e^+e^-) auf das hadronische übertragen wird:

$$Q^2 = q^2 = (k_{e^+} + k_{e^-})^2 \equiv s \quad (3.2)$$

Im Schwerpunktsystem (CMS) ist dies gerade $E_{CM}^2 = 4E_{Strahl}^2$.

2. Durch den Energieanteil des Hadrons h an der Strahlenergie:

$$x = \frac{E^h}{E_{Strahl}} \quad \text{im CMS} \quad (3.3)$$

Oder invariant formuliert:

$$x = \frac{2pq}{Q^2}$$

Bei der Analyse wird an Stelle der Energie E^h des Hadrons der Impuls p^h verwendet, da dieser experimentell leichter zugänglich ist und die gleiche Information zur Skalenverletzung enthält.

Betrachtet werden soll im folgenden die (normierte) Impulsverteilung der Hadronen:

$$\frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma}{dx}(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) \quad \text{mit} \quad x = \frac{p^h}{E_{Strahl}} = \frac{2p^h}{E_{CM}} \quad (3.4)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ in (3.4) ist ein Maß für die Anzahl der Hadronen mit Impuls $p^h = xp_{Strahl}$:

$$\frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{N_{evt}} \frac{dN}{dx} \quad (3.5)$$

Dabei ist dN die Anzahl der Hadronen, die einen Impulsanteil zwischen x und $x+dx$ besitzen. N_{evt} ist die Zahl der verwendeten e^+e^- -Reaktionen, d.h. das Spektrum (3.5) ist auf eine $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen-Reaktion normiert.

Weiter wird eine Fragmentationsfunktion $D(x, Q^2)$ verwendet, die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit darstellt, ein Hadron mit Impulsanteil x im Endzustand zu finden. Es ist leicht einzusehen, daß diese Funktion gerade obigem Spektrum (3.5) entspricht.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß es in dem uns interessierenden Energiebereich 5 verschiedene Quarkflavours gibt, die nicht unbedingt alle die gleiche Fragmentationsfunktion besitzen, schreiben wir [15]:

$$D(x, Q^2) = \sum_{i=1}^5 W_i(Q^2) D_i(x, Q^2) \equiv \frac{1}{\sigma_{tot}} \frac{d\sigma}{dx} \quad (3.6)$$

Hierbei steht $W_i(Q^2)$ für das Gewicht vom Quarkflavour i bei der Energie Q^2 . Dieses Gewicht kann aus der elektroschwachen Theorie berechnet werden.

Hätte man nur einen Beitrag von den Diagrammen aus Abbildung 3.5, d.h. keine QCD-Effekte, so wären die Fragmentationsfunktionen $D_i(x)$ energieunabhängig. Dies entspricht dem Bjorken-Skalenverhalten bei der inelastischen Streuung. Eine Skalenverletzung (d.h. Energieabhängigkeit) des obigen Wirkungsquerschnitts käme dann nur durch die Änderung der in (3.6) durch die $W_i(Q^2)$ berücksichtigten Flavouranteile mit der Energie zustande. Wie bei der inelastischen Streuung spielen aber auch hier die QCD-Effekte, wie z.B. Gluonbremsstrahlung und Aufspaltung von Gluonen in Quark-Antiquark-Paare, eine große Rolle. Sie liefern mit den Diagrammen aus Abbildung 3.6 und höheren Ordnungen Beiträge zum Wirkungsquerschnitt. Diese Beiträge sind aus zwei Gründen energieabhängig und damit skalenverletzend:

- α_s ändert sich mit der Energie, d.h. die Kopplung von Gluonen an Quarks bzw. $q\bar{q}$ an Gluonen nimmt mit der Energie ab.
- Der Phasenraum für Gluonen wird mit zunehmender Energie größer.

Der zweite Effekt überwiegt hierbei den ersten, was bedeutet, daß bei höherer Energie mehr Gluonen und mehr $q\bar{q}$ -Paare entstehen. Dies äußert sich auch dadurch, daß die Anzahl der Jets in einem Ereignis mit der Energie zunimmt.

3. Skalenverletzung

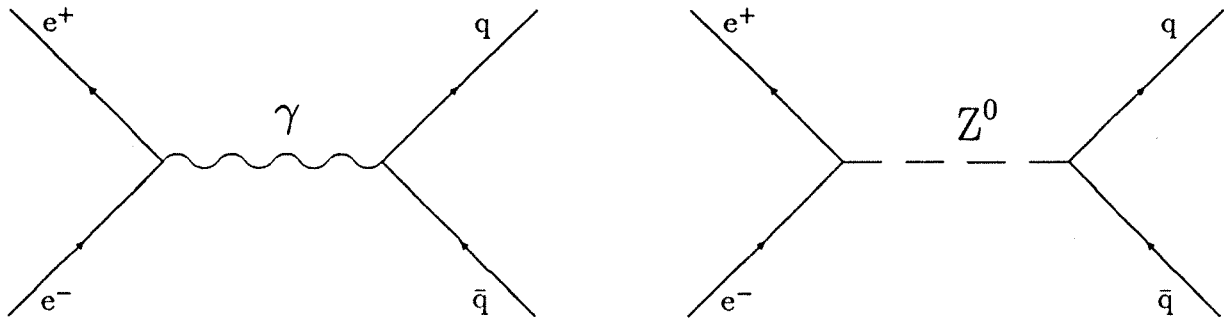


Abbildung 3.5: Diagramme zur e^+e^- -Annihilation in nullter Ordnung für γ - bzw. Z^0 -Austausch.

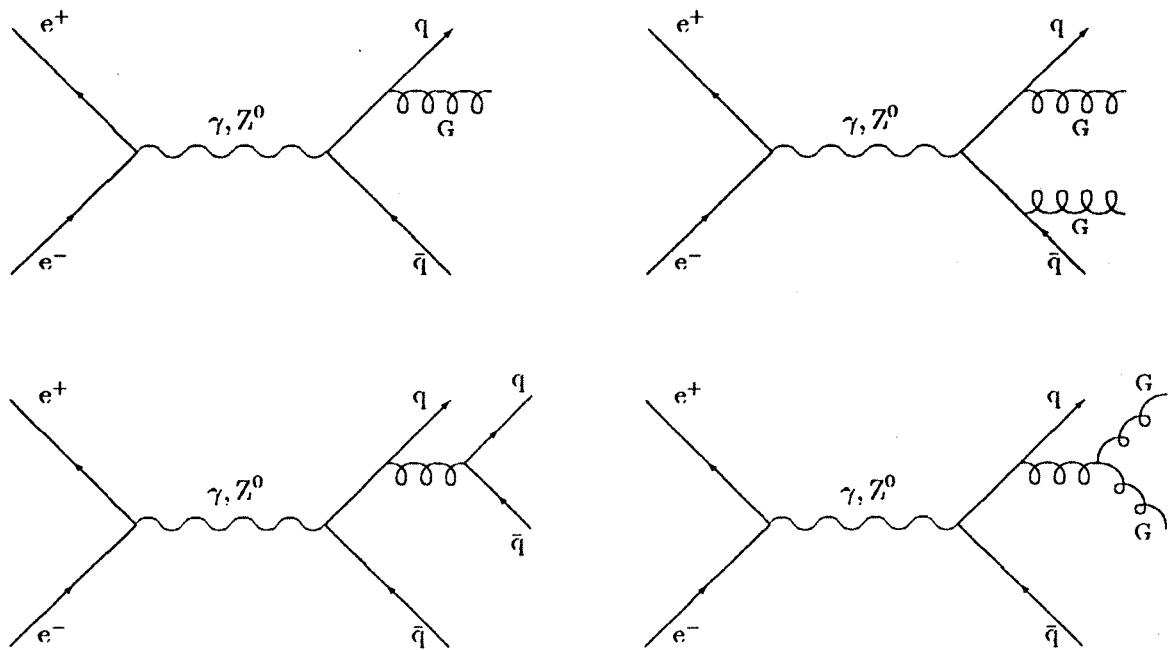


Abbildung 3.6: Beispiele für Diagramme zur e^+e^- -Annihilation in erster und zweiter Ordnung.

In Abbildung 3.7 ist die 3-Jetrates in Abhängigkeit von der Energie aufgetragen. Die Kurve für gleichbleibenden Phasenraum — dies entspricht einem konstanten y^1 — zeigt einen leichten Abfall mit der Energie. An ihr sieht man die Energieabhängigkeit, die mit der Abnahme von α_s zusammenhängt. Läßt man hingegen die Jetauflösung — d.h. M^1 — konstant, so wird die Zunahme des Phasenraums mit der Energie richtig berücksichtigt und die 3-Jetrates steigt stark an. Wegen diesem dominierenden Effekt nimmt der Wirkungsquerschnitt für $q\bar{q}G$ -Ereignisse zu. Bei einer Erhöhung der Energie von 35 GeV auf 91 GeV steigt der Anteil der 3-Jetereignisse von 26% auf 75% an.

¹Auf die Auflösungsparameter wird in Kapitel 5.1 eingegangen.

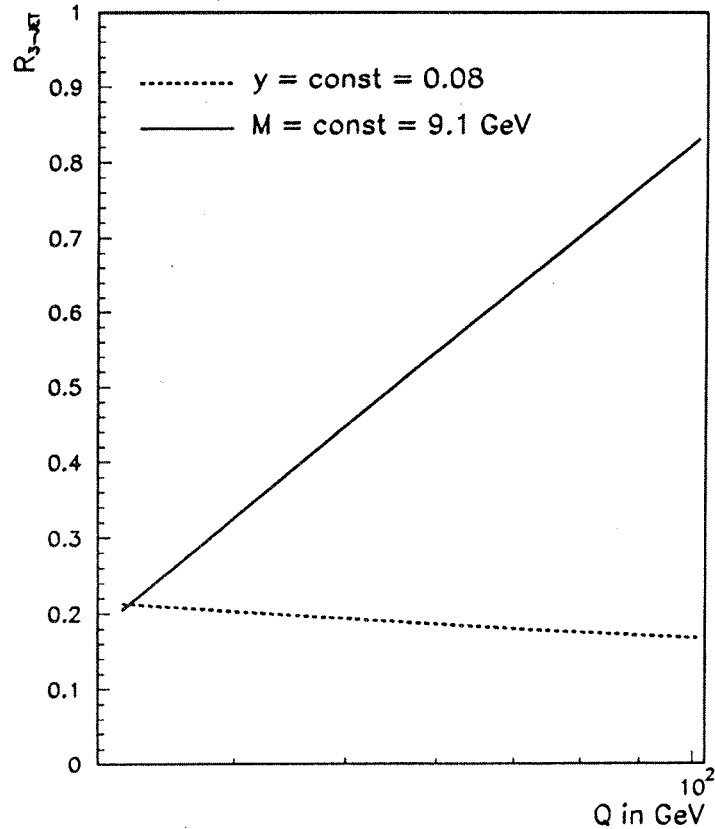


Abbildung 3.7: Die 3-Jetrates in Abhängigkeit von der Energie. Bei konstantem Phasenraum ($y = \text{const}$) nimmt die 3-Jetrates leicht mit der Energie ab. Bei konstanter Jetauflösung ($M = \text{const}$) zeigt sich hingegen eine starke Zunahme des Anteils der $q\bar{q}G$ -Ereignisse.

3. Skalenverletzung

Die Tatsache, daß bei höherer Energie mehr Gluonen abgestrahlt werden, führt dazu, daß die Quarks und damit auch die entstehenden Hadronen weniger Impuls haben. Der Wirkungsquerschnitt (3.5) nimmt deshalb für große x ab. Umgekehrt erhält man durch die zunehmende Anzahl von $q\bar{q}$ -Paaren und Gluonen mehr Teilchen mit wenig Impuls. Bei kleinen x steigt somit der Wirkungsquerschnitt mit der Energie an. Dieses Verhalten kann durch einen Vergleich von e^+e^- -Experimenten bei verschiedenen Energien eindeutig bestätigt werden (Abbildungen 3.8 und 3.9). Der Unterschied zwischen den Spektren verschiedener Energien hängt dabei direkt von α_s ab, da die Zunahme der Anzahl der Gluonen durch den größeren Phasenraum proportional zu α_s verläuft. Aus dem Verhältnis der Spektren bei 91 GeV und 35 GeV geht hervor, daß es sich bei der Skalenverletzung um einen 30%-Effekt handelt. Die in den Experimenten gemessene Skalenverletzung wird im nächsten Kapitel in eine quantitative Form gebracht.

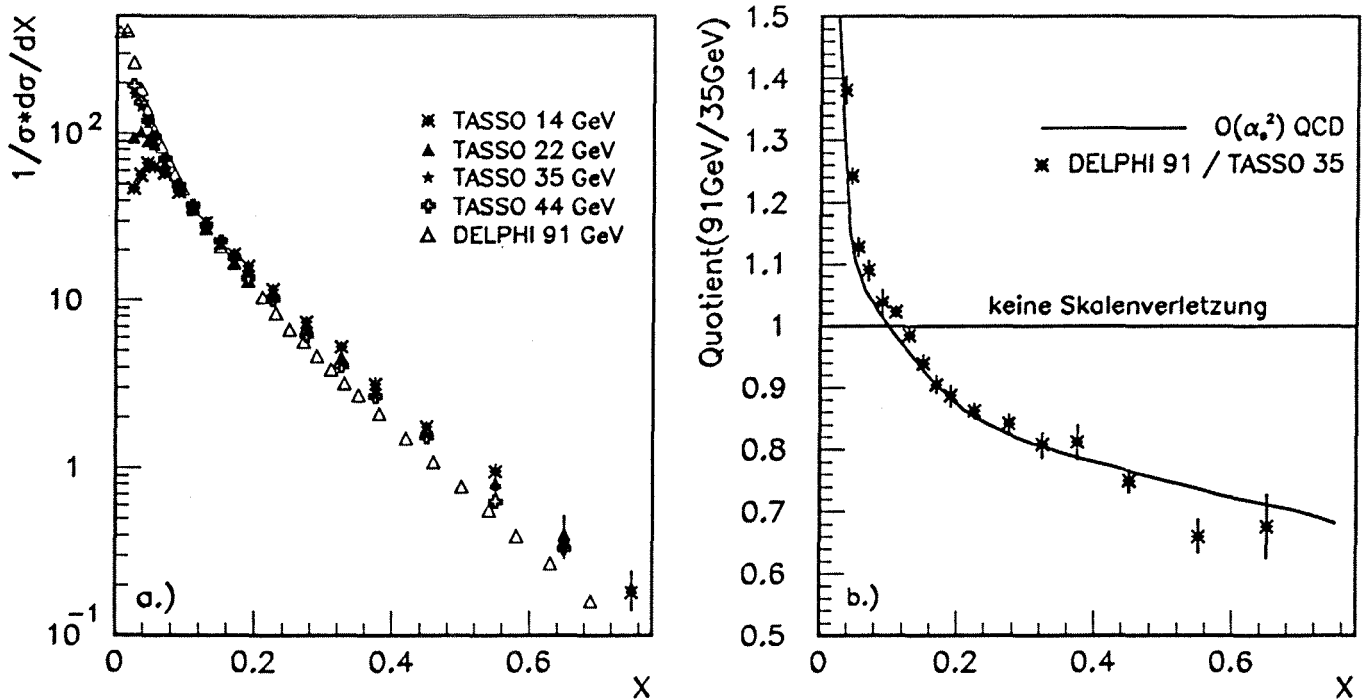


Abbildung 3.8: x -Verteilungen bei verschiedenen Energien.

Aus a.) sieht man, daß bei kleinen x die Daten hoher Energie (Delphi) über denen niedriger Energie (Tasso) liegen. Bei großen x ist es umgekehrt. Ohne die Daten des Delphi-Experiments ist die Skalenverletzung allerdings nicht signifikant, da die experimentellen Fehler zu groß sind.

In b.) ist das Verhältnis von $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ bei 91 GeV und 35 GeV aufgetragen. Auch hier ist die Skalenverletzung eindeutig sichtbar.

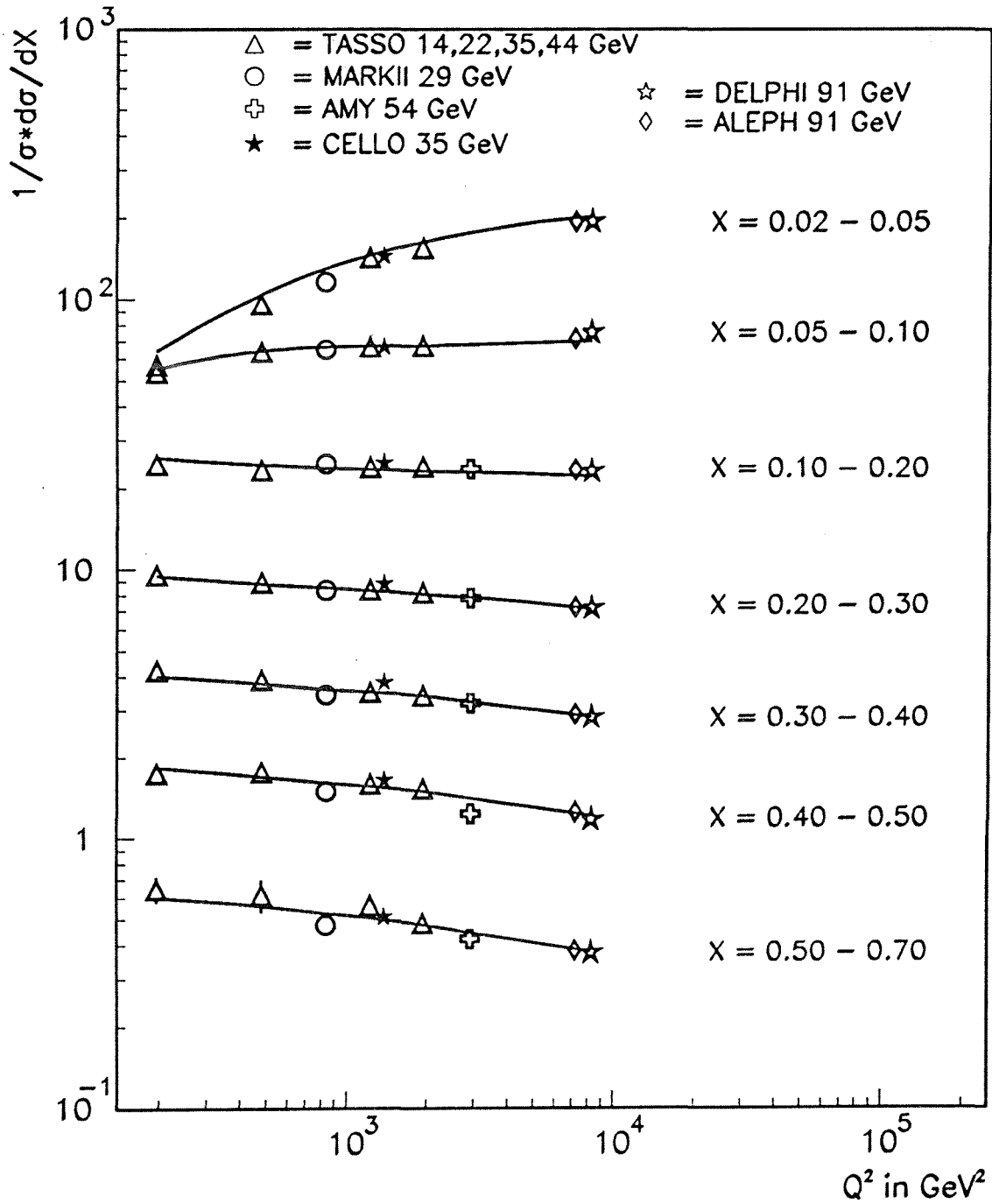


Abbildung 3.9: Skalenverletzung in der e^+e^- -Annihilation.
Es ist deutlich zu sehen, daß sich $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ mit der Energie ändert.

3.3 Die Altarelli-Parisi-Gleichungen

Die Energieabhängigkeit der in Kapitel 3.2 eingeführten Fragmentationsfunktionen $D(x, Q^2)$ wird durch die Altarelli-Parisi Entwicklungsgleichungen beschrieben. Diese Integro-Differentialgleichungen sehen wie folgt aus ([15], [16]):

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} D_i(x, Q^2) \\ D_G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{Gq} \\ 2 \sum_{i=1}^5 P_{qG} & P_{GG} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} D_i(x, Q^2) \\ D_G(x, Q^2) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Das Symbol $\otimes$ steht dabei für ein Faltungsintegral:

$$[P \otimes D](x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P(y) D\left(\frac{x}{y}, Q^2\right)$$

Neben den Fragmentationsfunktionen D_i , $i = d, u, s, c, b$ für die verschiedenen Quark-flavours und D_G für die Gluonen enthalten die Gleichungen (3.7) noch die Altarelli-Parisi Splitting-Funktionen P_{qq} , P_{Gq} , P_{qG} , P_{GG} und die laufende starke Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$.

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems ist es möglich, aus Anfangsfunktionen $D_i(x, Q_0^2)$ bei einer Referenzenergie Q_0 die Verteilungen bei jeder beliebigen Energie $Q > Q_0$ zu berechnen. Die Entwicklung zu höheren Energien wird hierdurch vollständig beschrieben und hängt außer von den Anfangsparametrisierungen, die für die $D_i(x, Q_0^2)$ gewählt werden, nur noch von $\alpha_s(Q^2)$ ab. Deshalb sollte es auch möglich sein, mit bekannten Verteilungen bei verschiedenen Energien $Q \geq Q_0$ die starke Kopplungskonstante α_s zu bestimmen.

Auf eine fundierte Herleitung des Gleichungssystems (3.7) wird in diesem Rahmen verzichtet (siehe dazu [16]). Jedoch soll im folgenden eine anschauliche Interpretation der Gleichungen gegeben werden, um das physikalische Verständnis zu erleichtern. Diese beschränkt sich dabei auf die 1.Ordnung.

Wir betrachten zunächst die Splitting-Funktionen $P_{ij}(y)$. Diese beschreiben die Wahrscheinlichkeit, ein Parton i mit Impulsanteil y von einem Elternparton j zu finden. Haben wir ein Parton j mit skaliertem Impuls x_j , so ist dies die Wahrscheinlichkeit, daß dieses in ein Parton i mit $x_i = y \cdot x_j$ übergeht. P_{qq} beschreibt den Übergang von q nach q , wobei die Impulsänderung durch Abstrahlung von einem Gluon zustande kommen kann. P_{Gq} steht für den Übergang von Quark zu Gluon und P_{qG} und P_{GG} für die Übergänge von Gluon zu Quark bzw. Gluon.

Berechnen kann man diese Funktionen durch Integration des exakten QCD-Matrix-Elements.

In erster Ordnung erhält man sie „einfach“ aus den fundamentalen Vertizes der Quantenchromodynamik:

P_{qq} und P_{Gq} aus $q \rightarrow q + G$, P_{qG} aus $G \rightarrow q + \bar{q}$ und P_{GG} aus $G \rightarrow G + G$.

Die Ergebnisse (1.Ordnung) sind für 5 Flavours [6]:

$$\begin{aligned} P_{qq}(x) &= \frac{4}{3} \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right)_+ + 2\delta(1-x) \\ P_{qG}(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + (1-x)^2) \\ P_{Gq}(x) &= \frac{4}{3} \left(\frac{1+(1-x)^2}{x} \right) \\ P_{GG}(x) &= 6 \left(\frac{1-x}{x} + x(1-x) + \left(\frac{x}{1-x} \right)_+ \right) + \frac{23}{6}\delta(1-x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei ist die Distribution $[F(x)]_+$ durch folgende Beziehung definiert:

$$\int_0^1 dx \varphi(x) [F(x)]_+ = \int_0^1 dx [\varphi(x) - \varphi(1)] F(x)$$

$\varphi(x)$ ist eine beliebige Testfunktion.

Mit dieser Interpretation der Splitting-Funktionen kann man die Altarelli-Parisi-Gleichungen anschaulich verstehen. Nehmen wir dazu die erste Gleichung aus (3.7):

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} D_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{qq} \otimes D_i + P_{Gq} \otimes D_G) \quad (3.9)$$

Auf der linken Seite steht die Änderung der Quarkfragmentationsfunktion mit der Energie. Diese Änderung kann (in 1.Ordnung) dadurch entstehen, daß das Quark ein Gluon abstrahlt, das dann in das Hadron h fragmentiert. Mathematisch behandelt wird dieser Fall gerade durch die Faltung von P_{Gq} mit D_G . Die andere Möglichkeit besteht darin, daß das Tochterquark in das Hadron h fragmentiert, was durch $P_{qq} \otimes D_i$ ausgedrückt wird. In Abbildung 3.10 ist Gleichung (3.9) graphisch dargestellt.

Analog kann man mit der zweite Gleichung aus (3.7) verfahren. Diese enthält bei D_{qG} eine Summe über die Quarkflavours und einen Faktor 2. Dadurch wird berücksichtigt, daß das Gluon in Quark-Antiquark-Paare aller Flavours aufspalten kann. Beachtet man, daß $Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} = \frac{\partial}{\partial t}$ mit $t = \ln Q^2$ gilt, so ist zu sehen, daß die Entwicklung logarithmisch mit der Energie verläuft. Dies zeigt die logarithmische Skalenverletzung, die durch die Altarelli-Parisi-Gleichungen beschrieben wird.

3. Skalenverletzung

$$\frac{d}{dt} \text{---} q \text{---} \bigcirc \text{---} h = \text{---} q \text{---} \text{---} G \text{---} \bigcirc \text{---} h + \text{---} q \text{---} \text{---} G \text{---} \bigcirc \text{---} h$$

$$\dot{D}_q \quad P_{qq} \otimes D_q \quad P_{Gq} \otimes D_G$$

Abbildung 3.10: Darstellung der ersten Altarelli-Parisi-Gleichung (1.Ordnung).

Oft werden die Gleichungen (3.7) anstatt mit den Quarkfragmentationsfunktionen D_i mit sogenannten Singletts und Nonsingletts formuliert. Unter einem Nonsinglett versteht man die Differenz zwischen einem D_{q_i} und D_{q_j} :

$$D_{\Delta,ij}(x, Q^2) = D_i(x, Q^2) - D_j(x, Q^2) \quad (3.10)$$

Dabei stehen i und j für beliebige Quark-(oder Antiquark-)flavours.

Durch die Differenz fällt der Gluonterm weg, und man erhält entkoppelte Differentialgleichungen:

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} D_{\Delta,ij}(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} (P_{qq}(x) \otimes D_{\Delta,ij}(x, Q^2)) \quad (3.11)$$

Der Rest wird mit Singletts formuliert, die man durch Aufsummieren der Fragmentationsfunktionen für alle Quarks und Antiquarks erhält:

$$D_{\Sigma}(x, Q^2) = \sum_{i=1}^{N_f} D_i(x, Q^2) + D_{\bar{i}}(x, Q^2) \quad (3.12)$$

Hier findet keine Entkoppelung statt. Man hat also ein System von Gleichungen:

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} D_{\Sigma}(x, Q^2) \\ D_G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & 2N_f P_{Gq} \\ P_{qG} & P_{GG} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} D_{\Sigma}(x, Q^2) \\ D_G(x, Q^2) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Die Formulierung mit Singletts und Nonsingletts hat den Vorteil, daß die Gleichungen zum Teil entkoppelt werden. Allerdings ergibt sich damit auch der Nachteil, daß nicht mehr die einzelnen Quarkflavours zugänglich sind, sondern nur irgendwelche Kombinationen.

Für die tiefinelastische Streuung (Kapitel 3.1) ergeben sich die gleichen Entwicklungsgleichungen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß P_{qG} und P_{Gq} in der Matrix der Splitting-Funktionen vertauscht sind [16]. Es gilt für den Singlettsektor:

$$\begin{pmatrix} P_{qq} & 2N_f P_{Gq} \\ P_{qG} & P_{GG} \end{pmatrix}_{\text{zeitartig}} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} P_{qq} & 2N_f P_{qG} \\ P_{Gq} & P_{GG} \end{pmatrix}_{\text{raumartig}}$$

Momente:

Da die Gleichungen (3.13) analytisch nicht gelöst werden können, ist es in einigen Fällen besser, sie zu transformieren. Dadurch erhält man ein Gleichungssystem für die Momente, die wie folgt definiert sind:

$$\text{n-tes Moment: } \langle D_i(Q^2) \rangle_n = \int_0^1 dx x^{n-1} D_i(x, Q^2) \quad (3.14)$$

Diese Momente erfüllen die transformierten Gleichungen:

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \langle D_{\Delta_{ij}}(Q^2) \rangle_n = -\alpha_s(Q^2) \gamma_{qq}^n \langle D_{\Delta_{ij}}(Q^2) \rangle_n \quad (3.15)$$

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \langle D_\Sigma(Q^2) \rangle_n \\ \langle D_G(Q^2) \rangle_n \end{pmatrix} = -\alpha_s(Q^2) \begin{pmatrix} \gamma_{qq}^n & 2N_f \gamma_{Gq}^n \\ \gamma_{qG}^n & \gamma_{GG}^n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \langle D_\Sigma(Q^2) \rangle_n \\ \langle D_G(Q^2) \rangle_n \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Dabei ist (3.15) die Gleichung der Nonsingletts, (3.16) beschreibt den Singlettanteil. Anstatt der Splitting-Funktionen P_{ij} treten hier die anomalen Dimensionen γ_{ij}^n auf:

$$-\gamma_{ij}^n = \int_0^1 dx x^{n-1} P_{ij}(x)$$

Diese sind bis zur 2.Ordnung berechnet ([18],[19], [20]). Durch die Transformation ist das System von Integro-Differentialgleichungen nun in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen übergegangen. Ein solches System kann auch analytisch gelöst werden, wodurch man einfache Beziehungen für die Momente erhält, in denen die Anfangsbedingungen — nämlich die Momente bei der Referenzenergie Q_0 — explizit vorkommen [21]. Aus den Momenten kann man dann Informationen über die Fragmentationsfunktion durch inverse Mellin-Transformation erhalten ([22],[23]). Dies ist allerdings wegen der Kompliziertheit nur in 1.Ordnung sinnvoll. Eine andere, auch noch in 2.Ordnung anwendbare Möglichkeit zur Verwendung der Momente besteht im Entwickeln der Fragmentationsfunktionen nach Orthogonalpolynomen. In den Koeffizienten treten dabei die Momente auf (Genauerer dazu in Kapitel 3.4.3).

Aufgrund der heute zur Verfügung stehenden Rechner haben die Momente an Bedeutung verloren. Die analytisch nicht lösbaren Gleichungen werden meist numerisch mit hoher Genauigkeit ausgewertet.

3.4 Bestimmung von α_s aus der Skalenverletzung

Die Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung wurde schon vor einigen Jahren dazu verwendet, den Wert von α_s zu messen. Diese α_s -Bestimmungen sind die bisher präzisesten. Aus der Streuung von Myonen an Protonen ermittelte die BCDMS-Kollaboration $\alpha_s(M_Z^2) = 0.113 \pm 0.005$ [14].

Es liegt nun nahe, α_s auch aus der Skalenverletzung in der Fragmentationsfunktion, d.h. aus e^+e^- -Experimenten, zu bestimmen. Bevor in Kapitel 5 eine solche α_s -Bestimmung vorgestellt wird, soll hier anhand von drei Methoden skizziert werden, wie aus der Skalenverletzung bei der e^+e^- -Annihilation Information über α_s gewonnen werden kann.

Die Energien der bei der Analyse verwendeten Experimente (siehe Kapitel 4.1) sind weit größer als 10 GeV. Deshalb ist es, im Gegensatz zur tiefinelastischen Streuung, nicht nötig, die im Niederenergiebereich wichtigen „higher-twist“-Beiträge zu berücksichtigen [6].

3.4.1 Numerische Anpassung der Altarelli-Parisi-Gleichungen

Da die Entwicklung der Fragmentationsfunktionen mit der Energie, beschrieben durch die Altarelli-Parisi-Gleichungen (3.7), explizit von $\alpha_s(Q^2)$ abhängt, ist es naheliegend, diesen Parameter direkt aus den Gleichungen zu bestimmen.

Dazu benötigt man zunächst gemessene Impulsverteilungen — d.h. Fragmentationsfunktionen — bei unterschiedlichen Energien Q_i . Außerdem muß eine Anfangsparametrisierung für die Quark- und Gluonfragmentationsfunktion D_i bzw. D_G bei einer Energie Q_0 angesetzt werden. Dies ist erforderlich, da im Experiment nur die Summe (3.6) gemessen werden kann, nicht aber die Anteile der einzelnen Quarkflavours und der Gluonen, die in den Entwicklungsgleichungen benötigt werden. Die laufende Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$ wird durch den Ausdruck (2.8) (Seite 13) ersetzt, der Λ als freien Parameter enthält.

Von der Startenergie Q_0 ausgehend, können nun die Fragmentationsfunktionen durch schrittweise numerische Auswertung der Altarelli-Parisi-Gleichungen zu den verschiedenen Q_i entwickelt werden. Mit den Ergebnissen wird dann die mit den Daten vergleichbare Summe (3.6) bestimmt. Da die Entwicklung von Λ und der Anfangsparametrisierung abhängt, kann man diese so anpassen, daß die experimentellen Ergebnisse möglichst gut beschrieben werden. Genaueres zu solchen Fitprozeduren wird in Kapitel 5 erläutert.

Diese Methode zur α_s -Bestimmung bringt zwei Probleme mit sich:

- Die unbekannte Anfangsparametrisierung muß sinnvoll gewählt werden.
- Eventuell gibt es aufgrund der Anfangsparametrisierung viele freie Parameter in der Fitprozedur.

In einer Studie wurden nach [15] Startparametrisierungen der Form

$$xD(x) = a(1-x)^b$$

gewählt, wobei für u-, d- und s-Quark die gleiche Funktion angenommen wird:

$$\begin{aligned} xD_i(x) &= a(1-x)^b && \text{für u-, d-, s-Quarks} \\ xD_c(x) &= c(1-x)^d && \text{für c-Quarks} \\ xD_b(x) &= e(1-x)^f && \text{für b-Quarks} \\ xD_G(x) &= g(1-x)^h && \text{für Gluonen} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Altarelli-Parisi-Gleichungen wurden in 1.Ordnung verwendet, d.h. $\alpha_s(Q^2)$ und die P_{ij} gehen jeweils in 1.Ordnung ein. Die 8 Parameter aus (3.17) und Λ wurden mit Hilfe des Programmpakets MINUIT [32] und von [15] an die Daten der 6 Experimente aus Kapitel 4.1 angepaßt. Es zeigte sich, daß die gewählte Parametrisierung eine gute Beschreibung der Daten erlaubt. Die resultierenden Parameter für eine Startenergie von 14 GeV lauten:

$$\begin{aligned} a &= 1.46 && b = 1.62 \\ c &= 10.73 && d = 3.81 \\ e &= 14.72 && f = 7.56 \\ g &= 7.82 && h = 1.07 \\ \Lambda &= 514 \text{ MeV (1.Ordnung)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Größe χ^2 , die ein Maß für die Abweichung der theoretischen Entwicklung von den Daten darstellt, ergab sich hierbei zu $\chi^2 = 75.0$. Dies bedeutet pro Kanal:

$$\frac{\chi^2}{\text{Kanal}} = 1.06$$

Außerdem ergaben sich bei der Anpassung noch folgende Ergebnisse:

- Es ist nötig, für die schweren c- und b-Quarks eine andere Funktion als für die leichten Quarks zu benutzen. Bei Verwendung der gleichen Funktion ist eine gute Beschreibung der Daten nicht mehr möglich.
- Die Korrelationen zwischen den Startparametern der verschiedenen Startfunktionen sind relativ gering. Allerdings ist Λ mit den Anfangsparametern teilweise sehr stark korreliert.

3. Skalenverletzung

- Der Fehler von Λ ist aufgrund der starken Korrelationen ziemlich groß.

Um α_s aus den Altarelli-Parisi-Gleichungen bestimmen zu können, müßte man diese in 2.Ordnung (d.h. mit „next to leading order“-Korrekturen) verwenden. Die Studie zeigte, daß der Polynomansatz (3.17) für die Startparametrisierung sinnvoll ist und die schweren Quarks extra berücksichtigt werden müssen.

3.4.2 Verwendung des QCD-Matrix-Elements 2.Ordnung

Neben den Entwicklungsgleichungen kann auch direkt das exakte QCD-Matrix-Element zur Beschreibung der Q^2 -Abhängigkeit der Fragmentationsfunktionen und damit zur α_s -Bestimmung herangezogen werden. Da die Splitting-Funktionen P_{ij} in (3.7) durch Integration des Matrix-Elements berechnet werden, sind die beiden Methoden vom Prinzip her äquivalent.

Der Hauptunterschied besteht darin, daß man bei der numerischen Lösung der Altarelli-Parisi-Gleichungen die Möglichkeit hat, kleine Schritte zu verwenden. Dabei kann in jedem Schritt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein Gluon abgestrahlt werden, was einer Summe über alle Terme höherer Ordnung der Form $\alpha_s^n \ln^n Q^2$ entspricht. Diese treten als führende Terme in der Ordnung n auf. Bei der Integration des QCD-Matrix-Elements in 2.Ordnung können hingegen maximal 2 Gluonen abgestrahlt werden. Somit kann ein Unterschied in den höheren Ordnungen auftreten.

In unserem Fall erwarten wir keinen allzu großen Unterschied der beiden Methoden, da die relative Energieänderung nicht sehr groß ist. Die Entwicklung 2.Ordnung und die exponierte Form der obigen logarithmischen Terme unterscheiden sich deshalb kaum.

Im Rahmen der Studie von Kapitel 3.4.1 wurde auch der Einfluß der Schrittzahl auf die Entwicklung (d.h. auf die Skalenverletzung) getestet. Eine Erhöhung von 2 auf 20 Schritte ergab Änderungen von weniger als 5%. α_s nimmt nur leicht mit der Schrittzahl ab. Auch dieser Sachverhalt zeigt, daß der Unterschied zwischen Altarelli-Parisi-Entwicklung und Matrix-Element in 2.Ordnung gering ist.

Für die α_s -Bestimmung wurde in dieser Arbeit die Methode mit dem Matrix-Element 2.Ordnung verwendet, da diese einige Vorteile mit sich bringt. Es wird keine unbekannte Startparametrisierung gebraucht, und man hat für die Fitprozedur weniger freie Parameter. Außerdem sind im dabei verwendeten Monte-Carlo Generator die Anteile der verschiedenen Flavours — d.h. die Gewichte $W_i(Q^2)$ aus (3.6) — automatisch nach elektroschwacher Theorie bei jeder Energie richtig eingebaut.

3.4.3 Entwicklung der Fragmentationsfunktionen nach Orthogonalpolynomen, Momente

Diese dritte Methode knüpft an die analytische Lösung der Altarelli-Parisi-Gleichungen mit Hilfe der Momente an ([33] für die tiefinelastische Streuung und [17] für die e^+e^- -Annihilation). Dabei wird zunächst die Fragmentationsfunktion $D(x, Q^2)$ nach einem Satz von Orthogonalpolynomen entwickelt.

Orthogonalpolynome werden mit einer Gewichtsfunktion $w(x)$ und folgender Relation definiert:

$$\int_0^1 dx w(x) \Theta_k(x) \Theta_l(x) = \delta_{kl} \quad (3.19)$$

Dabei ist Θ_i ein Orthogonalpolynom vom Grad i . Diese Θ_i können mit Hilfe von Determinanten aus der Gewichtsfunktion konstruiert werden [34].

Die Entwicklung von $D(x, Q^2)$ lautet:

$$D(x, Q^2) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(Q^2) \Theta_k(x) \quad (3.20)$$

Wegen (3.19) gilt für die Entwicklungskoeffizienten $a_k(Q^2)$:

$$a_k(Q^2) = \int_0^1 dx D(x, Q^2) \Theta_k(x)$$

Schreibt man nun das Polynom Θ_k als

$$\Theta_k(x) = \sum_{j=0}^k c_j^{(k)} x^j, \quad ,$$

so folgt:

$$a_k(Q^2) = \sum_{j=0}^k c_j^{(k)} \langle D(Q^2) \rangle_{j+1} \quad (3.21)$$

Hierin tritt gerade das $j+1$ -te Moment der Fragmentationsfunktion auf:

$$\langle D(Q^2) \rangle_{j+1} = \int_0^1 dx x^j D(x, Q^2)$$

Wir erhalten also folgende Entwicklung von $D(x, Q^2)$ mit den Momenten der Fragmentationsfunktion:

$$D(x, Q^2) = w(x) \sum_{k=0}^{N_{max}} \Theta_k(x) \sum_{j=0}^k c_j^{(k)} \langle D(Q^2) \rangle_{j+1} \quad (3.22)$$

3. Skalenverletzung

Um die Funktion $D(x, Q^2)$ exakt zu entwickeln, müßte man die erste Summe in (3.22) bis ∞ fortführen. Wählt man die Gewichtsfunktion $w(x)$ aber möglichst geschickt, nämlich so, daß sie grob die Form der x -Abhängigkeit von D wiedergibt, so reichen in der Entwicklung wenige Summanden aus, um eine gute Näherung zu erhalten. Es zeigt sich, daß $N_{max} \geq 7$ zu vernünftigen Ergebnissen führt [17].

Besitzt man eine Anfangsparametrisierung der Nonsingletts und Singletts bei einer Referenzenergie Q_0 , so kann man die Gleichungen (3.15) und (3.16) analytisch lösen und damit die in (3.22) benötigten Momente berechnen.

Die Rechnung ergibt ([18],[19],[20]):

$$\langle D_\Delta(Q^2) \rangle_n = \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{d_{NS}^n} \langle D_\Delta(Q_0^2) \rangle_n \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \langle D_\Sigma(Q^2) \rangle_n &= \left[(1 - \alpha_n) \langle D_\Sigma(Q_0^2) \rangle_n - \varepsilon_n \langle D_G(Q_0^2) \rangle_n \right] \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{d_+^n} H_{+\Psi}^n(Q^2, Q_0^2) \\ &+ \left[\alpha_n \langle D_\Sigma(Q_0^2) \rangle_n + \varepsilon_n \langle D_G(Q_0^2) \rangle_n \right] \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{d_-^n} H_{-\Psi}^n(Q^2, Q_0^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \langle D_G(Q^2) \rangle_n &= \left[\alpha_n \langle D_G(Q_0^2) \rangle_n - \overline{\alpha}_n \langle D_\Sigma(Q_0^2) \rangle_n \right] \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{d_+^n} H_{+G}^n(Q^2, Q_0^2) \\ &+ \left[(1 - \alpha_n) \langle D_G(Q_0^2) \rangle_n + \overline{\alpha}_n \langle D_\Sigma(Q_0^2) \rangle_n \right] \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{d_-^n} H_{-G}^n(Q^2, Q_0^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Koeffizienten α_n , $\overline{\alpha}_n$, ε_n , die $d_{\pm|NS}^n$ und die Funktionen $H_{\pm\Psi|G}^n(Q^2, Q_0^2)$ sind in [35] aufgeführt.

Man sieht, daß die analytischen Lösungen für die Momente, aus denen mit Hilfe der Entwicklung (3.22) die Fragmentationsfunktionen bestimmt werden können, außer von den Startparametern nur noch von $\alpha_s(Q^2)$, d.h. von Λ , abhängen. Es ist also wie bei der ersten Methode auch hier möglich, durch eine Anpassung an die Daten bei verschiedenen Energien Λ und die Anfangsparameter zu bestimmen. Allerdings hat man hier das gleiche Problem wie in 3.4.1. Aufgrund der unbekannten Anfangsparametrisierung enthält die Fitprozedur viele freie Parameter. Hinzu kommt noch die ebenfalls nicht bekannte Gewichtsfunktion $w(x)$, die auch parametrisiert werden muß.

Letzteres Problem läßt sich umgehen, indem man nicht die Fragmentationsfunktionen entwickelt, sondern direkt Momente mit Hilfe von (3.23), (3.24) und (3.25) an die Momente der experimentellen Verteilungen anpaßt. Dann beinhaltet die Prozedur nur Λ und die Anfangsparameter als freie Parameter.

Kapitel 4

Experimentelle Daten

4.1 Die Experimente

Obwohl die Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung schon vor einigen Jahren zur Bestimmung von α_s benutzt wurde, gab es bisher noch keine entsprechende Analyse für e^+e^- -Experimente. Es war bisher nämlich nur schwer möglich, α_s aus der Skalenverletzung bei der e^+e^- -Annihilation zu bestimmen. Im Gegensatz zur inelastischen Streuung, wo man aus einem Experiment viele verschiedene Energiewerte erhält, findet die e^+e^- -Reaktion bei konstanter Energie statt. Es ist folglich nötig, verschiedene Experimente mit unterschiedlicher e^+e^- -Energie zu kombinieren. Dabei müssen die Abstände der verschiedenen Energien groß genug sein, damit eine außerhalb der Fehler liegende, signifikante Skalenverletzung beobachtet werden kann. Diese Bedingung wurde bisher nicht erfüllt.

Vom Speicherring PETRA liegen präzise Daten bei $Q = 35$ GeV vor. Bei allen anderen PETRA-Energien (14, 22 und 44 GeV), sowie am TRISTAN ($Q = 54$ GeV) ist die Statistik nicht groß genug. Deshalb überdeckten bisher Fehler die Skalenverletzung (Abbildung 3.8a auf Seite 28). Seit 1989 läuft der Speicherring LEP am CERN in Genf bei der Energie zur resonanten Erzeugung des Z^0 -Bosons, d.h. bei ca. 91 GeV. Diese Maschine ermöglicht die Messung von Daten bei deutlich höherer Energie als bisher. Deshalb bewirkt LEP eine deutliche Verbreiterung des durch Experimente zugänglichen Energiebereichs. Außerdem sind aufgrund der hohen Statistik die Fehler relativ gering, so daß man einen zweiten sehr präzisen Datensatz erhält. Unter Berücksichtigung der Daten von LEP ist eine signifikante Skalenverletzung zu sehen (Abbildungen 3.8).

Für die folgende Analyse wurden 6 Experimente von 4 Speicherringen zwischen 29 GeV und 91 GeV verwendet. Sie sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Experiment	Speicherring	Ort	Energie
DELPHI	LEP	CERN/Genf	91 GeV
ALEPH	LEP	CERN/Genf	91 GeV
AMY	TRISTAN	KEK/Tsukuba	54 GeV
CELLO	PETRA	DESY/Hamburg	35 GeV
TASSO	PETRA	DESY/Hamburg	35 GeV
MARK II	PEP	SLAC/Stanford	29 GeV

Tabelle 4.1: Die für die Analyse verwendeten Experimente.

Der Aufbau eines e^+e^- -Detektors, sowie die Datenkorrektur des inklusiven Impulsspektrums $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ auf Detektoreffekte wird in den folgenden Abschnitten am Beispiel des DELPHI-Experiments erläutert. Das Grundprinzip ist bei den anderen Experimenten ähnlich.

4.2 Das DELPHI-Experiment

Der DELPHI-Detektor (= DETektor with Lepton, Photon and Hadron Identification) ist einer der 4 Großdetektoren am e^+e^- -Speicherring LEP¹ am CERN² in Genf.

4.2.1 Der LEP-Speicherring

Der e^+e^- -Speicherring LEP wurde in den Jahren 1982 bis 1989 gebaut und am 14. 7. 1989 in Betrieb genommen. Er ermöglicht Präzisionsmessungen für die Parameter der starken und elektroschwachen Wechselwirkung. Mit etwa 27 km Umfang ist LEP der größte bisher konstruierte Speicherring. In der ersten Ausbaustufe werden Schwerpunktsenergien im Bereich der Z^0 -Masse (91.2 GeV) erreicht. Mit diesen ist es möglich, reelle Z^0 -Bosonen zu erzeugen und viele wichtige Parameter des Standardmodells zu messen. Die mittlere Luminosität betrug 1990 $\mathcal{L} = 3 \cdot 10^{30} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. In einer weiteren Stufe sollen Energien bis ca. 200 GeV möglich werden, um die Voraussetzungen für die W^+W^- -Paarproduktion zu schaffen.

Bevor die Elektronen und Positronen mit einer Energie von ca. 20 GeV in den Speicherring eingespeist werden, müssen sie verschiedene Beschleunigungsvorstufen durchlaufen.

¹Large Electron Positron collider

²Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire

Im Ring werden sie dann weiter beschleunigt, bis sie bei einer Schwerpunktsenergie von 91.2 GeV in 8 Wechselwirkungspunkten zur Kollision gebracht werden. Vier dieser Wechselwirkungszone sind mit den universellen Detektoren ALEPH, DELPHI, L3 und OPAL bestückt.

4.2.2 Übersicht über den DELPHI-Detektor

Der DELPHI-Detektor wurde in einer Kollaboration von ca. 500 Physikern von 39 Instituten aus 18 Staaten entworfen und gebaut. Mit diesem 4π -Detektor soll auch bei komplexen Ereignissen Teilchenidentifizierung, hohe dreidimensionale Auflösung und präzise Vertex-Bestimmung ermöglicht werden. Im folgenden wird nur eine kurze Übersicht über das Gerät gegeben. Eine ausführliche Beschreibung ist in [24] zu finden.

Der Detektor besteht aus einem zylindrischen Zentralbereich, dem Barrel, an den sich zwei Endkappen (end caps) anschließen. Die verschiedenen Detektorkomponenten haben unterschiedliche Aufgaben:

- Impulsmessung geladener Teilchen
Diese geschieht im wesentlichen in den Spurdetektoren, von denen die TPC³ der wichtigste ist.
- Energiemessung
Diese wird in Kalorimetern durchgeführt. Die HPC⁴ ist das zentrale elektromagnetische Kalorimeter, für Hadronen gibt es das Hadronkalorimeter.
- Geschwindigkeitsmessung in Cherenkov-Zählern
- Teilchenidentifikation
Dazu wird die Information aus verschiedenen Detektorkomponenten kombiniert.

Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 4.3 zu sehen.

Für unsere Analyse ist nur die Impulsmessung an geladenen Spuren von Bedeutung. Die dafür nötigen Komponenten sind die Spurdetektoren und die supraleitende Spule. Die Spurkammern ermöglichen im Zentralbereich durch Kombinieren verschiedener Informationen eine Impulsauflösung $\frac{dp}{p}$ um 4.5%⁵ für geladene Teilchen. Diese Auflösung wird mit zunehmender Größe des zu messenden Impulses schlechter.

³Time Projection Chamber

⁴High Density Projection Chamber

⁵für Teilchen von 46 GeV

4. Experimentelle Daten

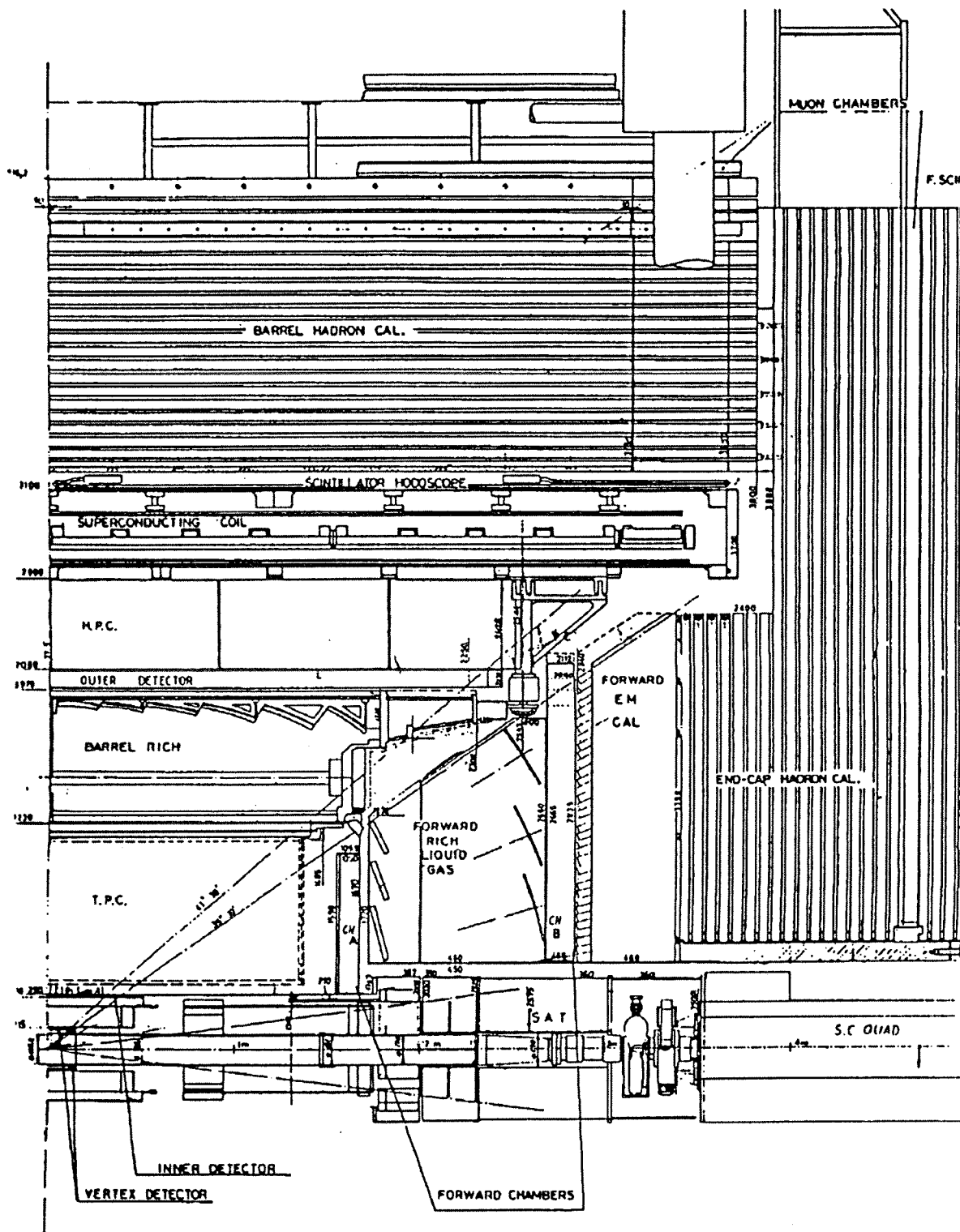


Abbildung 4.1: Der DELPHI-Detektor im Längsschnitt.

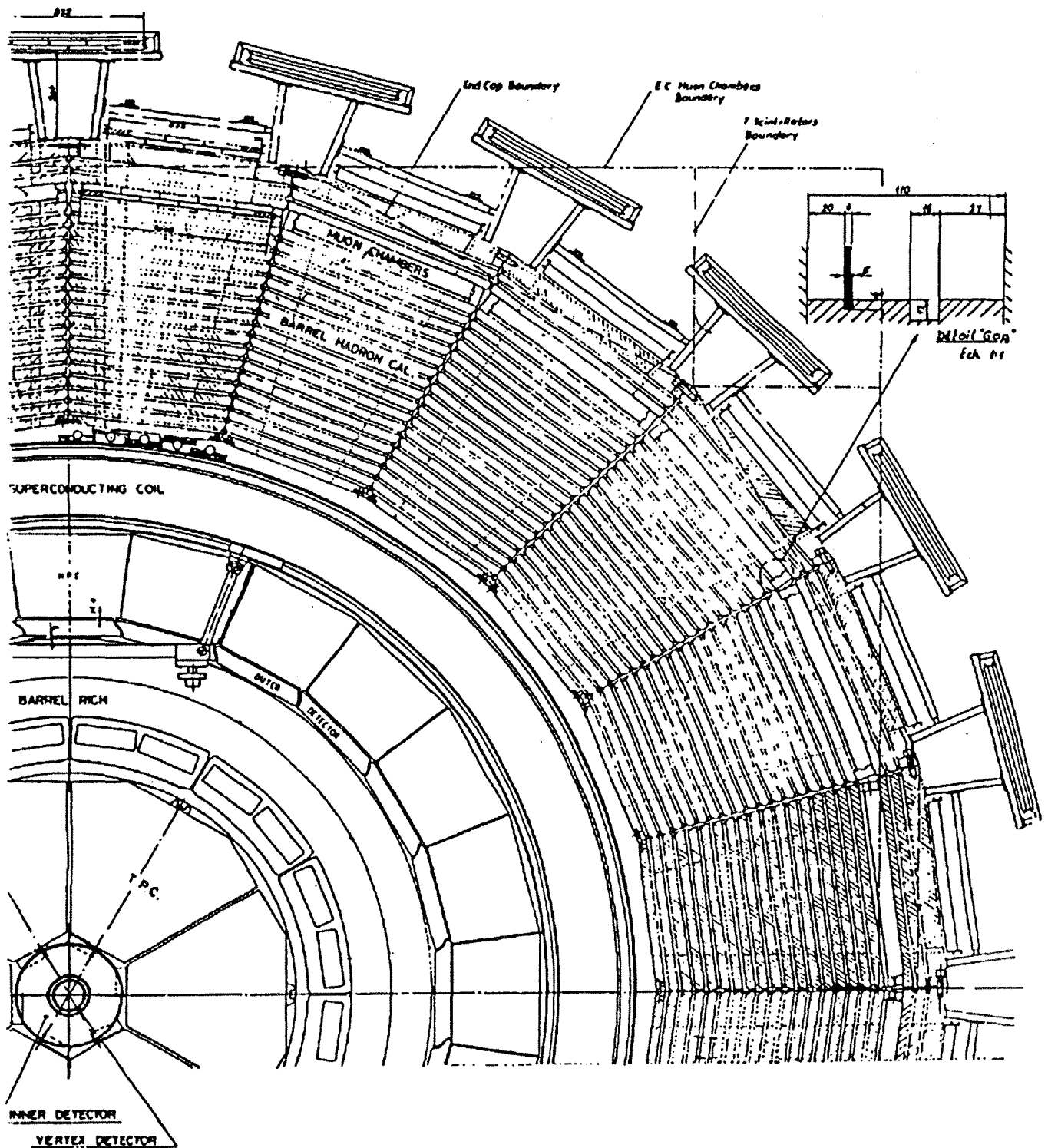


Abbildung 4.2: Der DELPHI-Detektor im Querschnitt.

4. Experimentelle Daten

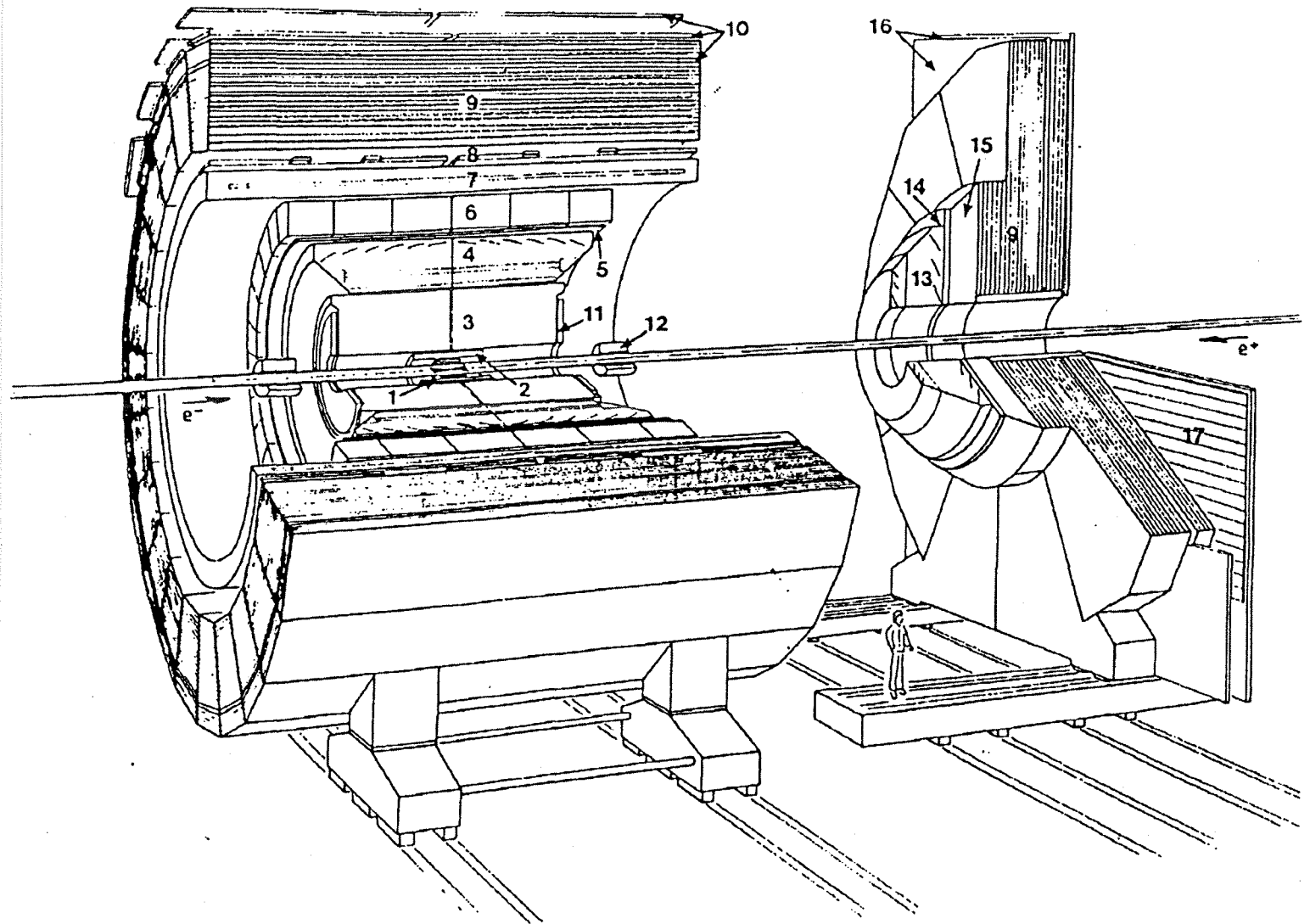


Abbildung 4.3: Perspektivische Aufrißzeichnung des DELPHI-Detektors.

1=Vertex-Detektor, 2=Inner-Detektor, 3=TPC, 4=Barrel-RICH, 5=Outer-Detektor, 6=HPC, 7=supraleitende Spule, 8=TOF, 9=Hadronkalorimeter, 10=Myonkammern, 11=FCA, 12=SAT, 13=Forward-RICH, 14=FCB, 15=FEMC, 16=Forward-Myonkammern, 17=Forward-Szintillatoren

4.2.3 Die supraleitende Spule

Zur Impulsmessung wird grundsätzlich ein Magnetfeld benötigt, das bei DELPHI mit einer supraleitenden Spule erzeugt wird, die die Spurdetektoren umschließt. Ihre axiale Länge beträgt 7.4 m und ihr innerer Durchmesser 5.2 m. Sie wird mit flüssigem Helium auf eine Temperatur von 4.5 K gekühlt. Damit kann bei einem Strom von bis zu 5000 A eine Feldstärke von ca. 1.2 T erreicht werden. Messungen in der TPC ergaben ein Feld von $1.2334^{+0.0001}_{-0.0010}$ T in longitudinaler Richtung. Durch das Magnetfeld werden die zu messenden geladenen Teilchen in den Spurdetektoren abgelenkt. Aus der Krümmung der Spur kann der Impuls berechnet werden.

4.2.4 Die DELPHI-Spurdetektoren

Vertex-Detektor (VD)

Der Vertex-Detektor schließt sich direkt an das Strahlrohr an. In der Konfiguration von 1991 besteht er aus zwei konzentrischen Lagen von Silizium-Micro-Strip Detektoren im Abstand von 9 und 11 cm. Diese überdecken die zentrale Region auf einer Länge von 24 cm. Im Jahr 1992 wurde eine weitere Lage bei $r = 8$ cm hinzugefügt. Durch Überlappung der einzelnen Module um 10% wird eine vollständige Abdeckung in ϕ erreicht.

Mit dem Vertex-Detektor ist es möglich, die $r\phi$ -Koordinaten geladener Teilchen sehr genau zu bestimmen. Für eine präzise Bestimmung von Sekundärvertices wird eine Ortsauflösung von ca. $5\ \mu\text{m}$ benötigt. Dabei sollten zwei Spuren noch bei Abständen $\leq 100\ \mu\text{m}$ getrennt werden können.

Bis 1991 betrug die Auflösung in $r\phi$ ca. $14\ \mu\text{m}$. Mit der zusätzlichen Lage wurde 1992 ein Wert von $8\ \mu\text{m}$ erreicht. Dabei wurde die Gesamtzahl der Auslesekanäle von 54424 auf 73000 erhöht.

Inner-Detektor (ID)

An den Vertex-Detektor anschließend, befindet sich der Inner-Detektor, der weitere Information für die Vertexrekonstruktion liefert und als Trigger auf geladene Spuren dient. In Abbildung 4.4 sind die beiden Teile des Inner-Detektors zu sehen. Eine innere Jetkammer und fünf Lagen Proportionalkammern. Erstere besteht aus 24 Sektoren mit je 24 Drähten und liefert eine Ortsauflösung pro Draht von $110\ \mu\text{m}$. Das elektrische Feld variiert mit r zwischen 1 und 2 kV, damit sich eine Driftgeschwindigkeit proportional zu r ergibt. Dadurch wird ein schneller Trigger auf geladene Spuren möglich.

4. Experimentelle Daten

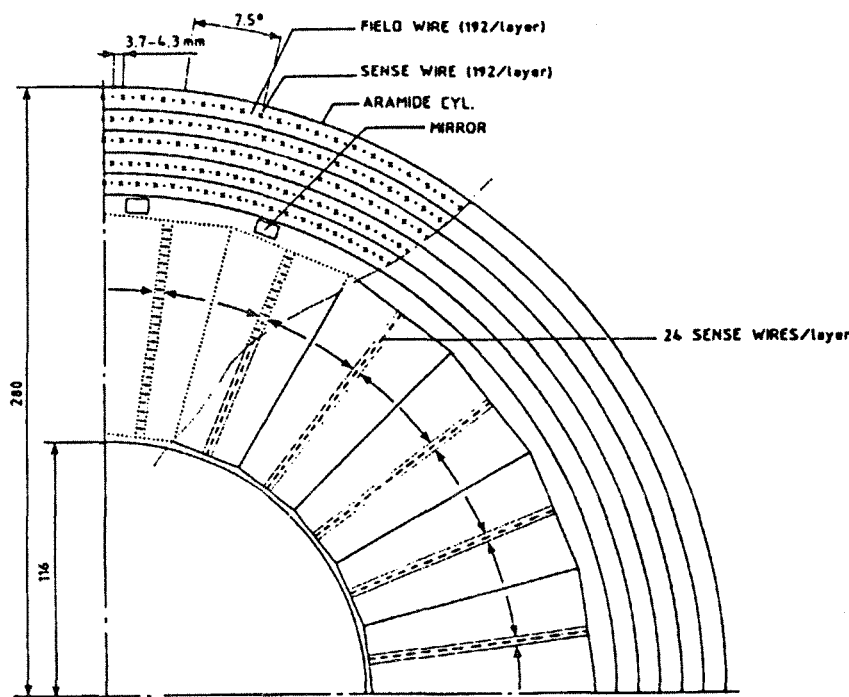


Abbildung 4.4: Querschnitt durch den Inner-Detektor.

Die Proportionalkammern, ein wesentlicher Bestandteil des Spurtriggers, messen außer der $r\phi$ - auch die z -Koordinate der Teilchen und liefern zusätzliche Ortsinformationen.

Zeit-Projektionskammer (TPC)

Die TPC (=Time Projection Chamber) ist die zentrale Spurkammer des DELPHI-Experiments und erstreckt sich bei einer Länge von 2×150 cm von $r = 28$ cm bis $r = 122$ cm. Mit ihrer Information beginnt normalerweise die Mustererkennung zur Spurrekonstruktion, da sie ausgedehnte Spurelemente liefern kann. Die beiden separaten Hälften, aus denen die TPC besteht, werden von Endplatten, die aus jeweils sechs Sektoren aufgebaut sind, ausgelesen. Jeder dieser Sektoren enthält 192 Anodendrähte und 16 kreisförmig angeordnete Kathodenreihen. Dringt ein Teilchen in die mit einem Gasgemisch aus Ar und CH_4 (80%/20%) gefüllte Kammer ein, so verursacht es Ionisationsladungen. Aufgrund des magnetischen Feldes ergeben sich für geladene Teilchen gekrümmte Spuren. Das zum $\vec{B}$ -Feld parallele elektrische Feld sorgt dafür, daß die Ionisationsladungen durch das Gas zu den Endplatten driften. Dort werden die Signale über schnelle Analog-Digital Wandler (FADC's) ausgelesen. Die Ortsauflösung der TPC liegt bei 180-280 μm in der $r\phi$ -Koordinate und

unter $900\ \mu\text{m}$ in der z -Koordinate. Die Trennung zweier Spuren ist ab $1.5\ \text{cm}$ Abstand möglich. Aus den Pulshöhen der Anodendrähte kann außerdem die spezifische Ionisation $\frac{dE}{dx}$ bestimmt werden, die zur Teilchenidentifikation beiträgt.

Outer-Detektor (OD) und Vorwärtskammern

Aufgrund der limitierten Größe der TPC wurden zur Verbesserung der Impulsauflösung weitere Spurdetektoren installiert.

Direkt auf dem die TPC umgebenden Barrel-RICH (s.u.) sitzt der aus 24 Modulen bestehende Outer-Detektor. Außer weiterem Aufschluß über den Impuls liefert er auch schnelle Triggerinformation in $r\phi$ und z . Jedes seiner $4.7\ \text{m}$ langen Module besteht aus 145 Driftkammern in 5 Lagen. Durch Überlappung (siehe Abbildung 4.5) wird dabei eine Abdeckung des ganzen Azimuthalbereichs erreicht.

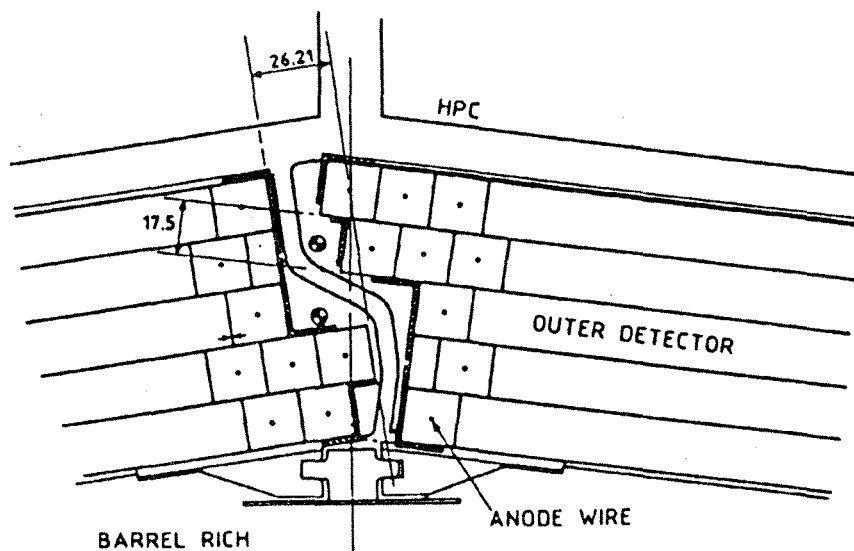


Abbildung 4.5: Anordnung der Module im Outer-Detektor.

Durch den Outer-Detektor ist man in der Lage, die Impulsauflösung spürbar zu verbessern (für schnelle Teilchen bis zu einem Faktor 5). Außerdem ist es möglich, die Ladung einer Spur bis zu höchsten Impulsen allein aus dem Spurelement des OD zu bestimmen.

Zur Auflösungsverbesserung im Vorwärtsbereich dienen zwei weitere Driftkammerpakete: die Vorwärtskammern A und B (FCA bzw. FCB). Sie ermöglichen außerdem noch eine genauere Extrapolation der Spuren in den im Vorwärtsbereich installierten Cherenkov-Zähler.

4.2.5 Weitere DELPHI-Detektorkomponenten

Es werden nun noch einige zentrale Detektorkomponenten angesprochen, die keine entscheidende Rolle bei der Impulsbestimmung spielen.

Elektromagnetische Kalorimeter

Die High Density Projection Chamber (HPC) ist mit einem Radius von 2.5 m und einer Länge von 5 m eines der größten elektromagnetischen Kalorimeter überhaupt. Sie liegt um das Innere des Zentralbereichs innerhalb des Magnetfelds der supraleitenden Spule. Mit Hilfe des Zeit-Projektions-Prinzips können in ihr die dreidimensionalen Ladungsverteilungen eines elektromagnetischen Schauers und von geladenen Hadronen mit hoher Auflösung in allen Koordinaten gemessen werden. Die 144 Module, aus denen die HPC besteht, sind in 6 Ringen mit je 24 Segmenten angeordnet. Dabei wird ein Winkelbereich von $\theta = 43^\circ$ bis $\theta = 137^\circ$ erfaßt. Jedes Modul enthält 41 Lagen Blei als Absorbermaterial. Das verwendete Gas ist das gleiche wie in der TPC: 80% Argon und 20% Methan.

Zur Messung der Ladungsverteilung wird mit einem Spannungsgefälle ein longitudinales Driftfeld erzeugt. Durch dieses werden die Ionisationsladungen von Schauern und Spuren auf eine Proportionaldrahtebene am Modulende geleitet.

Die HPC enthält außerdem noch Szintillationszähler für den schnellen Trigger.

Im Vorwärtsbereich des Detektors sitzt mit dem FEMC⁶ ein weiteres elektromagnetisches Kalorimeter, durch das vor allem gute räumliche Auflösung und gute Energieauflösung erreicht werden soll.

Ringabbildende Cherenkov-Zähler (RICH)

Die RICH⁷-Detektoren sollen zur Identifizierung von Hadronen über einen großen Bereich des Impulsspektrums dienen. Dazu wird der Cherenkovwinkel sowohl in Gas als auch in flüssigem Medium rekonstruiert. Es gibt einen RICH für den Zentralbereich (Barrel-RICH) und einen für den Vorwärtsbereich (Forward-RICH). Diese unterscheiden sich durch ihren Aufbau.

Die Flugzeitzähler (TOF)

Die Flugzeitzähler (TOF=Time of Flight counter) sind Szintillationszähler, die außerhalb der Spule angebracht sind. Sie dienen u.a. dazu, durch Vergleich des

⁶Forward Electromagnetic Calorimeter

⁷Ring Imaging CHerenkov counter

Wechselwirkungszeitpunkts mit den gemessenen Flugzeiten zwischen Untergrund und Experiment zu unterscheiden.

4.3 Ereignisselektion und Detektorkorrektur

Ein Detektor liefert über das Auslesesystem vielfältige Informationen. Aus diesen werden zunächst mit verschiedenen Programmen die Ereignisse rekonstruiert. Um daraus Daten für die Analyse zu erhalten, werden die brauchbaren Ereignisse ausgewählt und anschließend korrigiert. Diese Schritte werden ebenfalls am Beispiel des DELPHI-Experiments erläutert.

Bei der Ereignisselektion geht es darum, die guten multihadronischen Ereignisse herauszusuchen. Die genauen Selektionskriterien sind in [25] nachzulesen.

Es werden zunächst nur geladene Spuren, die bestimmten Bedingungen genügen, beibehalten. Für die Teilchen werden ein minimaler Impuls und eine Mindestspurlänge gefordert. Außerdem müssen sie in einem bestimmten Polarwinkelbereich auftreten. Die ausgewählten Spuren werden bei der anschließenden Selektion verwendet. Ein gutes hadronisches Ereignis muß dabei folgende Kriterien erfüllen:

- mindestens 5 geladene Spuren mit Impuls über $0.2 \frac{\text{GeV}}{c}$
- jede der beiden Hemisphären $\cos \theta < 0$ und $\cos \theta > 0$ enthält eine „geladene Energie“ $E_{ch} = \sum E_i$ (E_i sind die Energien der Teilchen), die größer als 3 GeV ist
- die gesamte „geladene Energie“ beider Hemisphären ist größer als 15 GeV
- der Polarwinkel θ der Spherizitäts-Achse ist in einem Bereich von $40^\circ < \theta < 140^\circ$

Diese multihadronischen Ereignisse müssen noch auf Detektoreffekte, Schnitte durch die Selektion und Strahlungseffekte korrigiert werden. Dazu werden simulierte Ereignisse (Monte-Carlo Ereignisse) verwendet. Mit einem Monte-Carlo Generator wird die e^+e^- -Annihilation mit anschließender Fragmentation in Hadronen simuliert. Man erhält das inklusive geladene Impulsspektrum auf „Generatorniveau“, d.h. ohne Detektoreffekte u.ä. Das Programmpaket DELSIM⁸ dient der vollständigen Simulation der Ereignisse im DELPHI-Detektor. Dabei wird der gesamte Weg der entstandenen Teilchen verfolgt, und die resultierenden Sekundärereignisse, wie Ionisation, Schauerbildung, Streuung in den einzelnen Detektorkomponenten usw., werden simuliert. Man erhält „künstliche Detektordaten“.

⁸DELPHI event generation and detector simulation

4. Experimentelle Daten

Mit diesen beiden Monte-Carlo Spektren werden die Daten für das Impulsspektrum korrigiert. Der Korrekturfaktor ist definiert als

$$c^{(i)} = \frac{N_{gen}^{(i)}}{N_{sim}^{(i)}}$$

Hierbei steht $N_{gen}^{(i)}$ für den Eintrag im i -ten Kanal des Histogramms auf „Generatortniveau“ und $N_{sim}^{(i)}$ für den Eintrag bei der vollständigen Detektorsimulation. Der Verlauf des Korrekturfaktors in Abhängigkeit von x ist in Abbildung 4.6 zu sehen. Man erkennt, daß die Korrekturen bis $x = 0.75$ unter 30% liegen. Bei größeren x weichen sie sehr stark von 1 ab, da dort die Impulsmeßfehler größer sind und eine Verschmierung verursachen.

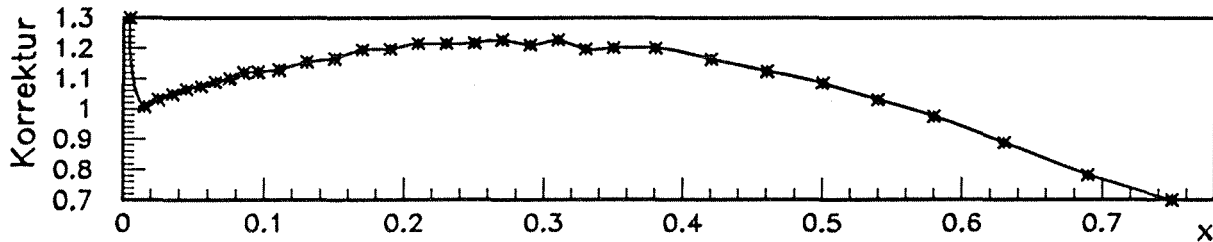


Abbildung 4.6: Der Korrekturfaktor für das Impulsspektrum bei DELPHI.

Aus den selektierten Daten erhält man korrigierte Daten durch Multiplikation:

$$N_{korr}^{(i)} = c^{(i)} N_{Dat}^{(i)}$$

$N_{korr}^{(i)}$ ist der Eintrag im i -ten Kanal des korrigierten Histogramms. Wird in den folgenden Kapiteln von Daten gesprochen, so sind immer diese korrigierten Daten gemeint.

Die (korrigierten) Werte des inklusiven geladenen Impulsspektrums bei DELPHI sind in Tabelle A.1 im Anhang A unter Daten zusammengefaßt. Die Tabellen A.2 bis A.6 enthalten analog dazu die Daten der anderen verwendeten Experimente. Entnommen wurden diese folgenden Quellen: [26],[27],[28],[29],[30],[31].

Kapitel 5

Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

Mit Hilfe des QCD-Matrix-Elements 2.Ordnung und der Daten von 6 Experimenten wurde die Kopplungskonstante α_s durch die Skalenverletzung bestimmt. Diese Analyse soll im folgenden genauer erläutert werden.

5.1 Der Monte-Carlo Generator und die zugehörigen Parameter

Um mit dem Matrix-Element die beobachtbare Verteilung (3.5) (Seite 25) zu erhalten, muß dieses zunächst integriert werden. Daran anschließend erfolgt die Fragmentation der Partonen zu Hadronen. Beide Schritte wurden in der Analyse mit dem Monte-Carlo Generator JETSET 7.3 ([36],[37]) durchgeführt. Das in Lund (Schweden) entwickelte Programm simuliert die vollständige e^+e^- -Annihilation zu Hadronen.

Dabei werden im wesentlichen die in Kapitel 2.5 beschriebenen 4 Phasen des Prozesses $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen verwendet. In einige dieser Unterprozesse gehen verschiedene Parameter ein, die an die experimentell bestimmten Daten angepaßt werden müssen.

Phase I

Die Bildung eines $q\bar{q}$ -Paares erfolgt im Generator nach der elektroschwachen Theorie. Damit ist gewährleistet, daß die Flavourzusammensetzung bei jeder beliebigen Energie stimmt. Die Gewichte $W_i(Q^2)$ aus (3.6) werden somit automatisch richtig berücksichtigt.

Phase II

Für den störungstheoretischen Teil wird das Matrix-Element in 2.Ordnung nach Ellis, Ross und Terano (ERT-Matrix-Element) [8] verwendet. Dieses ist in der Parametrisierung nach Zhu ([37],[38]) für verschiedene y -Parameter (s.u.) im Generator enthalten. Wird die Parametrisierung für ein y außerhalb dieses Bereichs benötigt, so kann sie problemlos extrapoliert werden. Nicht explizit enthaltene Zwischenwerte erhält man durch lineare Interpolation.

Der Schnittparameter y

Bei Verwendung des Matrix-Elements wird ein Auflösungskriterium benötigt, um 2-, 3- und 4-Partonereignisse zu trennen. Dies kann die invariante Masse

$$m_{ij} = 2E_i E_j (1 - \cos \theta_{ij})$$

zweier Partonen i und j sein, wobei E für die Energien und θ_{ij} für den Winkel zwischen den Teilchen steht. Eine andere Möglichkeit ist der Parameter

$$y_{ij} = \frac{m_{ij}^2}{s} \quad \text{mit} \quad s = Q^2 \quad (5.1)$$

Dieser entspricht dem skalierten Quadrat von m_{ij} .

Bei letzterem, in der Analyse benutztem Kriterium werden zwei Partonen zu einem zusammengefaßt, falls ihr y_{ij} unter einem vorgegebenen Minimum y liegt. Dies bedeutet, daß z.B. ein partonisches 4-Jetereignis mit einem weichen Gluon (dann gilt $y_{ij} < y$) in ein 3-Jetereignis übergeht. Hätte man dieses Auflösungskriterium nicht, würden bei einem Matrix-Element 2.Ordnung ausschließlich 4 Partonen erzeugt werden. Durch den Schnitt vermeidet man Divergenzen, die durch weiche oder kollinear abgestrahlte Gluonen entstehen. Falls der Schnitt zu niedrig angesetzt wird (bei 91 GeV: $y < 0.01$), werden in einigen Phasenraumbereichen die 2- und 3-Jetwirkungsquerschnitte negativ. Deshalb ist es im Monte-Carlo Generator nicht möglich, mit $y = 0$ zu arbeiten. In die Analyse geht folglich der Schnittparameter y ein.

Da wir gleichzeitig verschiedene Energien zwischen 29 GeV und 91 GeV verwenden, muß gewährleistet sein, daß der Schnitt nicht die Partonendzustände unterschiedlicher Energie verschieden beeinflusst. Dies geschieht durch Verwendung der gleichen minimalen invarianten Masse M bei jeder Energie. Da $y = \frac{M^2}{s}$ mit dem Energiequadrat s skaliert, muß y für jedes Experiment so gewählt werden, daß $y \cdot s$ überall gleich ist. Dann haben wir eine konstante Jetauflösung.

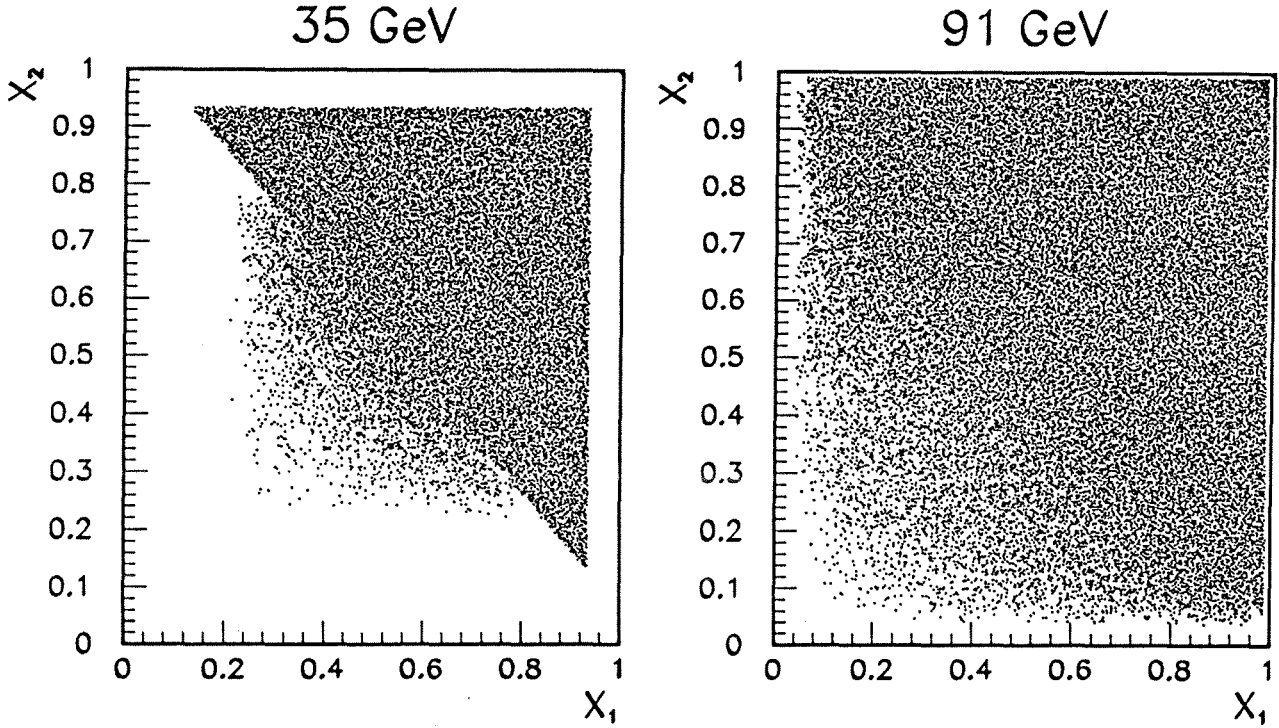


Abbildung 5.1: Der Phasenraum für Ereignisse mit Gluonabstrahlung in der x_1 - x_2 -Ebene bei 35 GeV und 91 GeV. Der Schnitt in y verursacht die leeren Bänder nahe $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$.

Aus Abbildung 5.1 wird deutlich, daß der Schnitt in y einen bestimmten Bereich des Phasenraums selektiert. Aufgetragen sind die Ereignisse in der x_1 - x_2 -Ebene, wobei x_1 und x_2 für die Impulsanteile der beiden Quarks stehen. Aufgrund der unterschiedlichen y -Werte (konstante Jetauflösung) wird bei 35 GeV ein breiteres Band in der Nähe von $x_1 = 1$ bzw. $x_2 = 1$ weggeschnitten als bei 91 GeV.

Renormalisierungsfaktor f

Ein weiterer in den störungstheoretischen Bereich eingehender Parameter ist der Renormalisierungsfaktor f , der durch die Unkenntnis der höheren Ordnungen erforderlich wird (Kapitel 2.3).

Durch ihn versucht man, den Einfluß der Korrekturen höherer Ordnung auf die 3- und 4-Jetrate zu minimieren, indem eine neue Q^2 -Skala bei der α_s -Auswertung gewählt wird. Statt $\alpha_s(Q^2)$ wird $\alpha_s(fQ^2)$ bei der Berechnung der Jetraten verwendet.

Der Renormalisierungsfaktor ändert also die Kopplung an den QCD-Vertizes (Abbildung 5.2) und beeinflusst deshalb den Partonenzustand.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

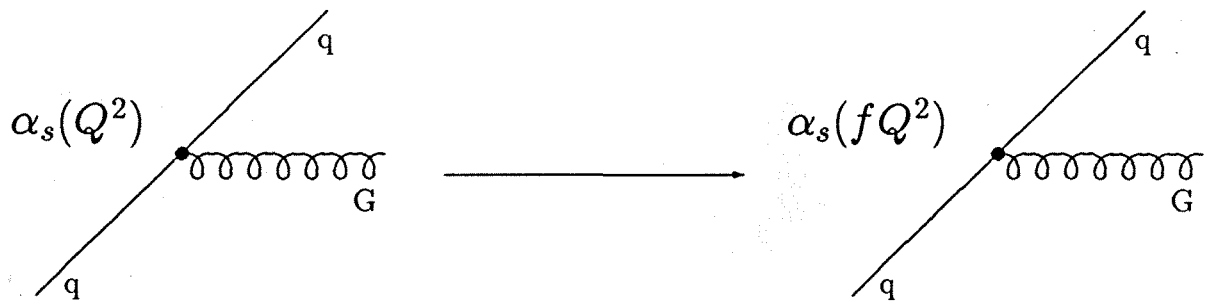


Abbildung 5.2: Der Renormalisierungsfaktor f ändert den Wert von α_s an den QCD-Vertizes.

Skalenparameter Λ

In das Matrix-Element direkt geht der Skalenparameter Λ aus der Entwicklung für $\alpha_s(Q^2)$ (Gleichung 2.8, Seite 13) ein, den wir in der Analyse bestimmen wollen. Er wäre von dem Renormalisierungsfaktor f unabhängig, wenn alle Korrekturen höherer Ordnung bekannt wären. Dies ist aber nicht der Fall, und es ist zu erwarten, daß f und y Einfluß auf den Wert von Λ haben, da beide Parameter wie Λ den Partonenzustand vor der Fragmentation beeinflussen.

Wir haben also neben dem zu bestimmenden Λ noch zwei weitere Parameter y und f in Phase II, die berücksichtigt werden müssen.

Phase III

Im nichtstörungstheoretischen Teil wird das in Kapitel 2.5 kurz erwähnte Modell der String-Fragmentation [37] verwendet, weil dieses, abgesehen von der Tatsache, daß es das bisher erfolgreichste Modell zur Datenbeschreibung ist, einige zusätzliche Vorteile mit sich bringt.

Da Quarks und Gluonen vom gleichen String mit gleichen Parametern beschrieben werden, hat man nur wenige freie Parameter. Außerdem sind Infrarotdivergenzen in diesem Modell kein Problem, weil weiche Gluonen automatisch im String „absorbiert“ werden. Sie führen nur zu einer Änderung des Transversalimpulses im Feldschlauch, aber nicht zu eigenen Jets. Schließlich werden auch Quarkmasseneffekte im String-Modell berücksichtigt.

In die Fragmentationsphase geht eine Skalenfunktion¹ ein, die angibt, welchen Anteil z

¹Wird oft ebenfalls Fragmentationsfunktion genannt. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird hier aber nur der Begriff Skalenfunktion verwendet.

an Energie und Longitudinalimpuls des Partons ein gebildetes Hadron erhält. Für leichte Quarks — d.h. u-, d- und s-Quarks — wird hierfür die symmetrische Lundfunktion benutzt [39]:

$$f(z) = \frac{(1-z)^a}{z} e^{\frac{-bm^2}{z}} \quad \text{mit} \quad z = \frac{(E+p_l)_h}{(E+p_l)_p} \quad (5.2)$$

In (5.2) steht $m_\perp$ für die transversale Masse des Hadrons und ist als quadratische Summe aus Masse und Transversalimpuls definiert:

$$m_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}$$

Die symmetrische Lundfunktion enthält zwei freie Parameter a und b , die für alle drei Quarkflavours gleich sind. Da $f(z)$ hauptsächlich von der Differenz $a - b$ abhängt, sind die beiden Parameter stark korreliert. Es reicht deshalb aus, nur einen Parameter frei zu lassen, indem man b auf einen sinnvollen Wert fixiert und im weiteren Analyseverlauf nur noch a variiert.

Die schweren c- und b-Quarks fragmentieren deutlich härter als die leichten Quarks, da aufgrund der Trägheit sehr viel Impuls auf das energiereichste Hadron übertragen wird. Man kann dies kinematisch dadurch erklären, daß die Aufnahme eines leichten Quarks oder Antiquarks aus dem Vakuum zur Hadronbildung den Impuls des schweren Quarks nur wenig ändert. Das entstandene Hadron hat folglich fast den gleichen Impuls wie das schwere Quark, und z ist somit nahe bei 1. Aus den Übergangsamplituden folgt die Peterson-Funktion, die als Skalenfunktion für c- und b-Quarks verwendet wird [40]:

$$f(z) = \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z} - \frac{\epsilon_Q}{1-z})^2} \quad \text{mit} \quad z = \frac{(E+p_l)_h}{(E+p_l)_p} \quad (5.3)$$

In diese Funktion geht nur ein flavourabhängiger Parameter ϵ_Q ein.

Man hat mit ϵ_c (für c-Quarks) und ϵ_b (für b-Quarks) wieder zwei freie Parameter. Allerdings verhalten sich diese umgekehrt wie die Massenquadrate der zugehörigen Quarks:

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_b} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Quarkmassen nicht eindeutig definiert sind. Hier wird (nach [40])

$$\frac{\epsilon_c}{\epsilon_b} = 9.375$$

verwendet. Es verbleibt auch für die schweren Quarks nur ein freier Parameter.

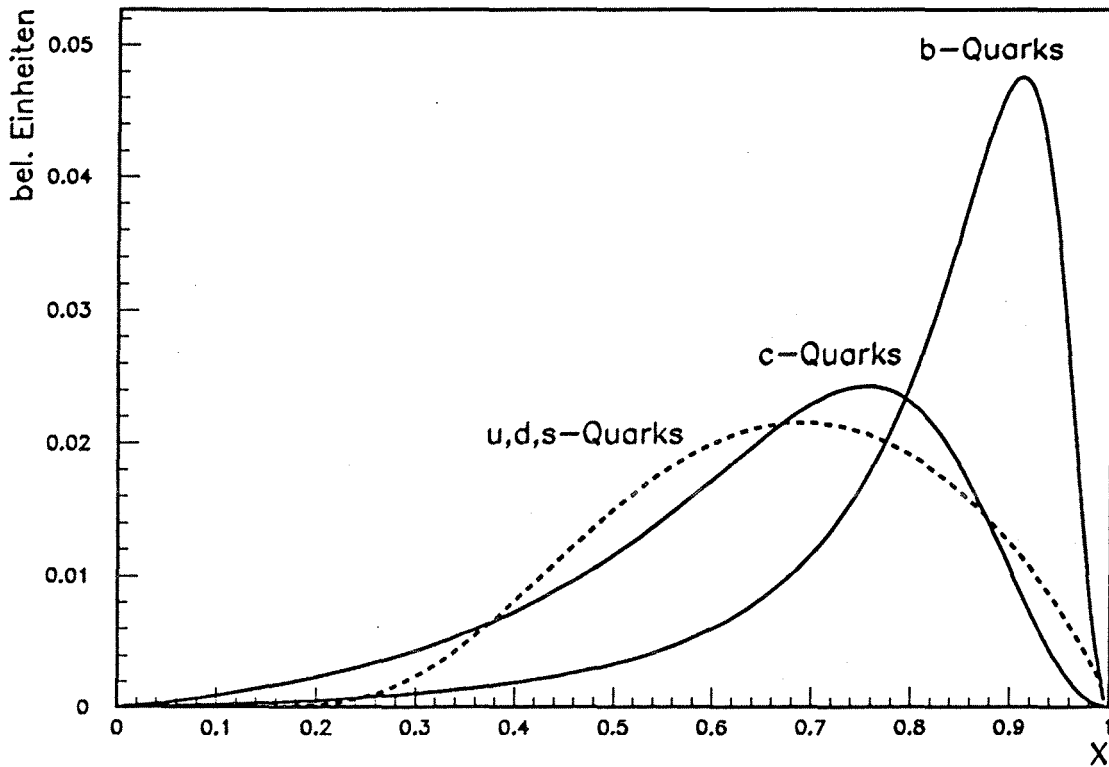


Abbildung 5.3: Die verschiedenen Skalenfunktionen.

Für die leichten Quarks ist die symmetrische Lundfunktion aufgetragen, für c- und b-Quarks die härtere Peterson-Funktion.

Der Verlauf der symmetrischen Lundfunktion und der Peterson-Funktion ist in Abbildung 5.3 zu sehen.

In Phase III sind also zwei freie Parameter a und ϵ_b zu berücksichtigen, die zusammen mit Λ an die Daten angepaßt werden müssen und einen entsprechenden Einfluß auf das zu bestimmende Λ haben können. Außerdem wird hier ein bestimmtes Fragmentationsmodell für die Analyse gewählt.

Phase IV und weitere Parameter

Die Zerfälle der instabilen Hadronen werden im Monte-Carlo Generator nach elektroschwacher und starker Theorie simuliert.

Neben den bisher angesprochenen Parametern gibt es noch weitere, die aber die Analyse nicht beeinflussen. Diese wurden auf übliche Werte fixiert. Sie sind u.a. ein Energieschnittparameter E_{Schnitt} , der angibt, unterhalb welcher Energieschwelle die Fragmentation stoppt, und Parameter, die die Wahrscheinlichkeit angeben, daß ein

in der Fragmentation gebildetes Meson Spin 1 hat.

Neben den oben angesprochenen longitudinalen Skalenfunktionen gibt es auch eine Funktion, die die transversale Impulsverteilung der gebildeten Hadronen beschreibt. Diese ist durch eine Gaußfunktion parametrisiert, deren Varianz (d.h. Breite) mit dem Parameter p_T^2 verändert werden kann.

5.2 Die numerische Anpassung der Parameter

5.2.1 Grundlegendes zur Fitprozedur

Die $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ -Spektren werden mit dem Generator unter Benutzung des QCD-Matrix-Elements 2.Ordnung und des String-Fragmentationsmodells für die benötigten Energien erzeugt. Dabei ist zu beachten, daß der Schnittparameter y jeweils so gewählt werden muß, daß $M^2 = y \cdot s$ konstant ist. Alle anderen Parameter sind energieunabhängig, da angenommen wird, daß der ganze Fragmentationsprozeß nicht von s abhängt.

Das uns interessierende Λ und die anderen Parameter kann man durch die Tatsache bestimmen, daß mit den richtigen Werten die Daten möglichst exakt reproduziert werden müssen. Dazu werden die im Monte-Carlo Generator erzeugten Verteilungen $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ für alle Energien gleichzeitig an die Daten numerisch angepaßt. Dies geschieht im Rahmen einer Fitprozedur, in der eine Größe χ^2 minimiert wird, die den Unterschied beider Verteilungen charakterisiert.

Schnitt in x :

Aus zwei Gründen ist es notwendig, noch einen Schnitt in $x = \frac{2p^h}{E_{CM}}$ durchzuführen. Das Matrix-Element liefert bei sehr kleinen x -Werten keine richtige Beschreibung mehr, da durch den nötigen Schnitt in y_{ij} alle Partonen mit sehr kleinem Impuls wegfallen. Dies erkennt man deutlich aus den Impulsspektren der Partonen vor der Fragmentation (Abbildung 5.4). Insbesondere fehlen bei niedrigeren Energien (d.h. höherem y) Partonen im Bereich kleiner x . Durch die String-Fragmentation wird dieser Effekt bei den Hadronen zwar teilweise kompensiert, aber dennoch sollten kleine x -Werte nicht berücksichtigt werden, um saubere Ergebnisse zu erhalten. Der zweite Grund für einen x -Schnitt liegt in den Fehlern der Daten. Der Korrekturfaktor weicht bei sehr großen x stark von 1 ab, d.h. die Messung großer Impulse ist aufgrund von Detektoreffekten ungenau. Da außerdem die Statistik dieser Kanäle sehr gering ist, ist es empfehlenswert, auch sehr große x wegzuschneiden. In der Fitprozedur wurde ein x -Bereich $0.18 \leq x \leq 0.8$ verwendet und anschließend die Beeinflussung der Ergebnisse durch diesen Schnitt untersucht.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

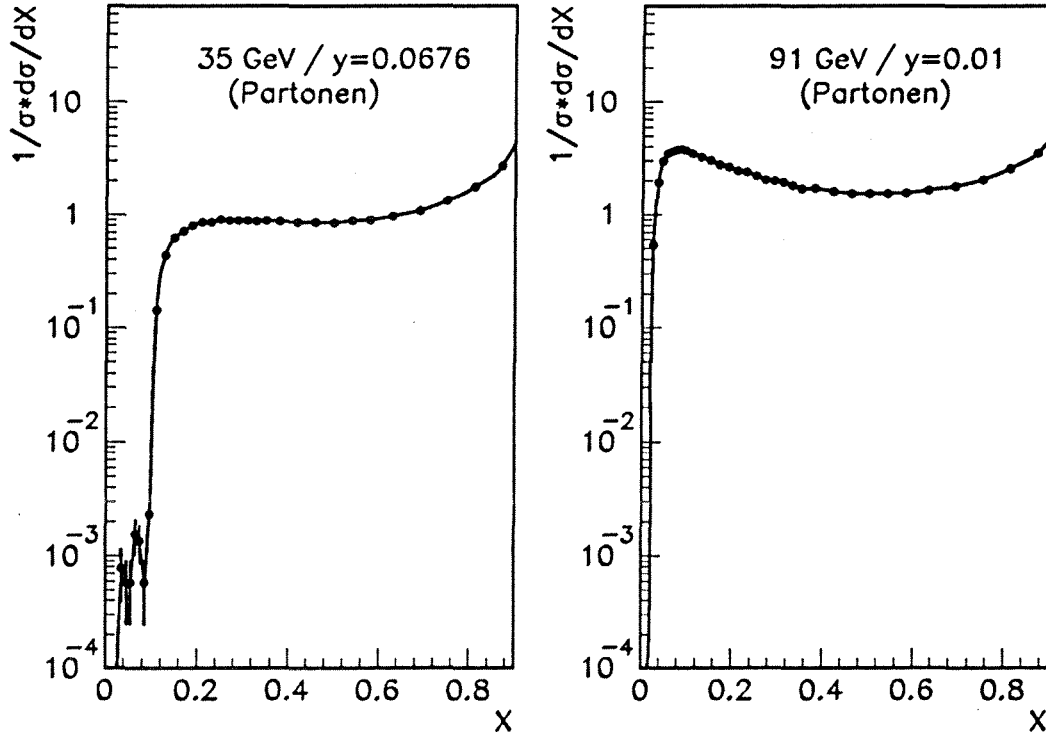


Abbildung 5.4: Die Impulsverteilungen bei den Partonen vor der Fragmentation für 35 und 91 GeV. Deutlich sichtbar ist das Fehlen der Partonen mit kleinem x vor allem bei 35 GeV.

Berücksichtigung der Fehler der Experimente:

Bei der Anpassung müssen außerdem die Fehler aus den Experimenten berücksichtigt werden. Neben den statistischen und kanalspezifischen systematischen Fehlern gibt es noch einen globalen Normalisierungsfehler. Dieser entsteht durch die Unsicherheit in der geladenen Multiplizität nach der Detektorsimulation, die sich auf den Korrekturfaktor niederschlägt. Da das Integral über die x -Verteilung gerade die geladene Multiplizität ergeben muß, besitzt jedes Experiment einen Normalisierungsfehler.

Die kanalspezifischen systematischen Fehler können im wesentlichen durch unterschiedliche Schnitte und Modelle in den Monte-Carlo Simulationen zur Datenkorrektur bestimmt werden.

Für das DELPHI-Experiment ändert sich der Korrekturfaktor hierbei im mittleren x -Bereich um 3%, an den Rändern aber bis zu 10% [26]. Der relative kanalspezifische systematische Fehler wurde wie folgt definiert:

$$\delta_{k_{sys}}^{(i)} = \max(0.03, 0.1 \cdot |1 - c^i|) \quad (5.4)$$

$c^{(i)}$ ist hierbei der Korrekturfaktor des i -ten Kanals. Mit

$$\sigma_{k_{sys}}^{(i)} = \delta_{k_{sys}}^{(i)} \cdot N^{(i)} \quad , \quad (5.5)$$

wobei $N^{(i)}$ für den Histogrammeintrag im i -ten Kanal steht, ergibt sich der kanalspezifische systematische Fehler. Ebenso ist der statistische Fehler $\sigma_{stat}^{(i)}$ kanalabhängig. Dazu kommt noch der relative globale Normalisierungsfehler δ_N , der in der Fitprozedur eine andere Berücksichtigung erfährt. Bei manchen Experimenten wird dieser mit dem kanalspezifischen systematischen Fehler zu einem gesamten systematischen Fehler zusammengefaßt:

$$\sigma_{sys}^{(i)} = \sqrt{\sigma_{k_{sys}}^{(i)2} + \sigma_N^{(i)2}} \quad , \text{wobei} \quad \sigma_N^{(i)} = \delta_N \cdot N^{(i)} \quad (5.6)$$

Den gesamten experimentellen Fehler erhält man dann als

$$\sigma_{exp}^{(i)} = \sqrt{\sigma_{stat}^{(i)2} + \sigma_{sys}^{(i)2}} = \sqrt{\sigma_{stat}^{(i)2} + \sigma_{k_{sys}}^{(i)2} + \sigma_N^{(i)2}} \quad (5.7)$$

Die Fehler $\sigma_{exp}^{(i)}$ bzw. $\sigma_{stat}^{(i)}$ und $\sigma_{sys}^{(i)}$ sind für die einzelnen Experimente in den Tabellen A.1 bis A.6 aufgelistet.

Leider ist die Behandlung der systematischen Fehler, insbesondere die Trennung zwischen kanalspezifischem Fehler und Normalisierungsfehler, keineswegs für alle Experimente gleich. Um trotzdem eine einheitliche Berücksichtigung in der Fitprozedur zu erhalten, wurde folgendermaßen verfahren:

Der gesamte experimentelle Fehler σ_{exp} , der bei allen Experimenten bekannt ist, wurde in einen kanalspezifischen Anteil, der auch den statistischen Fehler enthält, und in einen Normalisierungsanteil aufgespalten:

$$\sigma_{exp}^2 = \sigma_k^2 + \sigma_N^2 \quad (5.8)$$

Dazu wurde ein relativer Normalisierungsfehler δ_N angenommen und σ_k berechnet als

$$\sigma_k^{(i)} = \max \left(0.03 \cdot N^{(i)}, \sqrt{\sigma_{exp}^{(i)2} - \sigma_N^{(i)2}} \right) \quad (5.9)$$

Die Maximumbildung gewährleistet, daß $\delta_k^{(i)} \geq 0.03 = \delta_k^{min}$ gilt, d.h. daß der kanalspezifische Fehler nie 3% unterschreiten kann.

δ_N und die Schwelle δ_k^{min} wurden später variiert, um einen möglichen Einfluß auf das Ergebnis festzustellen. Der abgetrennte Normalisierungsfehler wird in der Anpassungsprozedur durch einen experimentspezifischen Normalisierungsfaktor f_j berücksichtigt.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

χ^2 -Definition:

Mit obigem δ_N und obigem $\sigma_k^{(i)}$ wurde folgendes χ^2 verwendet:

$$\chi^2 = \sum_j \left[\left(\sum_i \frac{(f_j D^{(i)} - T^{(i)})^2}{(f_j \sigma_k^{(i)})^2} \right) + \frac{(1 - f_j)^2}{\delta_N^2} \right] \quad (5.10)$$

Die Summe über j läuft dabei über alle 6 Experimente, von denen in der inneren Summe alle Kanäle i addiert werden, die zwischen den vorgegebenen Schranken für x liegen. $D^{(i)}$ steht für den Wert der Verteilung bei den Daten, $T^{(i)}$ für den theoretischen, d.h. im Generator simulierten Wert. Da χ^2 ein Maß für den Unterschied zwischen Daten und Monte-Carlo Generator ist, erhält man durch Minimieren dieser Größe die Werte der freien Parameter.

5.2.2 Anpassungsschritte und Splineparametrisierung

Die χ^2 -Minimierung wurde mit Hilfe des Programmpakets MINUIT [32] durchgeführt. Im ersten Schritt wurde das Simplex-Verfahren von Nelder und Mead verwendet [41], um passende Werte für die später festen Parameter zu finden und deren Einfluß auf Λ bei der Anpassung zu testen. Außerdem erhält man Werte für die freien Parameter Λ , a und ε_b , die als Ausgangspunkt für weitere Anpassungen verwendet werden. Die Vorteile des Simplex-Algorithmus sind die, daß im allgemeinen nur wenige Schritte zur Konvergenz nötig sind, da keine Ableitungen benötigt werden, und daß die geforderte Genauigkeit der χ^2 -Funktion nicht allzu groß ist. Deshalb war es möglich, in jedem Simplexschritt eine Anzahl von Monte-Carlo Ereignissen mit neuen Parameterwerten zu generieren und diese Parameter anzupassen.

Wie erwartet zeigte sich, daß die Parameter p_T , $E_{Schnitt}$ und die Wahrscheinlichkeit für ein Meson mit Spin 1 keinen großen Einfluß auf die Verteilungen und Λ haben. Für b wurde ein Wert bestimmt, bei dem ein gutes χ^2 erreicht wurde. Auf diesem wurde b fixiert, da a als freier Parameter für die eigentliche Prozedur genügt.

Nach diesem ersten Schritt wurden die Parameter auf folgende Werte fixiert, wobei die nicht erwähnten Parameter unverändert blieben:

$$\begin{aligned} b &= 0.283 \\ p_T &= 0.500 \text{ GeV} \\ E_{Schnitt} &= 3.1 \text{ GeV} \\ \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} &= 9.375 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Außerdem waren auch f und y zunächst festgelegt:

$$\begin{aligned} f &= 0.01 \\ M^2 = y \cdot s &= 82.81 \text{ GeV}^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y(91 \text{ GeV}) &= 0.01 & y(54 \text{ GeV}) &= 0.0284 \\ y(35 \text{ GeV}) &= 0.0676 & y(29 \text{ GeV}) &= 0.0985 \end{aligned}$$

Da das Simplex-Verfahren nicht immer zuverlässig arbeitet, keine allzu hohe Genauigkeit besitzt und keinerlei Fehlerabschätzungen für die Parameter liefert, muß für die weitere Anpassung ein anderer Algorithmus verwendet werden. Im zweiten Schritt kam das Gradientenverfahren MIGRAD [32] zur Verwendung, das mit Hilfe von Ableitungen das χ^2 minimiert und zuverlässiger und genauer als der Simplex-Algorithmus arbeitet. Neben den Korrelationen zwischen den freien Parametern werden auch Fehlerabschätzungen geliefert, die mit dem MINOS-Algorithmus noch präzisiert werden können. Nach Durchlauf beider Verfahren MIGRAD und MINOS erhält man die Parameterwerte und deren (eventuell asymmetrische) Fehler.

Λ , a und ε_b wurden im zweiten Schritt zusammen mit den Normalisierungsfaktoren f_j an die Daten angepaßt. Allerdings war dies nicht direkt mit dem Monte-Carlo Generator möglich, da eine höhere Statistik und eine viel größere Schrittzahl als beim ersten Schritt benötigt wird, was einen extremen Anstieg der Rechenzeit zur Folge gehabt hätte. Deshalb wurden die Generatorverteilungen durch kubische Splines parametrisiert. Dazu wurden zunächst die $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$ -Verteilungen für bestimmte $\Lambda, a, \varepsilon_b$ -Kombinationen erzeugt. Man erhält damit nicht nur Verteilungen in Abhängigkeit von x , sondern auch in Abhängigkeit von Λ, a und ε_b : $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}(x, \Lambda, a, \varepsilon_b)$. Um die Statistik der insgesamt generierten 5.6 Millionen Ereignisse für den einzelnen Kanal besser auszunutzen, wurden die Verteilungen mit dem im Anhang C beschriebenen Algorithmus 353QH,twice geglättet. Diese Glättung wurde nacheinander in Λ -, a - und ε_b -Richtung ausgeführt. Da die Verteilungen sich in Abhängigkeit von diesen Parametern nur mäßig ändern, ist dies problemlos möglich. Eine Glättung in x -Richtung wurde nicht vorgenommen.

Die geglätteten Verteilungen, die kaum noch statistische Fluktuationen haben, konnten nun durch Spline-Funktionen parametrisiert werden. Eine kurze Erläuterung der hier sehr nützlichen kubischen Spline-Interpolation wird in Anhang D gegeben. Die Parametrisierung wurde wie die Glättung in Λ -, a - und ε_b -Richtung durchgeführt. Durch die Interpolation erhält man in der Fitprozedur für jedes beliebige Λ, a und ε_b die Werte für die Verteilungen $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}(x)$. Die Auswertung erfolgt zu einem vorgegebenen x an der Stelle $(\Lambda, a, \varepsilon_b)$ auf dreierlei Weise. Zuerst wird in Λ -Richtung der Splinewert verwendet und in a - bzw. ε_b -Richtung linear interpoliert. Danach folgt das gleiche mit zyklisch vertauschten Λ, a , und ε_b . Das arithmetische Mittel der resultierenden drei Werte, die sich kaum unterscheiden, ist der Verteilungswert bei $(\Lambda, a, \varepsilon_b)$. Somit wird ein kontinuierliches Variieren der Parameter Λ, a und ε_b in alle Richtungen ohne großen Rechenaufwand möglich, und die Fitprozedur liefert zuverlässige Werte und Fehlerabschätzungen für diese Parameter und die f_j .

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

In einem dritten Schritt wurden zur Fehleruntersuchung auch „Splinenetze“ für andere Werte von f und y generiert und damit die Parameter bestimmt. Außerdem wurde die Anpassung mit MIGRAD und MINOS auch für verschiedene x -Bereiche durchgeführt.

5.2.3 Ergebnisse der Anpassung

Die Fitprozedur wurde zunächst für $f = 0.01$, $y(91 \text{ GeV}) = 0.01$ und $0.18 \leq x \leq 0.8$ mit den in Kapitel 4.1 aufgeführten Experimenten zwischen 29 und 91 GeV durchgeführt. Der angenommene Normalisierungsfehler war $\delta_N = 0.02$ und die Schwelle für den kanalspezifischen Fehler $\delta_k^{\text{min}} = 0.03$.

Aus Abbildung 5.5 sieht man am Beispiel von Λ und a , daß die Anpassung eindeutige Minima ergab. Es ist die Änderung von χ^2 in Abhängigkeit von Λ bzw. a aufgetragen, wobei die anderen Parameter jeweils festgehalten wurden. Im Minimumbereich sollte sich eine parabelförmige Kurve ergeben, was hier auch der Fall ist.

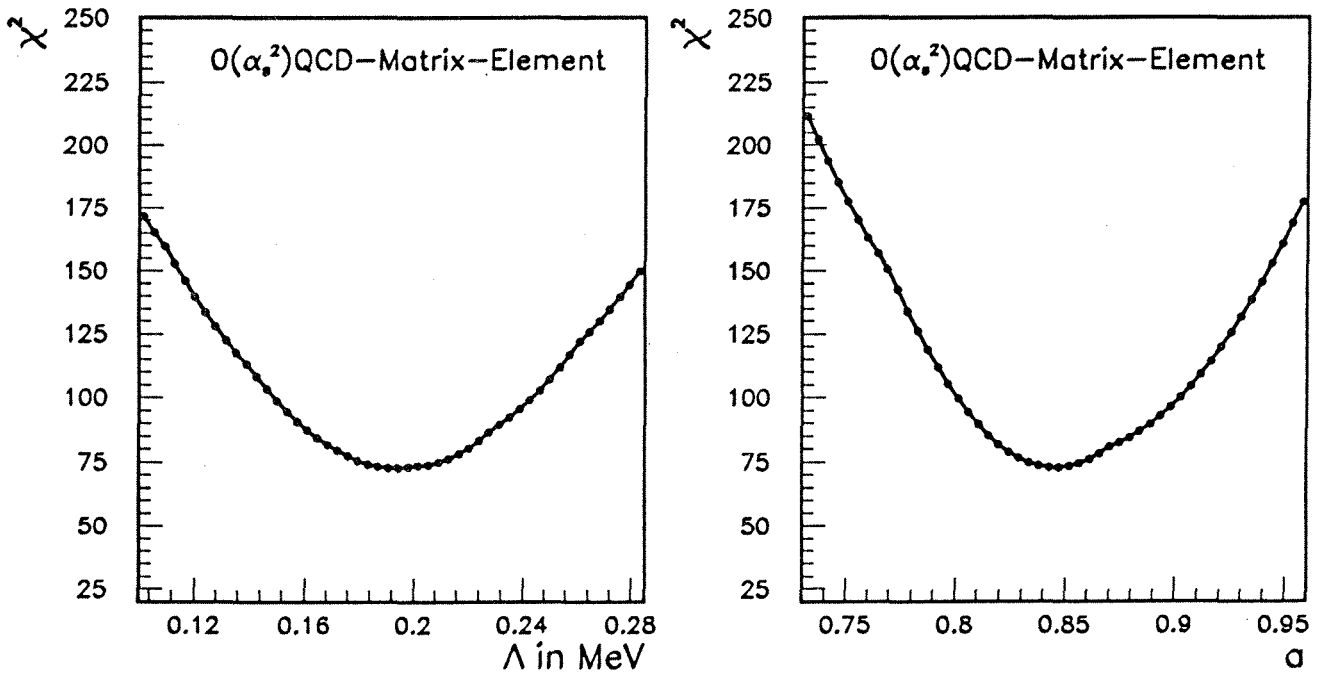


Abbildung 5.5: χ^2 in Abhängigkeit von Λ und a .

Die parabelförmigen Kurven zeigen, daß die Anpassung in Ordnung ist. Korrelationen werden in diesen Kurven nicht berücksichtigt.

Es ergaben sich bei der Anpassung folgende Werte:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} &= 193_{-11}^{+20} \text{ MeV} \\ a &= 0.85 \pm 0.03 \quad (\pm 0.01) \\ \varepsilon_b &= 0.009 \pm 0.002 \quad (\pm 0.0003)\end{aligned}\tag{5.13}$$

Der hier angegebene (MINOS-)Fehler auf Λ beinhaltet die statistische Unsicherheit und den Fehler, der durch die Korrelation mit a und ε_b (d.h. durch die Fragmentation) dazukommt. Die bei a und ε_b aufgeführten Fehler enthalten zusätzlich zur Statistik und den Korrelationen mit den anderen Parametern noch systematische Effekte wie die Abhängigkeit von δ_N , δ_k^{min} und dem Schnitt in x , sowie die Abhängigkeit von der Wahl der Experimente². Diese Fehler werden für Λ in Kapitel 5.3 gesondert untersucht. In Klammern ist bei a und ε_b der jeweilige MINOS-Fehler angegeben. Das χ^2 der verwendeten 71 Kanäle hatte bei der Anpassung den Wert $\chi^2 = 72.7$. Dies bedeutet pro Kanal:

$$\frac{\chi^2}{\text{Kanal}} = 1.02$$

Da dieser Wert nahe bei 1 liegt, werden die Daten mit den ermittelten Parametern gut beschrieben. Die ebenfalls an die Daten angepaßten Normalisierungsfaktoren ergaben alle Werte nahe bei 1, wobei der Wert 1 bedeutet, daß überhaupt kein Normalisierungsfehler vorliegt. Die f_j lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned}f_{\text{Delphi}} &= 0.995 & f_{\text{Aleph}} &= 0.984 \\ f_{\text{Amy}} &= 1.004 & f_{\text{Cello}} &= 1.007 \\ f_{\text{Tasso}} &= 0.984 & f_{\text{Mark II}} &= 1.044\end{aligned}\tag{5.14}$$

Die in dieser Analyse ermittelten Generatorverteilungen, d.h. berechnet mit dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung und anschließender String-Fragmentation, sind neben den Daten in den Tabellen im Anhang A nachzulesen. Außerdem sind dort auch die χ^2 -Werte der einzelnen Kanäle aufgeführt.

In Abbildung 5.6 sind die $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}(x)$ -Verteilungen für die Experimente TASSO (35 GeV) und DELPHI (91 GeV) zusammen mit den durch das $O(\alpha_s^2)$ -Matrix-Element ermittelten Kurven aufgetragen. Außer der guten Übereinstimmung der Generator-Verteilungen mit den Daten sieht man hier nochmals die signifikante Skalenverletzung, die bewirkt, daß nicht beide Energien zu identischen Spektren führen.

Abbildung 5.7 zeigt das Verhältnis der Energien 91 GeV und 35 GeV, das ohne Skalenverletzung identisch 1 wäre. Auch hier ist die Beschreibung durch das Matrix-Element in Ordnung.

²Nicht enthalten sind Fehler durch f und y . Dies bedeutet, daß die angegebenen Werte von a und ε_b nur für die Wahl (5.12) gelten. Analog wird bei den anderen f - und y -Werten verfahren.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

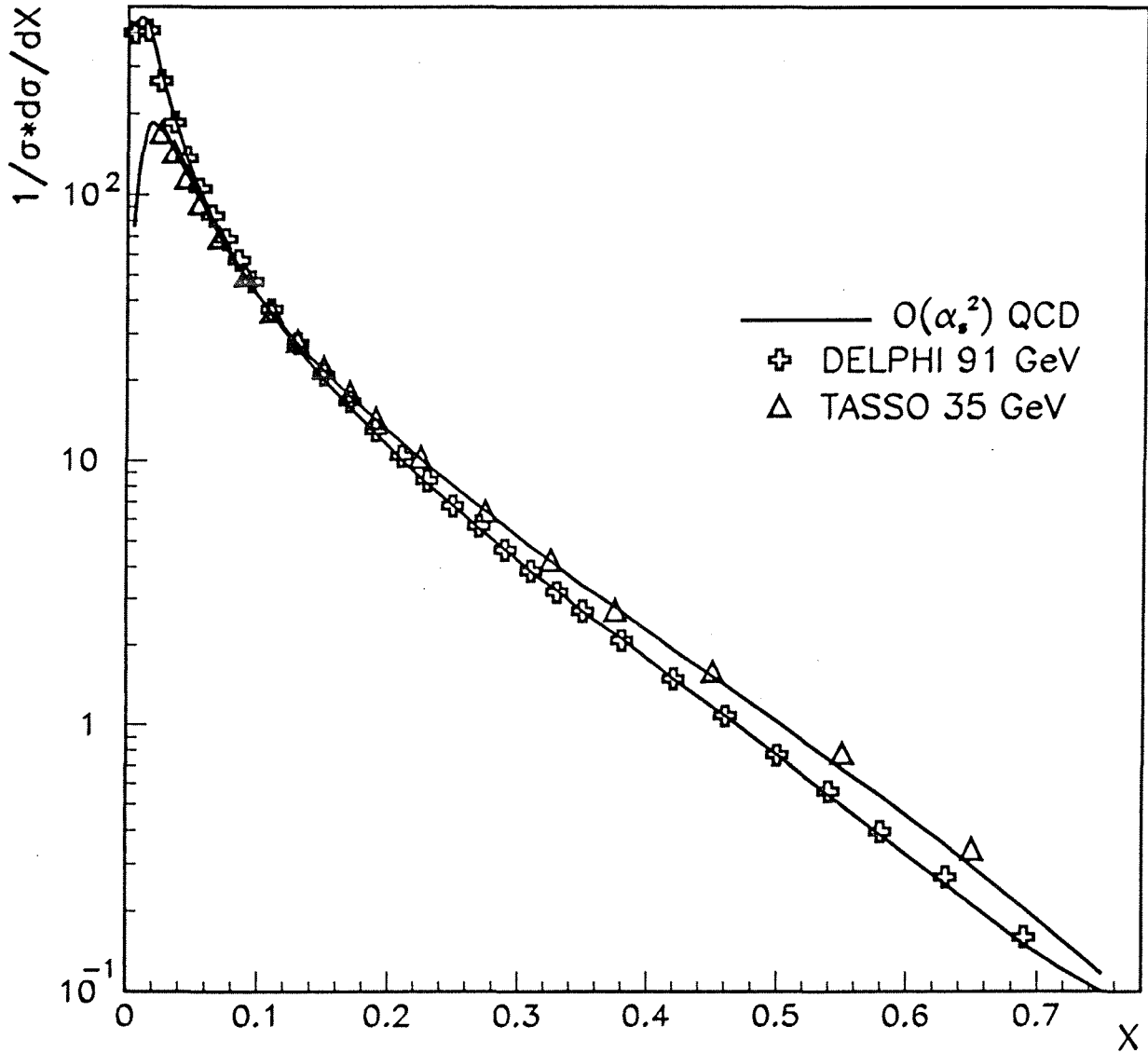


Abbildung 5.6: Die skalierten inklusiven Impulsverteilungen bei 35 und 91 GeV. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung.

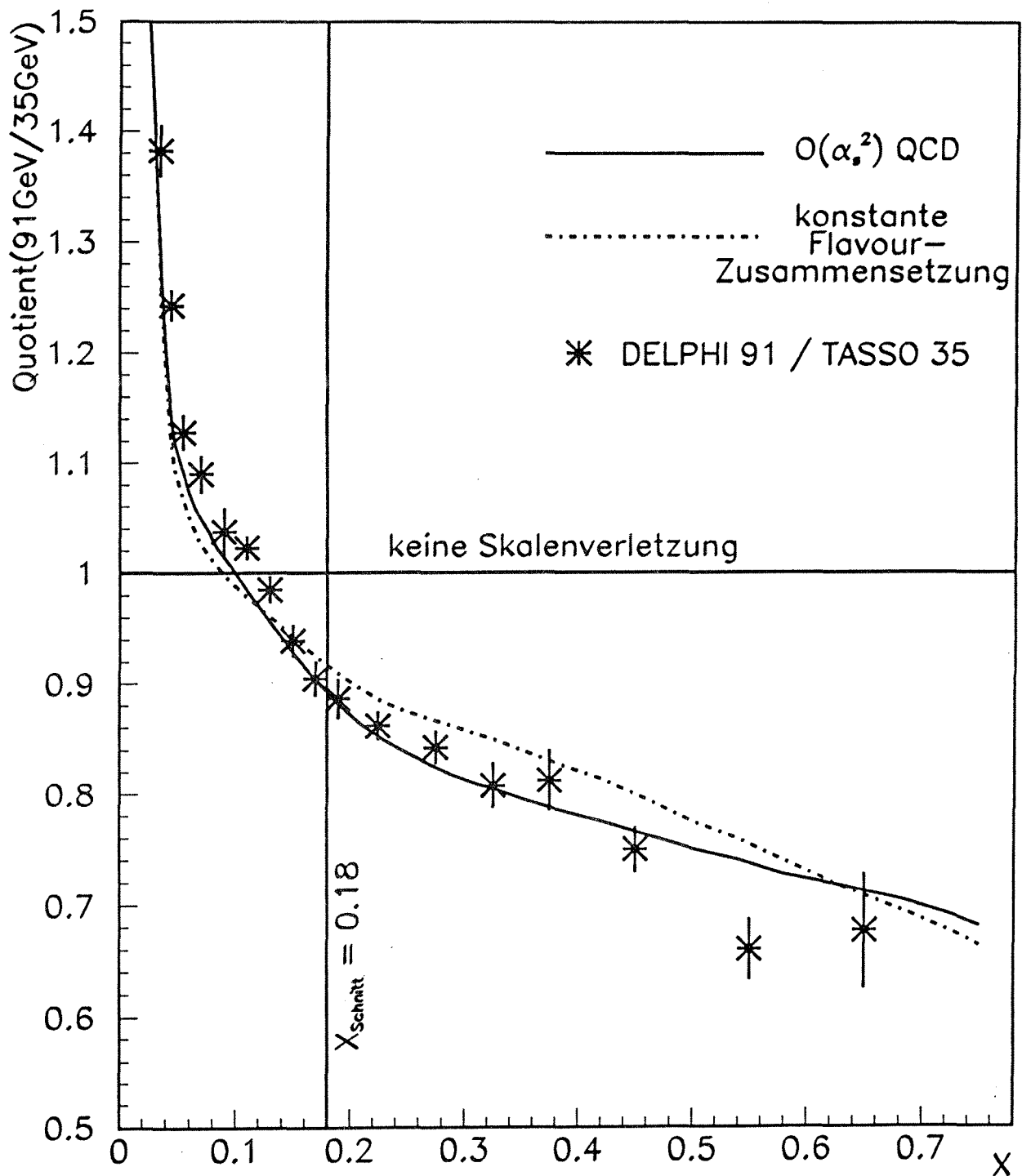


Abbildung 5.7: Der Quotient aus den Impulsverteilungen bei 91 und 35 GeV. Die durchgezogene Linie entspricht dem QCD-Matrix-Element, und die gestrichelte Linie ergibt sich für gleiche Flavour-Zusammensetzung bei beiden Energien.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

Außerdem wurde gestrichelt noch eine Generatorkurve für konstante Flavour-Zusammensetzung bei beiden Energien aufgetragen. Diese liegt nahe an der $O(\alpha_s^2)$ -QCD-Kurve, was zeigt, daß die Skalenverletzung wirklich eine Skalenverletzung in der Fragmentationsfunktion $D(x, Q^2)$ ist und nicht nur durch die Energieabhängigkeit der $W_i(Q^2)$ in Gleichung (3.6) verursacht wird. Der größere Anteil an härter fragmentierenden b-Quarks bei 91 GeV beeinflusst die Skalenverletzung nur leicht. Das nach der Fragmentation bei b-Quarks härtere Impulsspektrum ähnelt nach dem Zerfall der instabilen Teilchen wieder dem der leichten Quarks.

Neben den Parameterwerten und Fehlern erhält man bei der Anpassung auch die Korrelationen zwischen den Parametern. Es zeigte sich, daß Λ nur relativ schwach mit den Fragmentationsparametern korreliert ist. Dies bedeutet, daß die Unsicherheit von a und ε_b den Fehler auf Λ nur leicht vergrößert. Auf den ersten Blick ist dieses Ergebnis erstaunlich, da bei früheren Versuchen, Λ mit Hilfe eines Monte-Carlo Generators zu bestimmen, die Unsicherheiten durch die Fragmentation sehr groß waren. Je nach Wahl von a bzw. ε_b konnten viele unterschiedliche Λ -Werte erreicht werden. Der Hauptunterschied zu dieser Analyse bestand darin, daß nur Daten einer Energie verwendet wurden. Durch das Einbeziehen von mehreren Experimenten bei unterschiedlichen Energien in die Fitprozedur ist es hier gelungen, die (energieunabhängige) Fragmentationsphase III³ von der Λ bestimmenden Phase II³ praktisch zu entkoppeln. Bei einer Änderung von a oder ε_b bleibt der Wert von Λ stabil. Der Einfluß der Fragmentation ist so gering, daß selbst die Verwendung eines anderen Modells fast zum gleichen Ergebnis führt. Dies wurde anhand der Unabhängigen Fragmentation bestätigt. Eine Anpassung mit diesem Modell und 4 Experimenten bei 35 und 91 GeV lieferte folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} &= 211_{-24}^{+36} \text{ MeV} \\ a &= 0.88 \pm 0.05 \quad (\pm 0.04) \\ \varepsilon_b &= 0.007 \pm 0.002 \quad (\pm 0.001)\end{aligned}\tag{5.15}$$

Der Vergleich mit dem String-Modell zeigt, daß der Unterschied innerhalb der (MINOS-)Fehler liegt.

Um den Einfluß des verwendeten x -Bereichs zu sehen, wurde in der Anpassungsprozedur die untere x -Schranke variiert. Die hieraus resultierenden Ergebnisse für Λ sind aus Tabelle 5.1 und Abbildung 5.8 ersichtlich.

Ebenso wurden in weiteren Prozeduren δ_N , δ_k^{min} und die verwendeten Experimente verändert. Genauer hierzu bei der Fehlerabschätzung in Kapitel 5.3.

³nach Kapitel 2.5

x -Bereich	Λ in MeV	$\Delta\Lambda$ in MeV
0.08–0.8	210	± 9.0
0.10–0.8	208	± 9.5
0.12–0.8	207	± 13.5
0.14–0.8	206	± 14.5
0.16–0.8	194	± 15.5
0.18–0.8	193	± 15.5
0.20–0.8	191	± 15.5
0.22–0.8	192	± 16.5
0.25–0.8	193	± 16.0
0.30–0.8	190	± 16.5
0.35–0.8	191	± 18.0
0.40–0.8	193	± 19.0

Tabelle 5.1: Die Abhängigkeit des Ergebnisses für Λ vom verwendeten x -Bereich. In der letzten Spalte ist der mittlere MINOS-Fehler auf das ermittelte Λ aufgetragen.

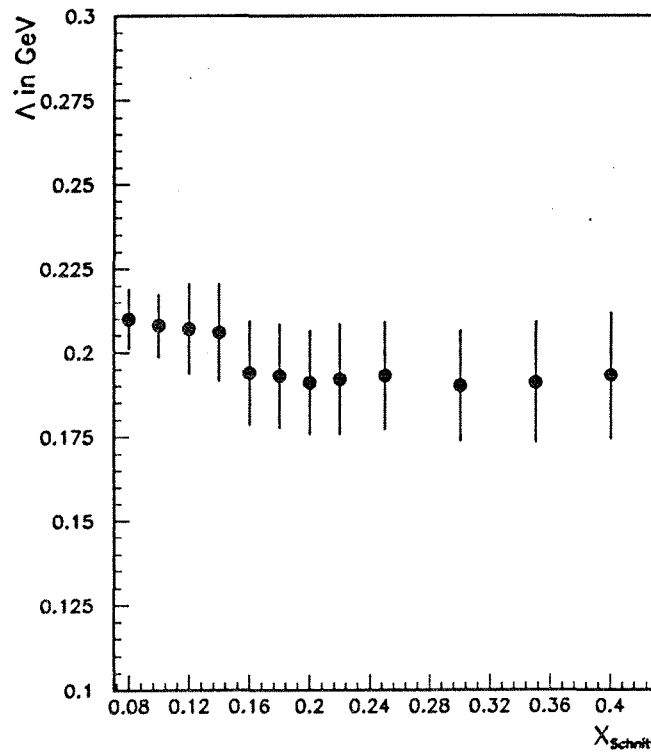


Abbildung 5.8: Die Abhängigkeit des Ergebnisses für Λ von x_{Schnitt} .

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

Da f und y nicht eindeutig vorgegeben sind, wurden schließlich die Parametrisierung durch Splines und die darauffolgenden Anpassungen für unterschiedliche Werte des Renormalisierungsfaktors f und des Schnittparameters y durchgeführt. Auch hier wurden nur die 4 Experimente bei 35 und 91 GeV benutzt. Es ergaben sich folgende Resultate für Λ , a und ε_b :

$f = 1.0$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} &= 269_{-14}^{+17} \text{ MeV} \\ a &= 0.96 \pm 0.03 \quad (\pm 0.01) \\ \varepsilon_b &= 0.008 \pm 0.002 \quad (\pm 0.0007)\end{aligned}\tag{5.16}$$

$M^2 = y \cdot s = 115.93$: (d.h. $y(91 \text{ GeV}) = 0.014$)

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} &= 231_{-10}^{+19} \text{ MeV} \\ a &= 0.94 \pm 0.04 \quad (\pm 0.02) \\ \varepsilon_b &= 0.008 \pm 0.002 \quad (\pm 0.0009)\end{aligned}\tag{5.17}$$

Für die hierbei aufgeführten Fehler gilt das bei den ersten Ergebnissen Gesagte. Die ebenfalls frei gelassenen Normalisierungsfaktoren f_j änderten sich im Vergleich zur ersten Fitprozedur kaum.

Bei den verschiedenen Anpassungen war das resultierende χ^2 jeweils nur wenig größer als 1, d.h. es gibt bezüglich der Qualität der Anpassung keinen signifikanten Unterschied zu den ersten f - und y -Werten. Es ist deshalb nicht möglich, allein aus diesen Ergebnissen bestimmte f - oder y -Werte auszuschließen.

5.3 Fehlerabschätzung

Die Anpassung selbst lieferte einen statistischen Fehler und einen Fehler, der durch die Korrelationen mit den Fragmentationsparametern entsteht.

Aus den Ergebnissen der unterschiedlichen Anpassungen kann man eine Abschätzung für die systematische Unsicherheit von $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ angeben. Es sind insgesamt folgende Fehlerquellen zu berücksichtigen:

- Statistischer Fehler:

Der statistische Fehler entsteht durch die begrenzte Statistik der Experimente. Da in der Analyse mehrere Experimente mit insgesamt 71 Kanälen benutzt wurden, ist er im Vergleich zu den systematischen Effekten sehr gering. Er ist im angegebenen Anpassungsfehler von $_{-11}^{+20}$ MeV enthalten und liegt bei ca. 10 MeV.

- Fragmentationseffekte:

Wie in Kapitel 5.2.3 schon erwähnt, zeigte sich, daß die Korrelationen zwischen Λ und den Fragmentationsparametern a und ε_b ziemlich gering sind. Bei der Analyse ist durch die Verwendung von mehreren Experimenten bei verschiedenen Energien die Λ -Bestimmung vom Fragmentationsteil praktisch entkoppelt worden. Um dies zu bestätigen, wurde die ganze Anpassung auch für die Unabhängige Fragmentation durchgeführt. Die Änderung von Λ lag hierbei im Bereich der Fehler⁴.

Neben dem schon im Anpassungsfehler berücksichtigten Anteil, der durch die Korrelation mit a und ε_b entsteht, wurde für die Fragmentation noch ein Fehler von $\pm 9 \text{ MeV}$ auf Λ angenommen. Dieser ergibt sich aus dem Unterschied der Fitergebnisse bei den beiden Fragmentationsmodellen.

- Unsicherheit durch die unterschiedlichen Anteile an schweren Quarks:

Da sich die Flavour-Zusammensetzung mit der Energie ändert, muß auch das unterschiedliche Fragmentationsverhalten von schweren und leichten Quarks berücksichtigt werden. In Abbildung 5.7 (Seite 65) ist zu sehen, daß die Skalenverletzung durch die unterschiedlichen Flavour-Zusammensetzungen nur leicht beeinflusst wird. Aus der Kurve für konstante Zusammensetzung läßt sich der Fehler auf Λ zu $\pm 10 \text{ MeV}$ abschätzen.

- Experimentelle Unsicherheiten:

Auf die Berücksichtigung der statistischen und systematischen Abweichungen sowie der Normalisierungsfehler der einzelnen Experimente innerhalb der Fitprozedur wurde bereits hingewiesen. Dabei war die Wahl des relativen Normalisierungsfehlers δ_N und des minimalen kanalspezifischen Fehlers δ_k^{min} nicht eindeutig. Aus diesem Grund wurden beide Fehler zwischen 1% und 3% variiert, um den Einfluß auf die Anpassung zu sehen. Dabei änderte sich natürlich das χ^2 , da dort diese Fehler direkt eingehen. Λ hingegen variierte nur um $\pm 3 \text{ MeV}$, ist also kaum von der Normalisierung und den systematischen Datenfehlern abhängig. Dies zeigt, daß für die Skalenverletzung nur die Form der Verteilung, nicht aber eine absolute Normierung entscheidend ist.

- Unterschiede zwischen einzelnen Experimenten:

Da bei der durchgeführten α_s -Bestimmung Daten von verschiedenen Experimenten verwendet wurden, kann es sein, daß durch die Auswahl der Datensätze systematische Effekte auftreten. Um diese zu untersuchen, wurden Anpassungen für verschiedene Kombinationen der Experimente durchgeführt. Die Ergebnisse für Λ sind in Abbildung 5.9 dargestellt.

⁴Ergebnisse siehe Kapitel 5.2.3

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

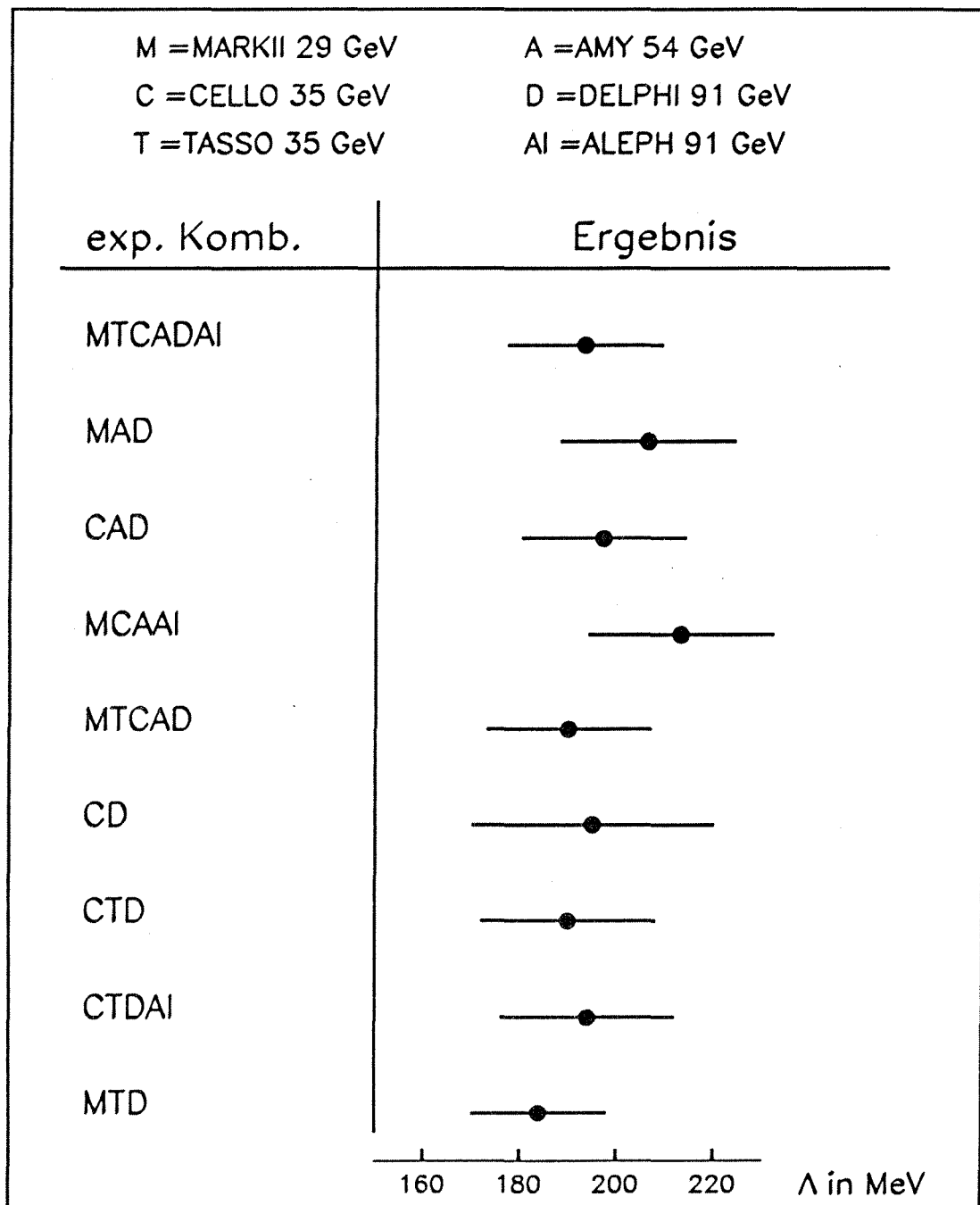


Abbildung 5.9: Λ bei verschiedenen Experiment-Kombinationen.
Links die verwendeten Kombinationen, gekennzeichnet durch die oben angegebenen Abkürzungen, rechts das Resultat für Λ .

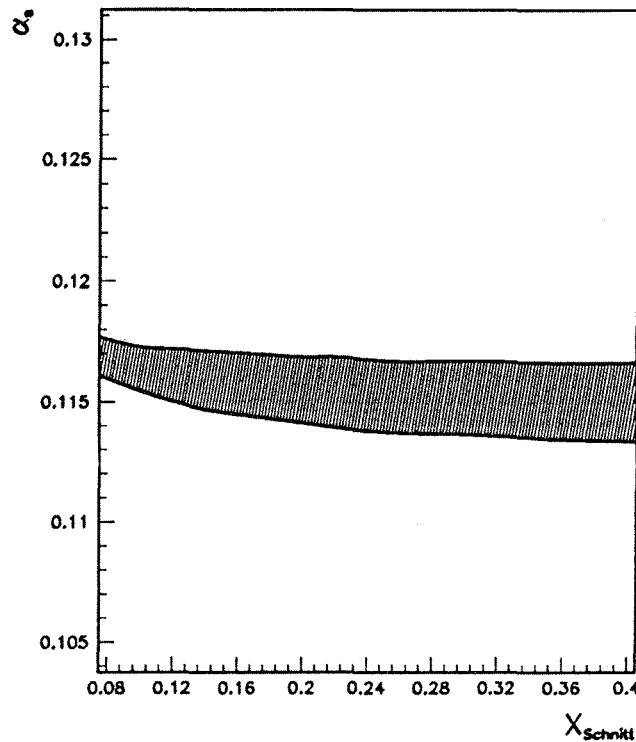


Abbildung 5.10: Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten α_s von der unteren x -Schranke.

Man sieht deutlich, daß die resultierenden Unterschiede kaum den statistischen Fehler überschreiten. Die größte aufgetretene Differenz liegt bei 30 MeV. Unter der Annahme, daß diese Differenz nur durch systematische Effekte verursacht wird, beträgt der Fehler durch die verschiedenen Experimente ± 15 MeV.

- Abhängigkeit vom verwendeten x -Bereich:

Um den Einfluß des erforderlichen Schnitts bei kleinen x auf Λ zu testen, wurde die untere Grenze des verwendeten Bereiches zwischen 0.08 und 0.4 variiert. Die Ergebnisse sind in Kapitel 5.2.3 zu sehen. Es zeigte sich, daß Λ für $x_{\text{Schnitt}} \geq 0.18$ konstant bleibt. Für darunterliegende Schnitte steigt der Wert von 193 MeV auf 210 MeV an (Abbildung 5.8). Die obere Grenze wurde festgehalten, da die experimentellen Fehler bei $x > 0.8$ sehr groß werden.

Aus der Variation von Λ ergab sich damit ein Fehler von ± 10 MeV. Für Abbildung 5.10 wurden die Ergebnisse mit (2.8) auf $\alpha_s(M_Z^2)$ umgerechnet und ein Fehlerband durch die Werte gelegt. Es wird auch hier deutlich, daß α_s nur bei kleinen x_{Schnitt} -Werten vom verwendeten x -Bereich abhängt.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

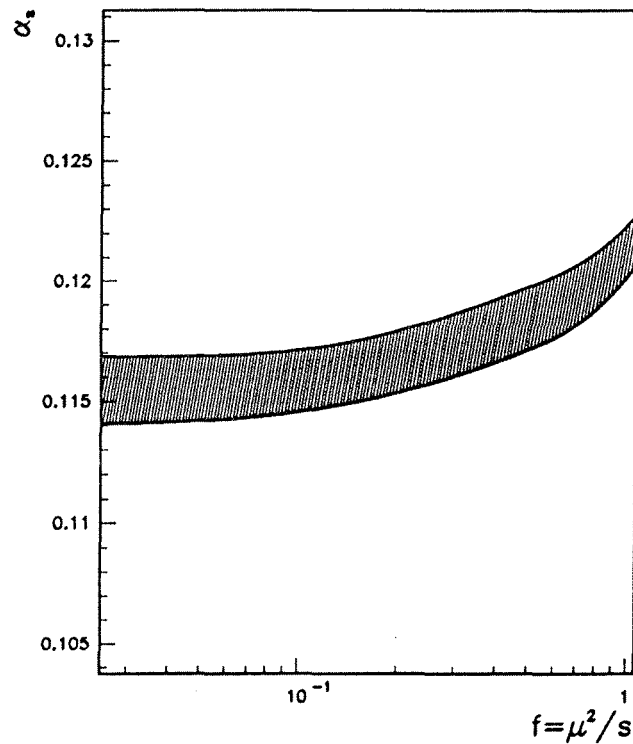


Abbildung 5.11: Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten α_s vom Renormalisierungsfaktor f .

- Unsicherheit durch die Renormalisierungsskala f :

Wären alle Korrekturen höherer Ordnung bekannt, so wäre Λ von der Wahl des Renormalisierungsfaktors f unabhängig. Da dies (leider) nicht der Fall ist, ergibt die Unsicherheit von f einen relativ großen Fehler auf Λ .

Um ihn zu bestimmen, wurde die Fitprozedur für verschiedene f -Werte wiederholt. Λ zeigte einen Anstieg von 190 MeV auf 270 MeV, als f von 0.01 auf 1.0 erhöht wurde, was einer Skalenänderung von $\frac{E_{CM}}{10}$ auf E_{CM} entspricht. Für α_s bedeutet dies einen Anstieg von 0.115 auf 0.121. Eine Erniedrigung von f bis zu 0.002 ($\cong \frac{E_{CM}}{22}$) ändert Λ und damit α_s nicht allzu stark. Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten $\alpha_s(M_Z^2)$ von f ist in Abbildung 5.11 durch ein Fehlerband dargestellt.

Der Renormalisierungsfaktor, der seinen Ursprung in der Unkenntnis der höheren Ordnungen hat, bewirkt also für Λ einen Fehler von ± 40 MeV. Er verursacht, wie auch bei anderen α_s -Bestimmungen, die größte Unsicherheit auf Λ und α_s .

- Abhängigkeit vom Schnittparameter y :

Schließlich ist zu erwarten, daß Λ auch vom beim Matrix-Element verwendeten Schnittparameter y abhängt. Zur Untersuchung dieses Fehlers wurde in weiteren Anpassungen auch y abgeändert. Dabei mußte jeweils beachtet werden, daß $M^2 = y \cdot s$ bei allen Experimenten konstant bleibt. Ein Vergrößern des Quadrats der minimalen invarianten Masse und damit auch von y um den Faktor 2 ergab für Λ einen Anstieg von 60 MeV. Deshalb wurden als systematischer Fehler durch den Schnitt ± 30 MeV angesetzt.

Die Fehleranalyse zeigte, daß die Parameter f und y , die zusammen mit Λ direkt in Phase II des Prozesses $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen eingehen, die größte Unsicherheit auf Λ (und α_s) verursachen. In beiden Fällen bewirkt eine Erhöhung einen Anstieg von α_s . Eine Erhöhung von f bedeutet, daß α_s bei einer größeren Skala eingeht, d.h. kleiner ist. Durch die geringere Kopplung würden folglich weniger Partonen entstehen. Dies kann durch eine Erhöhung von Λ kompensiert werden. Genau das geschieht auch bei der Anpassung an die wirklich gemessenen Werte. Wird y vergrößert, so sinken 3- und 4-Jetraten, und es sind ebenfalls weniger Partonen vorhanden. Deshalb wird auch hier mit einer Erhöhung von Λ entgegengewirkt.

In einer Monte-Carlo Studie im Bereich der Partonen wurde der Einfluß von f und y auf die 2-, 3- und 4-Jetraten untersucht.

Das Ziel dabei war, festzustellen, ob eine Änderung des Renormalisierungsfaktors und eine Änderung des Schnittparameters zu einem äquivalenten Ergebnis bei den Partonen vor der Fragmentation führt. Dies würde bedeuten, daß beide Parameter die gleiche Fehlerquelle für Λ darstellen.

In Abbildung 5.12 sind die 3- und 4-Jetraten bei der Energie 91 GeV für verschiedene f bzw. y aufgetragen. Es wird deutlich, daß die beiden Parameter zwar in die gleiche Richtung wirken, aber doch zu recht unterschiedlichen Abhängigkeiten führen. Es ist nicht möglich, statt f einfach y um einen entsprechenden Wert zu vergrößern, um damit das gleiche Ergebnis zu erhalten.

Deshalb wurden trotz gemeinsamer gleicher Einflüsse auf Λ die Fehler durch y und f getrennt in der Analyse verwendet.

Eine weitere Fitprozedur, bei der f gleichzeitig mit y erhöht wurde, ergab ein noch größeres Λ als die oben angeführten Anpassungen, bei denen nur einer der beiden Parameter auf einen größeren Wert gesetzt wurde. Dies bestätigte die Annahme, daß bei Berücksichtigung von y und f nicht der gleiche Fehler doppelt verwendet wird.

5. Bestimmung von α_s aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung

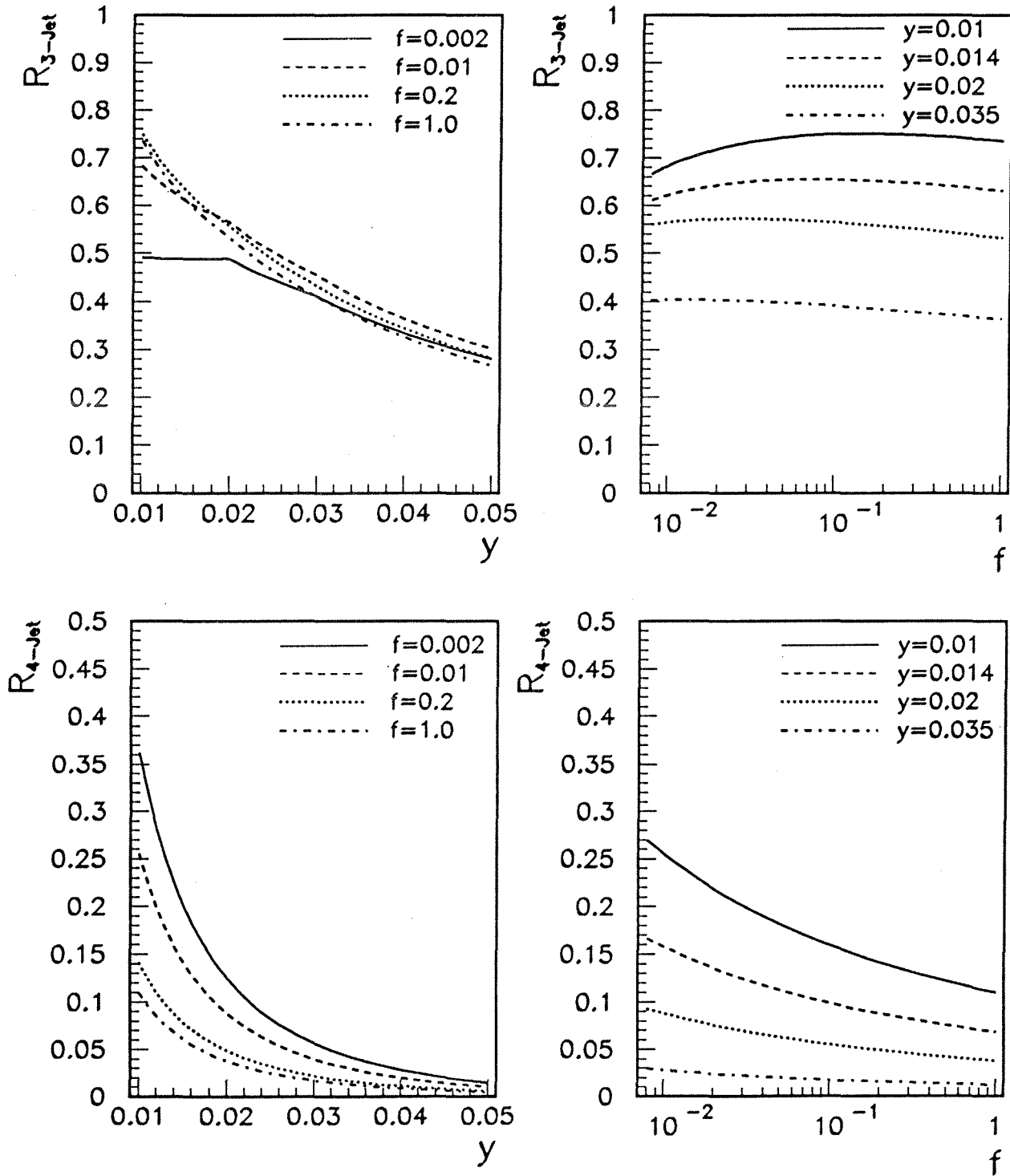


Abbildung 5.12: Die 3-Jetraten (oben) und die 4-Jetraten (unten) in Abhängigkeit von f und y bei einer Energie von 91 GeV. Es wird deutlich, daß Erhöhungen von f und Erhöhungen von y nicht zu äquivalenten Ergebnissen führen.

Fehlerquelle	Fehler $\Delta\Lambda$
Statistik, Korrelationen	$^{+20}_{-11}$ MeV
Fragmentationsmodelle	± 9 MeV
Anteile an schweren Quarks	± 10 MeV
verschiedene Experimente	± 15 MeV
x -Abhängigkeit	± 10 MeV
Schnittparameter y	± 30 MeV
Renormalisierungsfaktor f (höhere Ordnungen)	± 40 MeV
$\Rightarrow$ Gesamtfehler	± 60 MeV

Tabelle 5.2: Zusammenfassung der Fehler auf $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$.

Die untersuchten Fehler sind in Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Sie wurden quadratisch zu einem Gesamtfehler addiert:

$$\Delta\Lambda_{ges} = \pm 60 \text{ MeV} \quad (5.18)$$

Verwendet man für Λ den Mittelwert, der sich bei der Variation von f ergibt, so lautet das Endergebnis:

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 230 \pm 60 \text{ MeV} \quad (5.19)$$

Mit Gleichung (2.8) ergibt sich dazu korrespondierend ein α_s bei der Z^0 -Masse:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.005 \quad (5.20)$$

Kapitel 6

Schlußbemerkungen

Mit den in der Analyse gefundenen Parametern wurden noch Verteilungen bei 14 GeV, 22 GeV und 44 GeV generiert. Für diese Energien existieren experimentelle Daten von TASSO [30], die bei der Bestimmung nicht mitverwendet wurden. Bei den Vergleichen von Daten und Generatorverteilungen ergeben sich jeweils χ^2 -Werte, die knapp unter 1 pro Kanal liegen. Dies zeigt wie bei den verwendeten Verteilungen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie (Generator) und Messung. Mit den ermittelten Parametern werden also die skalierten Impulsverteilungen $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}(x)$ bei jeder beliebigen Energie beschrieben.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die in den Daten der e^+e^- -Annihilation deutlich sichtbare Skalenverletzung eine genaue Bestimmung von α_s ermöglicht. Aus einer Analyse mit Hilfe des QCD-Matrix-Elements in 2.Ordnung ergab sich

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.005$$

Es ist zu erwarten, daß die anderen in Kapitel 3.4 erwähnten Methoden ebenfalls eine gute Bestimmung von α_s aus der Skalenverletzung erlauben und zu einem ähnlichen Ergebnis führen.

Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus der tiefinelastischen Streuung [14]

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.113 \pm 0.005$$

zeigt durch die Fehler, daß sich die Skalenverletzung im zeitartigen Bereich genauso gut zur α_s -Bestimmung eignet, wie die Skalenverletzung im raumartigen Bereich. In beiden Fällen wird der Hauptfehler durch die unbekannten höheren Ordnungen verursacht, so daß eine große Verbesserung dieser Werte momentan kaum möglich ist. Diese durch die Skalenverletzung bestimmten Werte gehören zu den präzisesten α_s -Werten überhaupt.

Der mit dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung ermittelte Wert für $\alpha_s(M_Z^2)$ stimmt, abgesehen von dem aus der Streuung gemessenen Wert, auch mit anderen α_s -Bestimmungen gut überein. So ergab sich z.B. bei LEP aus Jetraten und Variablen, die die Form der Ereignisse beschreiben, ein Wert von $\alpha_s(M_Z^2) = 0.120 \pm 0.007$ [44]. In Tabelle 6.1 sind weitere α_s -Bestimmungen bei unterschiedlichen Energien aufgelistet. Diese sind auch in Abbildung 6.1 aufgetragen. Hierin ergibt sich die durchgezogene Kurve $\alpha_s(Q)$ aus (2.8) mit dem in dieser Analyse ermittelten Wert von $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 230$ MeV. Die gepunkteten Linien entsprechen den Fehlerschranken dieses Werts. Man sieht, daß das Ergebnis mit den verschiedenen anderen Bestimmungen konsistent ist.

Experiment	Energie Q	$\alpha_s(Q)$	Fehler $\Delta\alpha_s(Q)$
R_τ (τ -Zerfall)	1.78 GeV	0.320	± 0.040
Neutrino- streuung	5.0 GeV	0.193	± 0.019
Inelastische Lepton- Nukleon-Streuung	7.1 GeV	0.180	± 0.014
J/Ψ (Quarkonium-Zerfall)	10.0 GeV	0.167	± 0.015
Form der Ereignisse bei 35 GeV	35.0 GeV	0.140	± 0.020
Form der Ereignisse bei 58 GeV	58.0 GeV	0.130	± 0.008
$p\bar{p} \rightarrow W + \text{Jets}$ (UA2-Experiment)	80.6 GeV	0.123	± 0.025
$\Gamma_{had}/\Gamma_{lep}$ bei LEP (Z^0 -Zerfallsbreite)	91.2 GeV	0.130	± 0.012
Jetraten und Ereignis- form bei LEP	91.2 GeV	0.120	± 0.007

Tabelle 6.1: Verschiedene α_s -Bestimmungen ([42],[43],[14],[44]).

6. Schlußbemerkungen

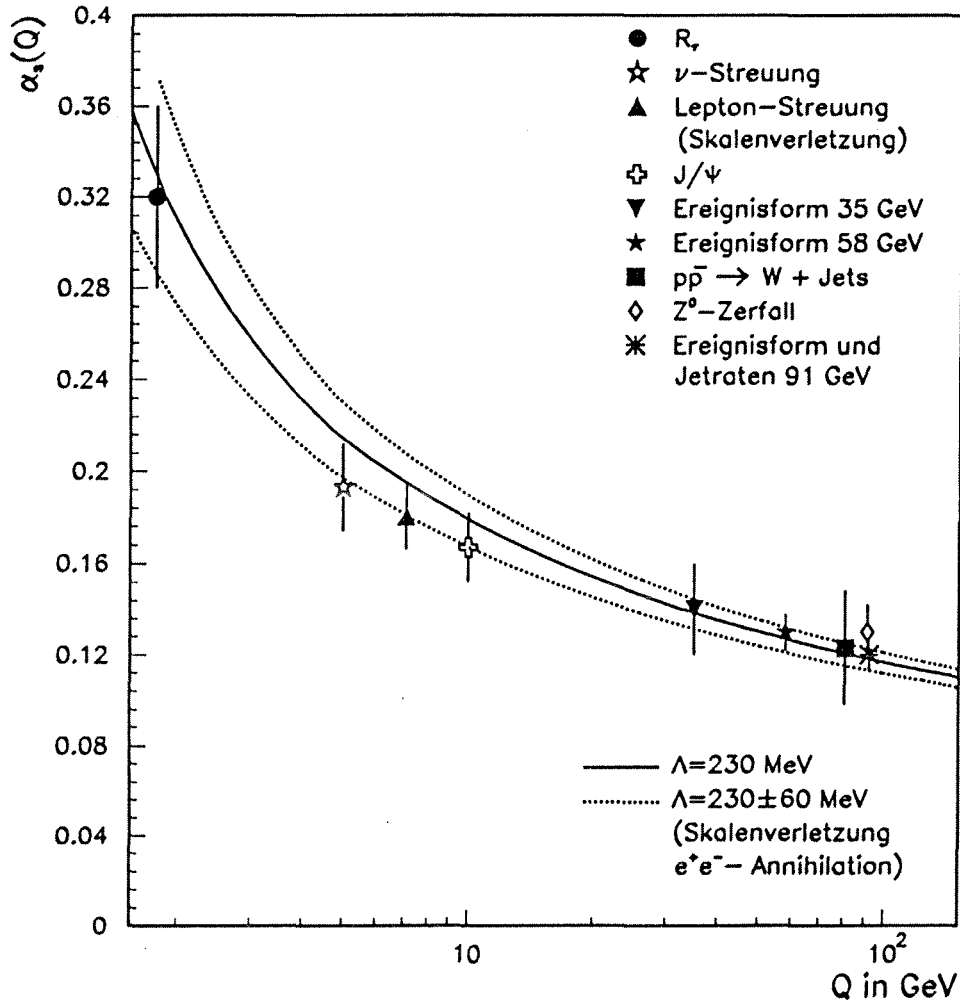


Abbildung 6.1: $\alpha_s(Q)$ bei verschiedenen Experimenten.

Die durchgezogene Kurve entspricht dem in der Analyse ermittelten Wert von $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 230 \text{ MeV}$, und die gepunkteten Linien zeigen die zugehörigen Fehlergrenzen.

Die Bedeutung der in der Analyse bestimmten starken Kopplungskonstanten α_s geht weit über die Quantenchromodynamik hinaus. Als fundamentaler Parameter dieser Theorie spielt sie zusammen mit den anderen Kopplungskonstanten auch bei den vereinigten Theorien (GUTs) eine große Rolle. Eine genaue Messung von α_s erlaubt durch Extrapolation auf sehr hohe Energien Aussagen über die verschiedenen GUT-Theorien ([45],[46]).

Somit ist jede Bestimmung der starken Kopplungskonstanten auch ein winziger Schritt auf dem Weg zur Beantwortung der alten Frage, was „die Welt im Innersten zusammenhält“.

Anhang A

Tabellen der Ergebnisse

In den folgenden Tabellen sind die Werte der skalierten inklusiven Impulsspektren der verwendeten Experimente in Abhängigkeit vom x -Kanal aufgeführt. Dabei ist der Fehler auf die Daten, je nach Experiment, getrennt in einen statistischen und einen systematischen Anteil oder insgesamt als experimenteller Fehler angegeben. Die letzte Spalte zeigt das Ergebnis aus dem QCD-Matrix-Element 2.Ordnung mit anschließender String-Fragmentation, das durch den Generator bestimmt wurde. Die dabei verwendeten Parameter sind (Kapitel 5.2):

Λ	=	193 MeV		
a	=	0.85	$y(91 \text{ GeV})$	= 0.01
b	=	0.283	$y(54 \text{ GeV})$	= 0.0284
ϵ_b	=	0.009	$y(35 \text{ GeV})$	= 0.0676
ϵ_c	=	0.083	$y(29 \text{ GeV})$	= 0.0985
p_T	=	0.500	f	= 0.01
E_{Schnitt}	=	3.1 GeV		

Außerdem wurden $\delta_N = 0.02$ und $\delta_k^{\text{min}} = 0.03$ benutzt.

Die zweite Spalte zeigt das sich mit diesen Werten ergebende χ^2 einzeln für die verschiedenen Kanäle. Der für jedes Experiment aus der Anpassung folgende Normalisierungsfaktor f_j wurde in der Datenspalte nicht einberechnet, ist aber beim angegeben χ^2 -Wert richtig berücksichtigt. Die Werte der f_j sind zusammen mit der Energie unter den einzelnen Tabellen angegeben. Für die Bestimmung von Λ wurde jeweils nur der Bereich zwischen den leeren Balken verwendet.

A. Tabellen der Ergebnisse

x	χ^2	Daten	σ_{stat}	σ_{sys}	QCD+SF
0.00 – 0.01	1.38	400.8	0.8	12.1	412.9
0.01 – 0.02	5.60	409.3	0.7	12.3	436.2
0.02 – 0.03	5.27	264.6	0.6	7.9	281.5
0.03 – 0.04	2.01	185.1	0.5	5.6	192.0
0.04 – 0.05	0.39	137.4	0.4	4.1	139.3
0.05 – 0.06	0.01	105.3	0.4	3.2	104.5
0.06 – 0.07	0.21	83.6	0.3	2.5	82.0
0.07 – 0.08	1.00	68.4	0.3	2.1	66.0
0.08 – 0.09	3.46	56.9	0.3	1.7	53.4
0.09 – 0.10	2.12	47.2	0.2	1.4	44.9
0.10 – 0.12	2.68	37.1	0.2	1.1	35.1
0.12 – 0.14	1.25	27.6	0.1	0.8	26.6
0.14 – 0.16	0.53	20.9	0.1	0.6	20.3
0.16 – 0.18	2.02	16.6	0.1	0.5	15.8
0.18 – 0.20	0.41	12.92	0.09	0.39	12.61
0.20 – 0.22	0.21	10.37	0.09	0.31	10.18
0.22 – 0.24	0.46	8.36	0.08	0.25	8.15
0.24 – 0.26	0.33	6.72	0.07	0.20	6.80
0.26 – 0.28	0.58	5.67	0.06	0.17	5.51
0.28 – 0.30	0.11	4.61	0.06	0.14	4.64
0.30 – 0.32	0.32	3.85	0.05	0.12	3.90
0.32 – 0.34	0.15	3.19	0.05	0.10	3.21
0.34 – 0.36	0.15	2.70	0.04	0.08	2.66
0.36 – 0.40	3.89	2.09	0.03	0.06	2.21
0.40 – 0.44	0.04	1.50	0.02	0.05	1.48
0.44 – 0.48	0.19	1.08	0.02	0.03	1.09
0.48 – 0.52	0.05	0.770	0.016	0.023	0.761
0.52 – 0.56	0.50	0.561	0.014	0.017	0.570
0.56 – 0.60	2.31	0.396	0.011	0.012	0.376
0.60 – 0.66	0.66	0.268	0.007	0.008	0.260
0.66 – 0.72	1.97	0.160	0.006	0.005	0.167
0.72 – 0.78	3.53	0.096	0.004	0.003	0.088
0.78 – 0.84	15.69	0.045	0.002	0.002	0.055
0.84 – 0.90	5.72	0.023	0.002	0.002	0.019
0.90 – 1.00	7.58	0.0059	0.0005	0.0005	0.0044

Tabelle A.1: Das inklusive Impulsspektrum von DELPHI.
Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 91 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 0.995$.

x	χ^2	Daten	σ_{stat}	σ_{sys}	QCD+SF
0.005 – 0.010	25.57	514.9	2.5	11.6	429.8
0.010 – 0.015	0.00	451.3	2.1	6.8	444.4
0.015 – 0.020	27.51	355.9	1.8	4.2	405.3
0.02 – 0.03	9.34	262.0	1.1	2.8	281.5
0.03 – 0.04	3.79	184.3	0.9	1.4	192.0
0.04 – 0.05	1.37	136.7	0.8	0.9	139.3
0.05 – 0.06	1.07	103.0	0.7	0.6	104.5
0.06 – 0.07	0.00	83.3	0.6	0.4	82.0
0.07 – 0.08	0.10	67.7	0.6	0.6	66.0
0.08 – 0.09	1.15	56.1	0.5	0.3	53.4
0.09 – 0.10	0.94	47.0	0.5	0.2	44.9
0.10 – 0.12	1.55	37.0	0.3	0.2	35.1
0.12 – 0.14	1.20	27.9	0.3	0.1	26.6
0.14 – 0.16	1.07	21.3	0.2	0.1	20.3
0.16 – 0.18	2.23	16.8	0.2	0.1	15.8
0.18 – 0.20	4.78	13.71	0.19	0.13	12.61
0.20 – 0.25	0.00	8.93	0.09	0.12	8.80
0.25 – 0.30	0.06	5.43	0.07	0.08	5.38
0.30 – 0.40	0.05	2.88	0.04	0.04	2.85
0.40 – 0.50	0.08	1.24	0.02	0.02	1.21
0.50 – 0.60	0.04	0.534	0.016	0.012	0.522
0.60 – 0.70	0.13	0.230	0.011	0.004	0.230
0.70 – 0.80	1.44	0.090	0.006	0.002	0.096

Tabelle A.2: Das inklusive Impulsspektrum von ALEPH.
Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 91 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 0.984$.

A. Tabellen der Ergebnisse

x	χ^2	Daten	σ_{exp}	QCD+SF
0.00 – 0.10	18.93	134.3	1.0	152.6
0.10 – 0.20	1.06	23.5	0.4	22.9
0.20 – 0.30	0.05	7.79	0.22	7.77
0.30 – 0.40	0.02	3.17	0.15	3.16
0.40 – 0.50	1.35	1.23	0.09	1.34
0.50 – 0.60	2.10	0.532	0.050	0.605
0.60 – 0.70	1.42	0.310	0.038	0.267
0.70 – 0.80	1.40	0.124	0.022	0.099
0.80 – 0.90	6.25	0.021	0.006	0.036
0.90 – 1.00	5.65	0.0038	0.0018	0.0081

Tabelle A.3: Das inklusive Impulsspektrum von AMY.
Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 54 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 1.004$.

x	χ^2	Daten	σ_{stat}	σ_{sys}	QCD+SF
0.00 – 0.01	0.04	62.0	2.0	69.8	76.0
0.01 – 0.02	7.46	153.3	1.1	7.8	174.2
0.02 – 0.03	12.80	155.8	1.1	4.9	173.7
0.03 – 0.04	4.73	136.5	1.0	4.1	146.4
0.04 – 0.05	5.59	111.6	0.9	3.3	120.3
0.05 – 0.06	8.54	88.3	0.8	2.7	96.7
0.06 – 0.07	12.30	71.6	0.7	2.1	79.7
0.07 – 0.08	2.22	59.9	0.7	2.0	63.0
0.08 – 0.09	1.32	50.9	0.6	1.7	53.0
0.09 – 0.10	0.20	44.1	0.6	1.5	45.0
0.10 – 0.12	0.14	36.4	0.4	1.3	36.1
0.12 – 0.14	0.05	27.7	0.3	1.1	27.7
0.14 – 0.16	0.00	21.6	0.3	0.9	21.7
0.16 – 0.18	0.02	17.6	0.3	0.7	17.6
0.18 – 0.20	0.04	14.21	0.24	0.62	14.18
0.20 – 0.22	0.01	11.41	0.21	0.48	11.53
0.22 – 0.24	0.06	9.49	0.19	0.41	9.65
0.24 – 0.26	0.68	8.06	0.18	0.33	7.83
0.26 – 0.28	0.30	6.33	0.16	0.25	6.52
0.28 – 0.30	0.29	5.67	0.15	0.24	5.57
0.30 – 0.32	0.51	4.84	0.14	0.20	4.71
0.32 – 0.34	0.73	4.04	0.13	0.16	3.91
0.34 – 0.36	0.07	3.49	0.12	0.13	3.47
0.36 – 0.40	0.20	2.65	0.07	0.09	2.62
0.40 – 0.44	0.24	1.91	0.06	0.07	1.88
0.44 – 0.48	0.00	1.36	0.05	0.04	1.37
0.48 – 0.52	0.65	1.01	0.04	0.03	1.05
0.52 – 0.56	0.38	0.738	0.035	0.022	0.766
0.56 – 0.60	2.08	0.496	0.027	0.015	0.541
0.60 – 0.66	0.56	0.331	0.018	0.010	0.348
0.66 – 0.72	0.47	0.197	0.012	0.006	0.207
0.72 – 0.78	0.59	0.108	0.008	0.005	0.116
0.78 – 0.84	0.50	0.047	0.004	0.003	0.051
0.84 – 0.90	22.85	0.022	0.002	0.002	0.036
0.90 – 1.00	206.87	0.0044	0.0003	0.0004	0.0119

Tabelle A.4: Das inklusive Impulsspektrum von CELLO.

Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 35 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 1.007$.

x	χ^2	Daten	σ_{exp}	QCD+SF
0.02 – 0.03	1.99	169.3	2.4	173.7
0.03 – 0.04	1.37	143.7	2.7	146.4
0.04 – 0.05	3.74	115.5	1.6	120.3
0.05 – 0.06	3.14	93.3	1.5	96.7
0.06 – 0.08	2.52	69.2	1.2	71.3
0.08 – 0.10	0.00	49.7	1.1	49.0
0.10 – 0.12	0.13	36.3	0.4	36.1
0.12 – 0.14	0.00	28.1	0.4	27.7
0.14 – 0.16	0.29	22.4	0.4	21.7
0.16 – 0.18	0.08	18.0	0.3	17.6
0.18 – 0.20	0.01	14.38	0.28	14.18
0.20 – 0.25	0.06	10.24	0.16	10.16
0.25 – 0.30	0.01	6.43	0.11	6.35
0.30 – 0.35	0.02	4.23	0.10	4.18
0.35 – 0.40	2.18	2.72	0.09	2.79
0.40 – 0.50	0.16	1.59	0.04	1.54
0.50 – 0.60	3.75	0.782	0.028	0.725
0.60 – 0.70	2.12	0.341	0.023	0.304
0.70 – 0.80	5.46	0.162	0.018	0.119
0.80 – 1.00	0.10	0.0300	0.0120	0.0259

Tabelle A.5: Das inklusive Impulsspektrum von TASSO.
Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 35 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 0.984$.

x	χ^2	Daten	σ_{exp}	QCD+SF
0.00 – 0.05	1.71	115.4	1.8	115.7
0.05 – 0.10	3.26	65.1	1.2	71.6
0.10 – 0.15	6.29	31.6	0.6	30.5
0.15 – 0.20	6.33	17.5	0.3	16.9
0.20 – 0.25	2.60	10.40	0.21	10.33
0.25 – 0.30	0.00	6.29	0.13	6.58
0.30 – 0.35	0.07	4.07	0.09	4.21
0.35 – 0.40	0.05	2.76	0.07	2.90
0.40 – 0.45	2.01	1.80	0.06	1.96
0.45 – 0.50	5.16	1.18	0.04	1.32
0.50 – 0.55	0.37	0.810	0.039	0.868
0.55 – 0.60	1.43	0.515	0.031	0.574
0.60 – 0.65	0.23	0.347	0.023	0.351
0.65 – 0.70	2.45	0.227	0.020	0.269
0.70 – 0.75	0.43	0.167	0.020	0.161
0.75 – 0.80	1.24	0.104	0.016	0.090
0.80 – 0.85	0.11	0.062	0.013	0.069
0.85 – 0.90	2.93	0.025	0.007	0.039
0.90 – 0.95	0.76	0.013	0.005	0.018
0.95 – 1.00	1.60	0.012	0.006	0.005

Tabelle A.6: Das inklusive Impulsspektrum von MARK II.
Die Schwerpunktsenergie beträgt $E_{CM} = 29 \text{ GeV}$, und es ergab sich $f_j = 1.044$.

Anhang B

$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ und $\alpha_s(M_Z^2)$

$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$	$\alpha_s(M_Z^2)$	$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$	$\alpha_s(M_Z^2)$	$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$	$\alpha_s(M_Z^2)$	$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$	$\alpha_s(M_Z^2)$
15	0.0839	125	0.1100	235	0.1209	345	0.1286
20	0.0865	130	0.1106	240	0.1212	350	0.1289
25	0.0887	135	0.1111	245	0.1216	355	0.1291
30	0.0906	140	0.1116	250	0.1219	360	0.1294
35	0.0922	145	0.1121	255	0.1223	365	0.1297
40	0.0936	150	0.1126	260	0.1226	370	0.1299
45	0.0950	155	0.1131	265	0.1229	375	0.1302
50	0.0962	160	0.1136	270	0.1233	380	0.1305
55	0.0973	165	0.1141	275	0.1236	385	0.1307
60	0.0984	170	0.1145	280	0.1239	390	0.1310
65	0.0994	175	0.1150	285	0.1242	395	0.1312
70	0.1003	180	0.1154	290	0.1245	400	0.1315
75	0.1012	185	0.1158	295	0.1248	405	0.1317
80	0.1020	190	0.1163	300	0.1251	410	0.1320
85	0.1029	195	0.1167	305	0.1254	415	0.1322
90	0.1036	200	0.1171	310	0.1257	420	0.1325
95	0.1044	205	0.1175	315	0.1260	425	0.1327
100	0.1051	210	0.1179	320	0.1263	430	0.1329
105	0.1058	215	0.1183	325	0.1266	435	0.1332
110	0.1064	220	0.1187	330	0.1269	440	0.1334
115	0.1071	225	0.1191	335	0.1272	445	0.1336
120	0.1077	230	0.1194	340	0.1275	450	0.1339

Tabelle B.1: Die Beziehung zwischen $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ und $\alpha_s(M_Z^2)$.

Anhang C

Der Glättungsalgorithmus 353QH,twice

Der Algorithmus 353QH,twice [47] dient dazu, Verteilungen mit Fluktuationen zu glätten. Dabei wird für einen bestimmten Histogrammkanal auch Information aus den umliegenden Kanälen verwendet. Die statistische Unsicherheit einer geglätteten Verteilung ist deshalb nur ein Bruchteil des Fehlers, den das ungeglättete Histogramm besitzt.

Die Annahme beim Glätten ist die, daß die wirkliche Verteilung kontinuierlich ist und sich bei kleinen Änderungen der Abszisse auch nicht allzu stark ändert. Deshalb ist der Glättungsalgorithmus für Verteilungen mit starken Schwankungen, d.h. großer 1. oder 2. Ableitung, nicht geeignet.

Das Verfahren besteht aus drei Schritten. Im ersten Schritt, der „353“ genannt wird, wird zuerst für jeden Kanal i der Median aus den Inhalten z_i von 3 Kanälen der Umgebung gebildet:

$$z_i = \text{median}(z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) \quad (\text{C.1})$$

Es folgt danach dasselbe mit 5 Kanälen, d.h.

$$z_i = \text{median}(z_{i-2}, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, z_{i+2}) \quad , \quad (\text{C.2})$$

und dann nochmals mit 3 Kanälen. Durch diesen Teil werden u.a. Maxima oder Minima, die aus weniger als 3 Kanälen bestehen, geglättet. Monoton fallende oder steigende Kanalfolgen bleiben ungeändert.

Im zweiten Schritt wird zunächst an allen flachen, mehr als drei Punkte enthaltenden Maxima oder Minima eine quadratische Interpolation durchgeführt, um unnatürliche diskontinuierliche Änderungen in der Ableitung zu beseitigen. Danach werden Mittelwerte mit

$$z_i = \frac{1}{4}z_{i-1} + \frac{1}{2}z_i + \frac{1}{4}z_{i+1}$$

gebildet, um auch im monotonen Teil diskontinuierliche Ableitungen zu entfernen. Dieser zweite Schritt wird „QH“ genannt, wobei „Q“ für die quadratische Interpolation und „H“ für die Mittelwertbildung („hanning means“) steht.

Der letzte Schritt dient dazu, echte Maxima und Minima und andere Regionen mit größerer zweiter Ableitung nicht einfach wegzuglätten, was passiert, falls man nur die ersten beiden Schritte verwendet.

Dazu werden die Differenzen zwischen 353QH-geglättetem (Inhalte z_i) und ursprünglichem Histogramm (Inhalte y_i) berechnet:

$$r_i = y_i - z_i$$

Diese Differenz wird im „twice“ genannten Schritt ebenfalls 353QH-geglättet und dann zur vorher geglätteten Verteilung addiert.

Damit erhält man ein 353QH,twice-geglättetes Histogramm.

In der Analyse wurde dieser Algorithmus zur Glättung der im Monte-Carlo Generator für verschiedene Λ , a und ε_b erzeugten Verteilungen verwendet. Diese wurden nacheinander in Λ -, a - und ε_b -Richtung geglättet. Da sich die Werte der Spektren bei festem x in Abhängigkeit von Λ , a oder ε_b nur mäßig ändern (d.h. 1. und 2. Ableitungen sind nicht allzu groß), kann obiger Algorithmus ohne Probleme angewendet werden, um Fluktuationen zu korrigieren und damit die statistische Unsicherheit stark zu verringern. Ein Glätten in x -Richtung wäre problematischer, da die Verteilungen insbesondere bei kleinen x sehr große 1. und 2. Ableitungen besitzen. Diese Bereiche würden durch den Glättungsalgorithmus verfälscht.

Anhang D

Kubische Spline-Interpolation

Um bei einer nur an diskreten Stützstellen bekannten Funktion oder Verteilung auch Werte an Zwischenstellen zu erhalten, muß diese interpoliert werden. Eine äußerst vorteilhafte Interpolation kann mit Hilfe von kubischen Spline-Funktionen geschehen [48]. Diese Methode, die bei der Analyse in Kapitel 5.2.2 verwendet wurde, soll in diesem Abschnitt in ihren Grundideen kurz erläutert werden.

Ein kubischer Spline¹ besteht stückweise aus Polynomen dritten Grades, wobei die Anschlußstellen zweimal stetig differenzierbar sind. Ein kubischer Spline ist also eine glatte Funktion. Seine herausragende Eigenschaft besteht darin, daß er von allen interpolierenden Funktionen die geringste Gesamtkrümmung hat:

$$\int_a^b dt |f''(t)| \quad \text{ist minimal}$$

Dies ist der Hauptgrund für die Verwendung von Spline-Funktionen auf diesem Gebiet. Die Knoten der Spline-Funktion fallen bei der Interpolationsaufgabe gerade mit den bekannten Stützstellen x_i , wobei $f(x_i) = y_i$ gilt, zusammen. Als Randbedingung wird $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ verwendet, d.h. die Steigung soll sich am Rand nicht mehr ändern. Der daraus resultierende Spline wird natürlicher kubischer Spline genannt.

Der gesuchte Spline $s(x)$ wird stückweise aus Polynomen $s_i(x)$ zusammengesetzt, die folgende Form haben:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (\text{D.1})$$

Dabei sind a_i , b_i , c_i und d_i zu bestimmende Koeffizienten.

¹aus dem Schiffsbau: dünne Latte. Die Biegelinie solch einer Latte hat gerade minimale Krümmung, ist also eine Spline-Funktion $s(x)$.

D. Kubische Spline-Interpolation

Dieser interpolierende Spline soll außerdem folgende Eigenschaften haben:

- $s(x_i) = y_i$, d.h. $s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i) = y_i$ (Interpolationseigenschaft)
- $s'(x_i)$ und $s''(x_i)$ existieren :

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s'(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s'(x_i) \quad , \text{d.h. } s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s''(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s''(x_i) \quad , \text{d.h. } s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$$

- $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

Die natürliche kubische Spline-Funktion ist durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt und kann leicht berechnet werden. Dazu benutzt man (D.1) und setzt die obigen Bedingungen für den interpolierenden Spline ein.

Mit $h_i = x_{i+1} - x_i$ und $y'' = s''(x_i)$ folgt:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{6h_i} (y''_{i+1} - y''_i) \\ b_i &= \frac{1}{2} y''_i \\ c_i &= \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6} h_i (y''_{i+1} + 2y''_i) \\ d_i &= y_i \end{aligned} \tag{D.2}$$

Da die y_i durch die Stützstellen bekannt sind, müssen nur noch die zweiten Ableitungen y''_i berechnet werden. Diese erhält man aus den Bedingungen für die ersten Ableitungen $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$, die zu einem linearen Gleichungssystem in Tridiagonalform für die $n - 1$ Unbekannte y''_i , $i = 1 \dots n - 1$ führen. Dieses kann mit dem Gaußalgorithmus leicht gelöst werden. Aus den y''_i ergeben sich dann mit (D.2) alle Koeffizienten für die Spline-Funktion. Mit dieser können nun auch Werte zwischen den ursprünglich bekannten Stützstellen bestimmt werden.

Die Verteilungen, die bei der Analyse interpoliert wurden, sind die im Monte-Carlo Generator für verschiedene Λ -, a - und ε_b -Werte erzeugten und danach geglätteten Histogramme. Die Interpolation in Λ -, a - bzw. ε_b -Richtung mit kubischen Splines liefert für nichtsimulierte Zwischenstellen sehr zuverlässige Werte, denn die Knotenabstände sind nicht allzu groß, und die wirklichen Verteilungen sind wie der Spline glatt und besitzen nur geringe Krümmung. Noch größere Zuverlässigkeit wird dadurch erzielt, daß gleichzeitig alle drei Splines (d.h. die Splines in Λ , a und ε_b) ausgewertet werden und das arithmetische Mittel in die weitere Analyse eingeht (Kapitel 5.2.2).

Abbildungsverzeichnis

2.1	Baryonen aus u-, d- und s-Quarks	7
2.2	Mesonen aus u-, d- und s-Quarks	7
2.3	Elementare Feynmangraphen der QCD	10
2.4	Ladungsmessung	11
2.5	Antiabschirmeffekt durch die Gluonen	11
2.6	Energieabhängigkeit von α_s	12
2.7	3-Jet-Ereignis bei 31 GeV	15
2.8	Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen in 4 Phasen	16
2.9	Feynmangraphen für Matrix-Element 2.Ordnung	18
2.10	Feynmangraph für Parton-Schauer	18
3.1	Tiefinelastische Streuung im Partonmodell	21
3.2	Skalenverhalten bei $x = 0.25$	22
3.3	Skalenverletzung in der tiefinelastischen Streuung	23
3.4	Beiträge in α_s zur tiefinelastischen Streuung	23
3.5	Diagramme zur e^+e^- -Annihilation in nullter Ordnung	26
3.6	Diagramme zur e^+e^- -Annihilation in erster und zweiter Ordnung	26
3.7	Die 3-Jetrate in Abhängigkeit von der Energie	27
3.8	x -Verteilungen bei verschiedenen Energien	28
3.9	Skalenverletzung in der e^+e^- -Annihilation	29
3.10	Darstellung der ersten Altarelli-Parisi-Gleichung (1.Ordnung)	32
4.1	Der DELPHI-Detektor im Längsschnitt	42
4.2	Der DELPHI-Detektor im Querschnitt	43
4.3	Perspektivische Aufrißzeichnung des DELPHI-Detektors	44
4.4	Querschnitt durch den Inner-Detektor	46
4.5	Anordnung der Module im Outer-Detektor	47
4.6	Der Korrekturfaktor für das Impulsspektrum bei DELPHI	50
5.1	Der Phasenraum für Ereignisse mit Gluonabstrahlung in der x_1 - x_2 -Ebene	53

D. Kubische Spline-Interpolation

5.2	Änderung des Werts von α_s an den QCD-Vertizes durch f	54
5.3	Die verschiedenen Skalenfunktionen	56
5.4	Die Impulsverteilungen bei den Partonen	58
5.5	χ^2 in Abhängigkeit von Λ und a	62
5.6	Die skalierten inklusiven Impulsverteilungen bei 35 und 91 GeV	64
5.7	Der Quotient aus den Verteilungen bei 91 und 35 GeV	65
5.8	Die Abhängigkeit des Ergebnisses für Λ von $x_{Schnitt}$	67
5.9	Λ bei verschiedenen Experiment-Kombinationen	70
5.10	Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten α_s von der unteren Schranke für x	71
5.11	Die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten α_s vom Renormalisierungsfaktor f	72
5.12	Die 3- und 4-Jetraten in Abhängigkeit von f und y	74
6.1	$\alpha_s(Q)$ bei verschiedenen Experimenten	78

Tabellenverzeichnis

1.1	Die elementaren Fermionen	2
1.2	Die fundamentalen Wechselwirkungen	3
2.1	Die Quarks	6
4.1	Die für die Analyse verwendeten Experimente	40
5.1	Die Abhängigkeit des Ergebnisses für Λ vom verwendeten x -Bereich .	67
5.2	Zusammenfassung der Fehler auf $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$	75
6.1	Verschiedene α_s -Bestimmungen	77
A.1	Das inklusive Impulsspektrum von DELPHI	80
A.2	Das inklusive Impulsspektrum von ALEPH	81
A.3	Das inklusive Impulsspektrum von AMY	82
A.4	Das inklusive Impulsspektrum von CELLO	83
A.5	Das inklusive Impulsspektrum von TASSO	84
A.6	Das inklusive Impulsspektrum von MARK II	85
B.1	Die Beziehung zwischen $\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)}$ und $\alpha_s(M_Z^2)$	86

Literaturverzeichnis

- [1] D.H.Perkins, Hochenergiephysik, Addison-Wesley 1990
- [2] CDF-Kollaboration, „A lower limit on M_{top} “, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 447, Fermilab-Pub. 91/352-E
- [3] O.Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik, Friedr.Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986
- [4] T.Hebbeker, „Tests of Quantum Chromodynamics“, Phys. Rep. 217, 2&3 (1992), 69-157
- [5] F.Halzen, A.D.Martin, Quarks and Leptons, John Wiley & Sons, 1984
- [6] Review of Particle Properties, Phys. Lett. B239 (1990) III.50
- [7] P.M.Stevenson, Phys. Rev. D23 (1981) 2916
- [8] R.K.Ellis, D.A.Roos, A.E.Terrano, Nucl. Phys. B178 (1981) 421
- [9] K.Fabrizius et al., Phys. Lett. B97 (1980) 431, Z.Phys. C11 (1982) 315
- [10] F.Gutbrod, G.Kramer, G.Schierholz, Z.Phys. C21 (1984) 235
- [11] G.Kramer, B.Lampe, Z.Phys. C39 (1988) 101
- [12] T.Sjöstrand, Z.Phys. C26 (1984) 93
- [13] R.D.Field, R.P.Feynman, Nucl. Phys. B136 (1978) 1
- [14] M.Virchaux, A.Milsztajn, Phys. Lett. B274 (1992) 221
- [15] B.R.Webber, J. Phys. G: Nucl. Phys. 17(1991) 1579
und zugehöriges Programm
- [16] G.Altarelli, Phys. Rep. 81(1982) 1-129

-
- [17] N.B.Skachkov, persönliche Mitteilung
 - [18] G.Curci, W.Furmanski, R.Petronzio, Nucl. Phys. B175 (1980) 27
W.Furmanski, R.Petronzio, Phys. Lett. B97(1982) 437
 - [19] E.G.Florates, C.Kounnas, R.Lacaze, Nucl. Phys. B192 (1981) 417
 - [20] T.Munchisa, M.Okada, K.Kudoh, K.Kitani, Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 609
 - [21] T.Uematsu, Phys. Lett. B79(1978) 97
 - [22] G.C.Fox, Nucl. Phys. B128 (1977) 1
 - [23] D.A.Ross, CALT-68-699 (1979)
 - [24] DELPHI-Kollaboration, „The DELPHI Detector at LEP“, CERN/EF 90-5,
CERN-PPE/90-128 (13.9.1990)
 - [25] DELPHI-Kollaboration, P.Aarnio et al., Phys. Lett. B240 (1990) 271
 - [26] H.Fürstenau, Univ. Karlsruhe, Doktorarbeit, IEKP-KA/92-16
 - [27] ALEPH-Kollaboration, D.Buskulic et al., Z.Phys. C55 (1992) 209
 - [28] AMY-Kollaboration, Y.K.Li et al., Phys. Rev. D41 (1990) 2675
 - [29] O.Podobrin, Univ. Hamburg, Doktorarbeit (1992)
CELLO-Kollaboration, H.J.Berend et al., wird veröffentlicht
 - [30] TASSO-Kollaboration, M.Althoff et al., Z.Phys. C22 (1984) 307
TASSO-Kollaboration, W.Braunschweig et al., Z.Phys. C47 (1990) 187
 - [31] MARK II-Kollaboration, A.Petersen et al., Phys. Rev. D37 (1988) 1
 - [32] MINUIT 92.1, Reference Manual, Long Writeup D506, CERN, Schweiz (5/92)
 - [33] V.G.Krivokhizin, S.P.Kurlovich, V.V.Sanadze, I.A.Savin, A.V.Sidorov,
N.B.Skachkov, Z.Phys. C36 (1987) 51-59
 - [34] P.K.Suetin, Classical Orthogonal polynomials, Nauka, Moskau (1979)
 - [35] A.J.Buras, Rev. Mod. Phys. 52 (1980) 199
 - [36] T.Sjöstrand, Comp. Phys. Comm. 39 (1986) 347
T.Sjöstrand, M.Bengtsson, Comp. Phys. Comm. 43 (1987) 43

- [37] T.Sjöstrand, PHYHIA 5.6 and JETSET 7.3 Physics and Manual, CERN-TH.6488/92 (Mai 1992)
- [38] T.Sjöstrand et al., in „Z physics at LEP 1“, eds. G.Altarelli, R.Kleiss, C.Verzegnassi, CERN 89-08, Vol.3, S.143 (1989)
- [39] B.Andersson, G.Gustafson, G.Ingelman, T.Sjöstrand, Phys. Rep. 97 (1983) 31
- [40] C.Peterson, D.Schlatter, I.Schmitt, P.M.Zerwas, Phys. Rev. D27 (1983) 105
- [41] W.T.Eadie, D.Drijard, F.James, M.Roos, B.Sadoulet, Stat. methods in exp. physics, North Holland 1971
- [42] G.Altarelli, „QCD and Experiment: Status of α_s “, CERN-TH.6623/92 (August 1992)
- [43] UA2-Kollaboration, J.Alitti et al., Phys. Lett. B263 (1991) 563
- [44] LEP-Kollaborationen (ALEPH, DELPHI, L3, OPAL), . Phys. Lett. B276 (1992) 247
ALEPH-Kollaboration, D.Decamp et al., Phys. Lett. B255 (1991) 623; ibid. B257 (1991) 479
DELPHI-Kollaboration, P.Abreu et al., Phys. Lett. B247 (1990) 167; ibid. B252 (1990) 159; Z.Phys. C54 (1992) 55
L3-Kollaboration, B.Adeva et al., Phys. Lett. B248 (1990) 464; ibid. B271 (1991) 461; ibid. B284 (1992) 471
OPAL-Kollaboration, M.Z.Akrawy et al., Phys. Lett. B235 (1990) 389; ibid. B252 (1990) 159; Z.Phys. C49 (1991) 375; P.D.Acton et al., CERN PPE/91-214 (1991)
- [45] W.de Boer, H.Fürstenau, IEKP-KA/91-07 (Juli 1991)
- [46] U.Amaldi, W.de Boer, H.Fürstenau, CERN-PPE/91-190, IEKP-KA/91-11 (November 1991)
- [47] J.H.Friedman, „Data Analysis Techniques for High Energy Particle Physics, proceedings of the 1974 CERN School of Computing, Godoyssund (Norway)“, CERN/74-23 (August 1974)
- [48] H.R.Schwarz, Numerische Mathematik, Teubner-Verlag 1986
J.Stoer, Einführung in die Numerische Mathematik I, Springer-Verlag 1972

Danksagung

Zum Schluß möchte ich mich ganz herzlich bei allen Mitarbeitern des Instituts für experimentelle Kernphysik für die ständige Hilfsbereitschaft bei kleineren und größeren Problemen und die gute Arbeitsatmosphäre bedanken.

Mein besonderer Dank gilt:

- Herrn Prof. Dr. Wim de Boer für das interessante Thema und die freundliche Betreuung und Unterstützung.
- Herrn Prof. Dr. D.C. Fries für das Korreferat.
- Herrn Dr. W.-D. Apel für die Betreuung der Software.
- Herrn Prof. Dr. N.B. Skachkov für die schönen gemeinsamen Tage in Karlsruhe, Genf und Dubna.
- allen, die mit praktischen Ratschlägen zum Gelingen der Arbeit beitrugen.
- allen Freunden, die dafür sorgten, daß es in der Zeit der Durchführung außer Physik auch noch anderes gab.

Ein extra Dankeschön meiner lieben Familie, die mir ein schönes und geldsorgenfreies Studium ermöglicht und mich jederzeit unterstützt.

Versicherung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig,
unter Angabe aller wesentlichen Hilfsmittel
und Referenzen, angefertigt zu haben.

Thomas Kußmaul

